

Решение задач с помощью квадратных уравнений

Квадратные уравнения помогают находить неизвестные в реальных задачах.



Как уравнения второй степени решают задачи

В 8 классе эта тема показывает, как текстовое условие превращается в математическую модель. С её помощью находят длину, время, скорость, число и проверяют ответ по смыслу.



Что такое квадратное уравнение

Неизвестное в квадрате

Квадратное уравнение отличается тем, что неизвестная величина входит во второй степени. Именно это делает его более сложным, чем линейное уравнение, и расширяет число возможных решений.

Общий вид

Обычно уравнение записывают так: $ax^2+bx+c=0$, где a не равно нулю. По этому виду сразу видно, какие коэффициенты нужно использовать для дальнейших вычислений.

Разные коэффициенты

Коэффициенты a , b и c могут быть целыми, дробными или отрицательными. От их значений зависит, сколько корней получится, и каким способом удобнее решать уравнение.

Связь с задачей

На практике квадратное уравнение появляется после перевода условия задачи на язык букв и формул. Тогда оно становится моделью ситуации, а не просто набором символов.

Проверка смысла

Даже найденный корень не всегда подходит. В задачах на длину, возраст, скорость или количество нужно оставить только те значения, которые соответствуют реальному условию.

Как текст задачи превращается в уравнение

01

Выбор переменной

Сначала выбирают неизвестную величину и обозначают её буквой. Обычно за x берут то, что нужно найти в задаче: сторону, число, время или скорость.

02

Запись остальных величин

Затем через выбранную переменную выражают все другие данные условия. Так появляются выражения вроде $x+3$, $2x$, $11-x$ или формулы, связанные с площадью и движением.

03

Составление равенства

После этого записывают равенство по условию задачи. В нём часто встречаются произведение, сумма, разность или квадрат, поэтому и получается уравнение второй степени.

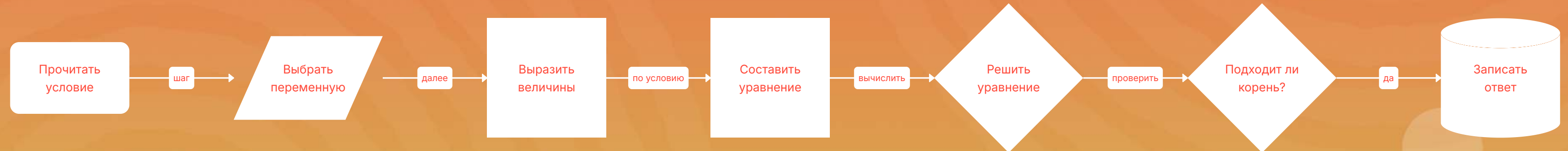
04

Переход к решению

Когда уравнение составлено, его приводят к стандартному виду и решают. Затем обязательно проверяют, подходят ли найденные значения по смыслу и единицам измерения.

Алгоритм решения текстовой задачи

Последовательность действий от условия к проверенному ответу



Стандартный вид уравнения

01

Приведение к виду

Перед решением уравнение приводят к форме $ax^2+bx+c=0$. Для этого раскрывают скобки, переносят слагаемые в одну часть и приводят подобные члены.

02

Зачем это нужно

Стандартный вид удобен тем, что коэффициенты a , b и c сразу видны. Это помогает быстро вычислить дискриминант и выбрать способ решения.

03

Проверка записи

Полезно ещё раз убедиться, что перед уравнением стоит ноль. Если выражение не приведено полностью, легко ошибиться в знаках и получить неверные корни.

Связь дискриминанта и числа корней



Дискриминант помогает заранее понять, сколько решений может иметь квадратное уравнение, ещё до вычисления самих корней.

Если D больше нуля, корней два; если равно нулю — один; если меньше нуля — действительных корней нет.

Формулы корней квадратного уравнения

01

Вычислить D

Сначала находят дискриминант по формуле $D=b^2-4ac$. Именно его значение показывает, будут ли у уравнения действительные корни и сколько их окажется.

02

Подставить в формулу

Если D неотрицателен, корни находят по формуле $x=(-b\pm\sqrt{D})/(2a)$. Сначала подставляют коэффициенты, затем выполняют вычисления для каждого знака.

03

Особый случай

Когда дискриминант равен нулю, корень только один. Тогда формула упрощается до $x=-b/(2a)$, что позволяет быстрее получить ответ без лишних вычислений.

Пример задачи на прямоугольник

Выбор переменной

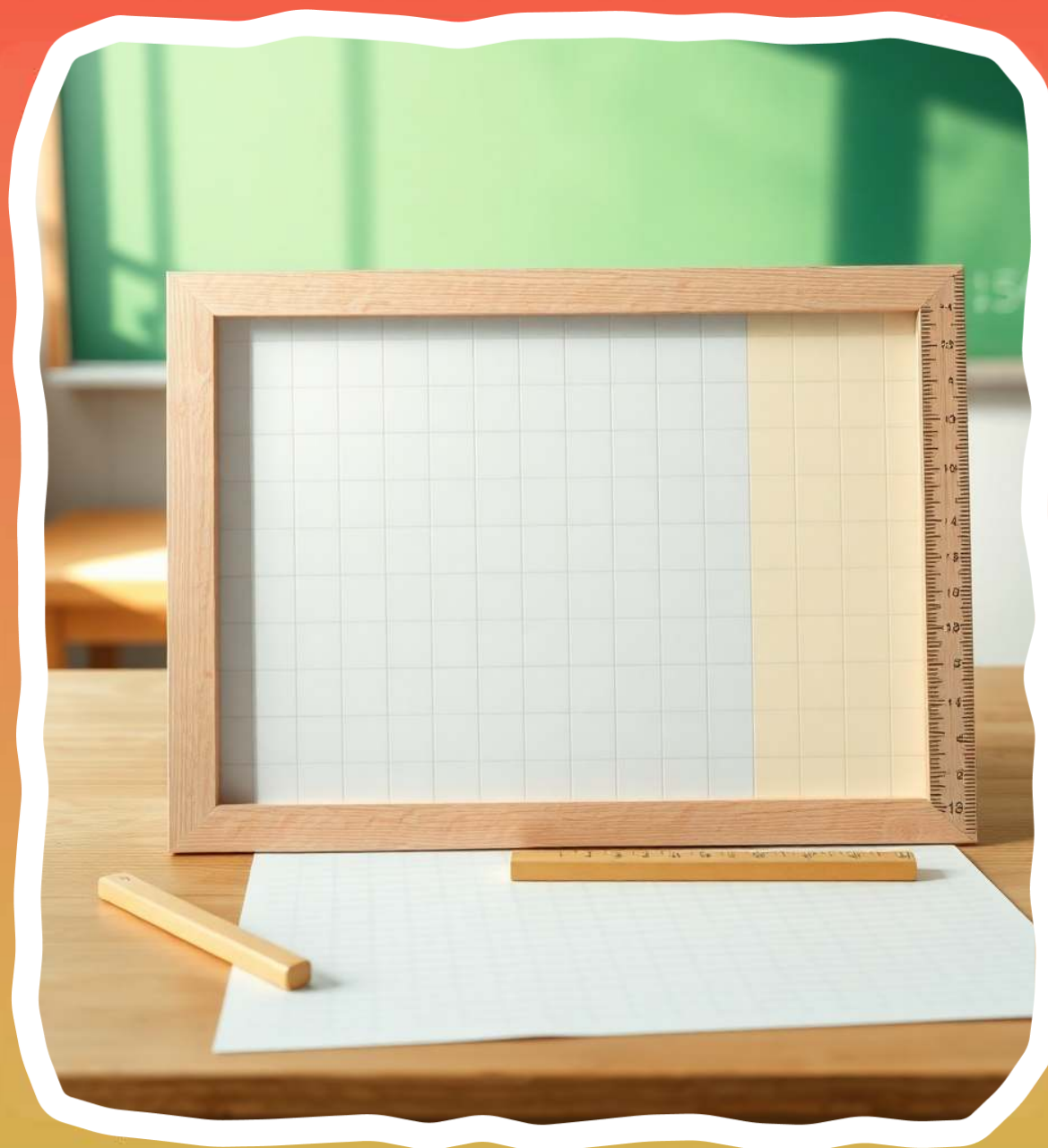
Обозначим ширину прямоугольника через x сантиметров. Тогда длина будет $x+3$ сантиметра, потому что по условию она на 3 сантиметра больше ширины.

Составление уравнения

По формуле площади получаем равенство $x(x+3)=40$. Это выражает связь между сторонами и площадью, поэтому задача сразу превращается в уравнение.

Преобразование записи

После раскрытия скобок выходит $x^2+3x-40=0$. Теперь уравнение записано в стандартном виде, и можно искать его корни известным способом.



Выбор подходящего корня

В ответе остаётся только положительное значение, потому что длина и ширина не могут быть отрицательными. Математический корень без смысла в задаче не подходит.

Что показывает пример

Этот пример показывает, как из обычного текста получается квадратное уравнение. Достаточно правильно обозначить неизвестное и внимательно связать его с условием.

Типовые задачи, которые приводят к квадратным уравнениям

Один и тот же вид уравнения возникает в разных сюжетах: в геометрии, задачах на числа и движении.

Тип задачи	Переменная	Уравнение/данные
Площадь	x	$x(x+4)=96$
Два числа	меньшее	сумма 13, произведение 36
Движение	время или скорость	$s=vt \rightarrow$ уравнение 2-й степени

Разные сюжеты сводятся к одному алгоритму: выбрать переменную, записать связи и получить квадратное уравнение.

Разложение на множители как способ решения

Идея способа

Если левая часть уравнения раскладывается на множители, его можно решить быстрее, чем через дискриминант. Достаточно привести выражение к виду произведения, равного нулю, и найти каждый множитель.

Правило нуля

Когда произведение равно нулю, хотя бы один из множителей должен быть нулем. Поэтому запись $(x-p)(x-q)=0$ сразу дает два возможных значения: $x=p$ и $x=q$.

Когда метод удобен

Этот способ особенно полезен, если коэффициенты небольшие и множители легко угадываются. Он помогает сэкономить время и избежать лишних вычислений с корнем из дискриминанта.

Связь с задачей

После нахождения корней их обязательно проверяют по смыслу условия. В текстовых задачах подходят только те значения, которые не нарушают ограничения на длину, время, количество или другие величины.

Почему нужна проверка корней

01

1. Сравнить с условием

Сначала нужно посмотреть, что именно искали в задаче: длину, возраст, число предметов, время или скорость. Найденный корень должен соответствовать этой величине и не противоречить тексту условия.

02

2. Отбросить невозможное

Отрицательные значения, слишком большие числа или дроби там, где нужны целые предметы, обычно не подходят. Математически корень может существовать, но в реальной ситуации он окажется лишним.

03

3. Проверить подстановкой

Полезно подставить каждый корень обратно в исходное равенство. Это помогает убедиться, что уравнение решено верно, а в вычислениях не было ошибки в знаках или преобразованиях.

04

4. Записать окончательный ответ

В ответе оставляют только подходящие корни и обязательно указывают единицы измерения. Так решение становится полным, понятным и согласованным с условием текстовой задачи.

Частые ошибки при решении задач

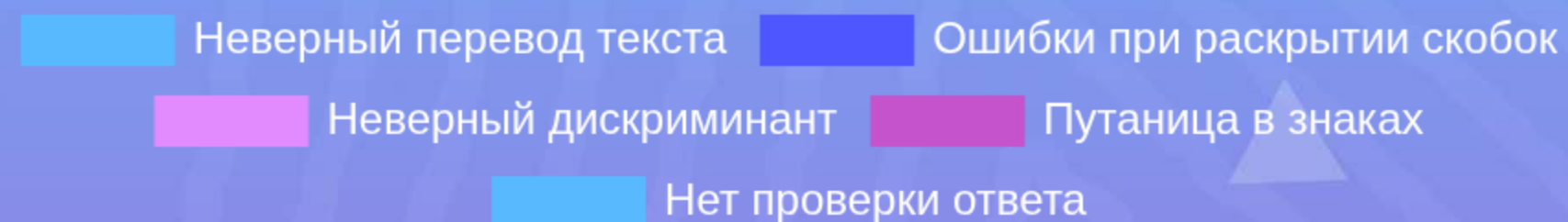


Диаграмма показывает, что трудности чаще возникают не в самой формуле, а на этапах перевода условия, преобразований и проверки результата.

Больше всего ошибок связано с пониманием текста и отсутствием проверки, поэтому важно решать задачу по шагам, а не только вычислять корни.

Задачи на движение

01

1. Выбрать величину

Сначала определяют, что неизвестно в задаче: время, скорость или расстояние. Обычно за переменную удобно брать ту величину, которая встречается в нескольких частях условия.

02

2. Использовать формулу

Далее применяют соотношение $s=vt$ и выражают через одну переменную все нужные величины. Если движение происходит на двух участках или с разными скоростями, уравнение становится квадратным.

03

3. Составить равенство

После подстановки данных получают равенство по условию задачи. Неизвестная может входить и в скорость, и во время, поэтому при умножении выражений появляется член второй степени.

04

4. Проверить смысл ответа

Полученные корни сравнивают с реальной ситуацией. В задачах на движение отрицательное время или скорость невозможны, поэтому оставляют только те значения, которые имеют физический смысл.

Задачи на два числа

Меньшее число как x

Если одно число больше другого на несколько единиц, удобнее обозначить меньшее число буквой x . Тогда второе число легко записать через x , и условие становится более наглядным.

Сумма и разность

Когда в задаче сказано, что числа дают определенную сумму или отличаются на заданное число, эти сведения переводят в уравнение. Так появляются выражения вида x и $x+k$.

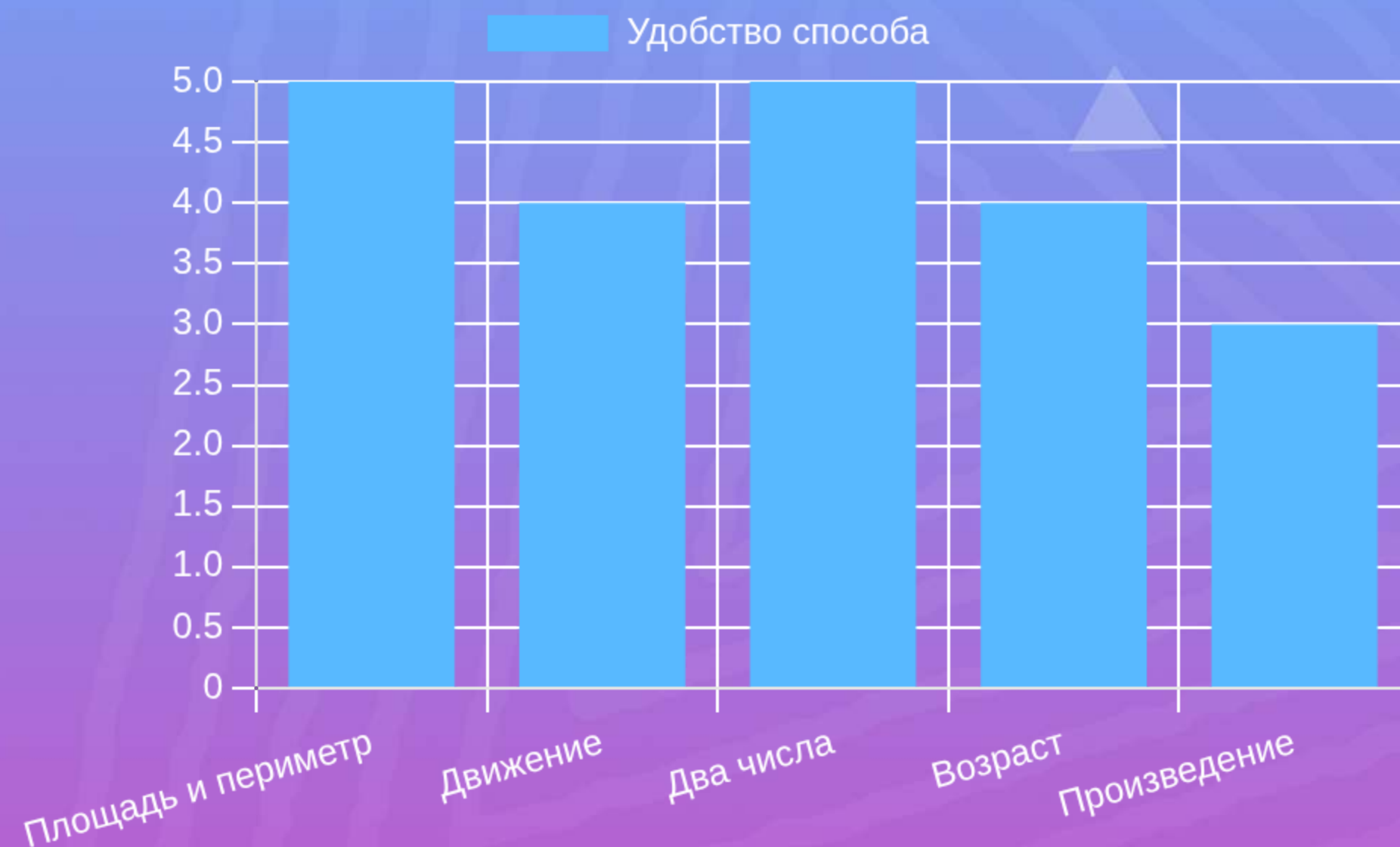
Произведение чисел

Если известно произведение, то после подстановки второго числа через x получается квадратное уравнение. Такой прием часто встречается в школьных задачах и помогает тренировать составление выражений.

Проверка обоих корней

После решения обычно находят два значения. Их нужно проверить по условию, потому что оба могут быть математически верными, но только один или оба подходят для задачи.

Какой способ решения подходит к разным типам задач



Разные сюжеты требуют разных опорных шагов, но почти всегда начинается все с переменной и уравнения. Затем выбирают самый короткий путь к корням.

Чем понятнее тип задачи, тем легче выбрать подход: где-то достаточно разложения на множители, а где-то надежнее считать дискриминант.

Единицы измерения в условии задачи

01

1. Привести к одному виду

Все величины в одной задаче должны быть выражены в одинаковых единицах. Если длины даны в сантиметрах и метрах, сначала их нужно привести к одной системе.

02

2. Не смешивать величины

Нельзя подставлять минуты вместо часов или километры вместо метров без пересчета. Иначе коэффициенты уравнения будут неверными, а полученный ответ не совпадет с условием.

03

3. Следить за формулой

Особенно важно согласовать единицы в формулах площади, скорости и времени. Тогда каждый множитель будет иметь правильный смысл, а вычисления останутся понятными и точными.

04

4. Проверять ответ

После решения еще раз смотрят, в каких единицах нужно записать результат. Это помогает избежать ошибок в записи и делает ответ аккуратным и полным.

Разбор одного примера пошагово

01

1. Записать условие

Сумма двух чисел равна 11, а их произведение равно 24. Значит, нужно найти такие числа, которые одновременно удовлетворяют обоим условиям задачи.

02

2. Ввести переменную

Пусть первое число равно x . Тогда второе число можно выразить как $11-x$, потому что их сумма по условию должна оставаться равной 11.

03

3. Составить уравнение

Произведение чисел равно 24, поэтому записываем $x(11-x)=24$. После раскрытия скобок получаем квадратное уравнение $x^2-11x+24=0$, готовое к решению.

04

4. Найти корни

Решаем уравнение и получаем два значения. Каждый корень может быть кандидатом на ответ, поэтому оба нужно проверить по исходному условию.

05

5. Проверить результат

Подстановка показывает, что оба числа подходят: их сумма дает 11, а произведение — 24. Значит, задача имеет два корректных ответа, которые нужно записать.

Как закрепляется навык решения

Короткие упражнения

Навык быстрее формируется на небольших заданиях: составить уравнение, найти дискриминант, выбрать способ решения и проверить ответ. Такие упражнения помогают не терять последовательность действий.

Разные сюжеты

Особенно полезны задачи на прямоугольники, числа, движение и простые геометрические ситуации. Они учат узнавать знакомую модель в новом тексте и применять один и тот же алгоритм.

Работа над ошибками

Если решение не получилось, важно найти, на каком шаге возникла ошибка: в знаке, в раскрытии скобок или в переводе условия. Это делает повторение более полезным.

Регулярность

Чем чаще ученик решает похожие задачи, тем увереннее он действует. Постепенно алгоритм становится привычным, а вычисления занимают меньше времени и вызывают меньше затруднений.

Квадратные уравнения в задачах: от условия к ответу

Тема показывает, как текст задачи превращается в понятное уравнение, а затем — в проверенный ответ. Если выбрать переменную, аккуратно выполнить вычисления и учесть смысл условия, решение становится надежным и понятным.