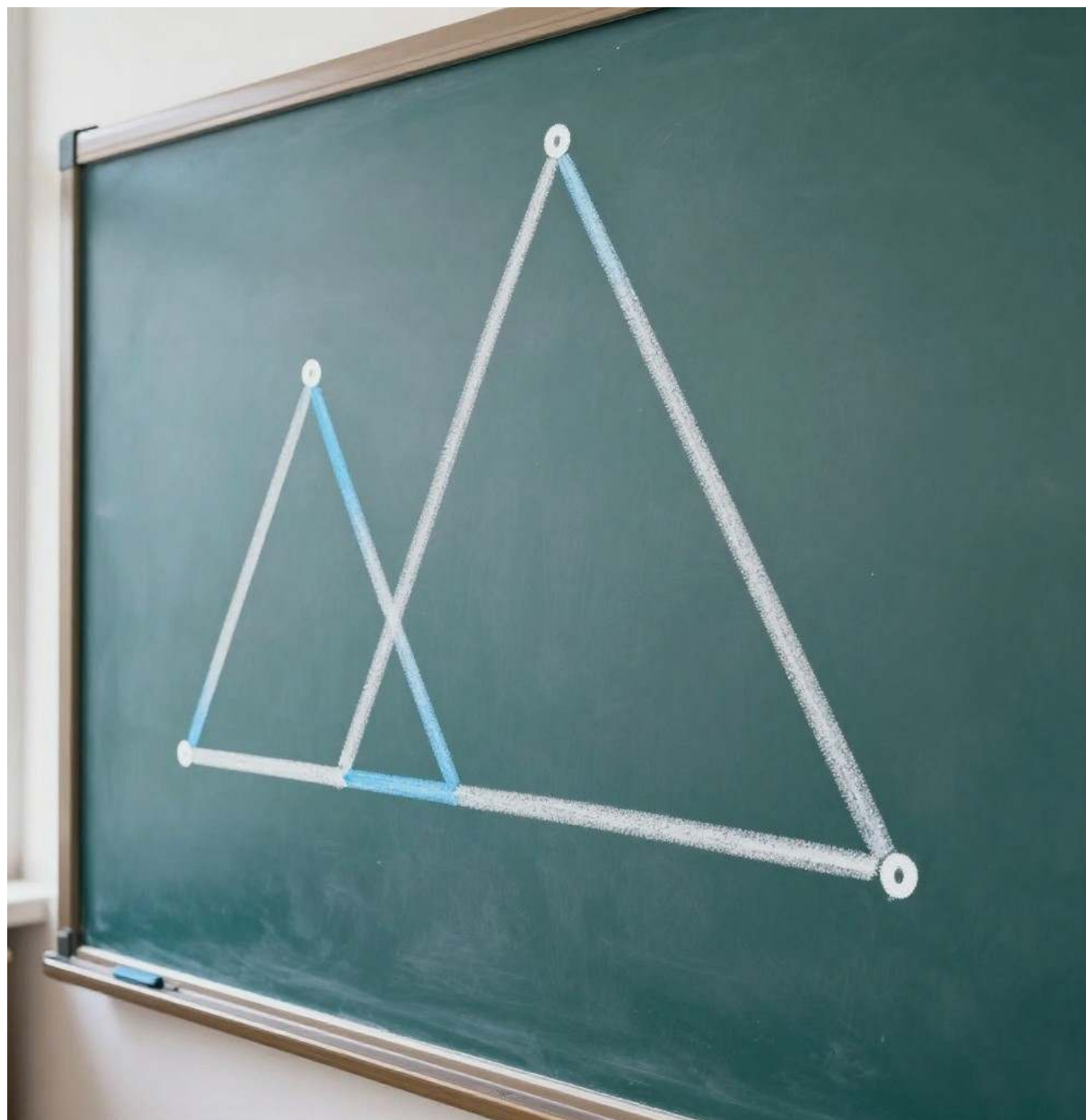


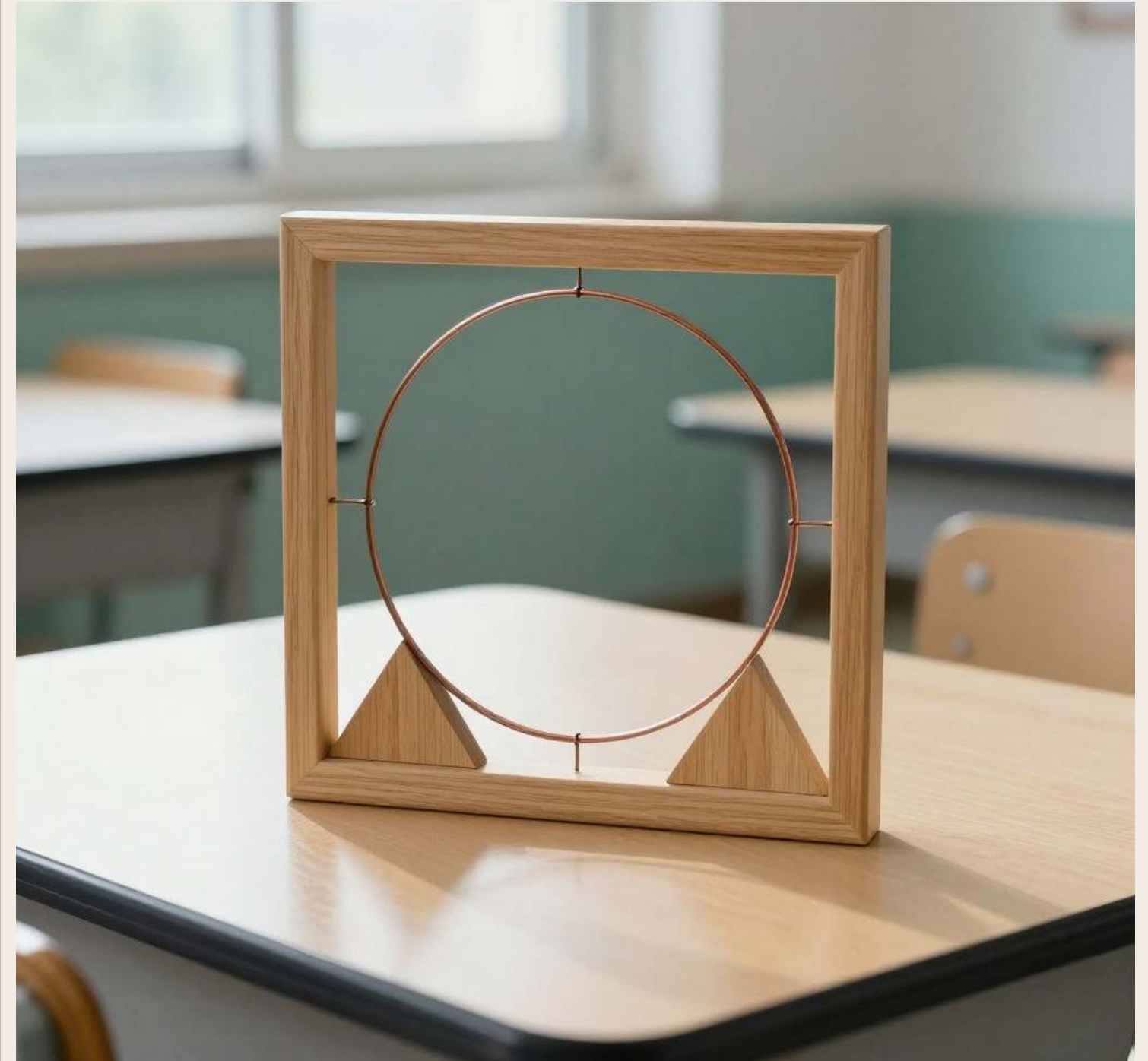


Вписанная окружность и равенство прямоугольных треугольников

Касания, биссектрисы и равенство треугольников — в одной теме.

О чём пойдёт речь

Эта тема соединяет два инструмента геометрии: вписанную окружность и признаки равенства прямоугольных треугольников. Вместе они помогают быстро находить равные отрезки, углы и делать короткие доказательства.



Почему это важно



Касания

Вписанная окружность позволяет сразу увидеть равные касательные из одной вершины и связать их с точками касания на сторонах треугольника.



Короткие доказательства

Признаки равенства прямоугольных треугольников сокращают доказательство: вместо длинных вычислений достаточно сравнить несколько соответствующих элементов.



Связанные шаги

В задачах с прямым углом, биссектрисой и окружностью эти идеи часто работают вместе и помогают быстро получить нужный вывод.

Определение вписанной окружности



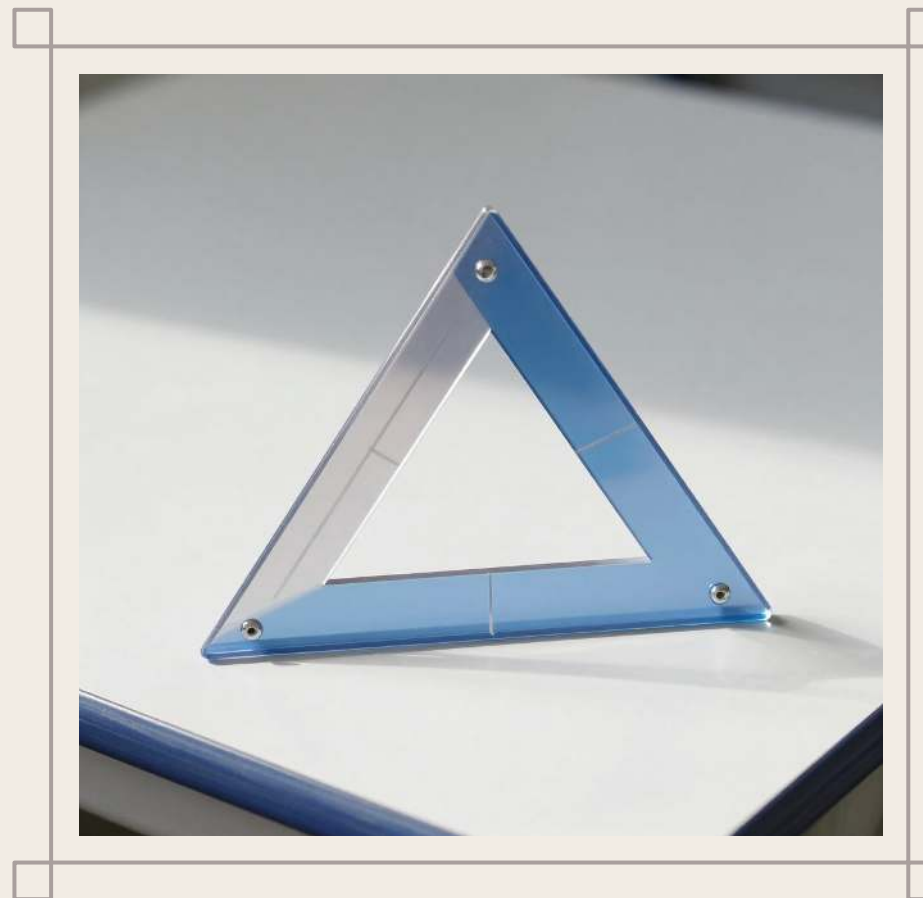
Касание со всеми сторонами

Вписанная окружность касается каждой стороны многоугольника, а в треугольнике такая окружность всегда существует и занимает строго определённое положение внутри фигуры.



Равные расстояния

Центр окружности в треугольнике находится на одинаковом расстоянии от всех сторон, поэтому он помогает связать стороны через равные отрезки и перпендикуляры.



Перпендикуляр к стороне

В точке касания радиус образует прямой угол со стороной, и это свойство часто становится первым шагом к доказательству равенства отрезков.

Центр вписанной окружности

Биссектрисы углов

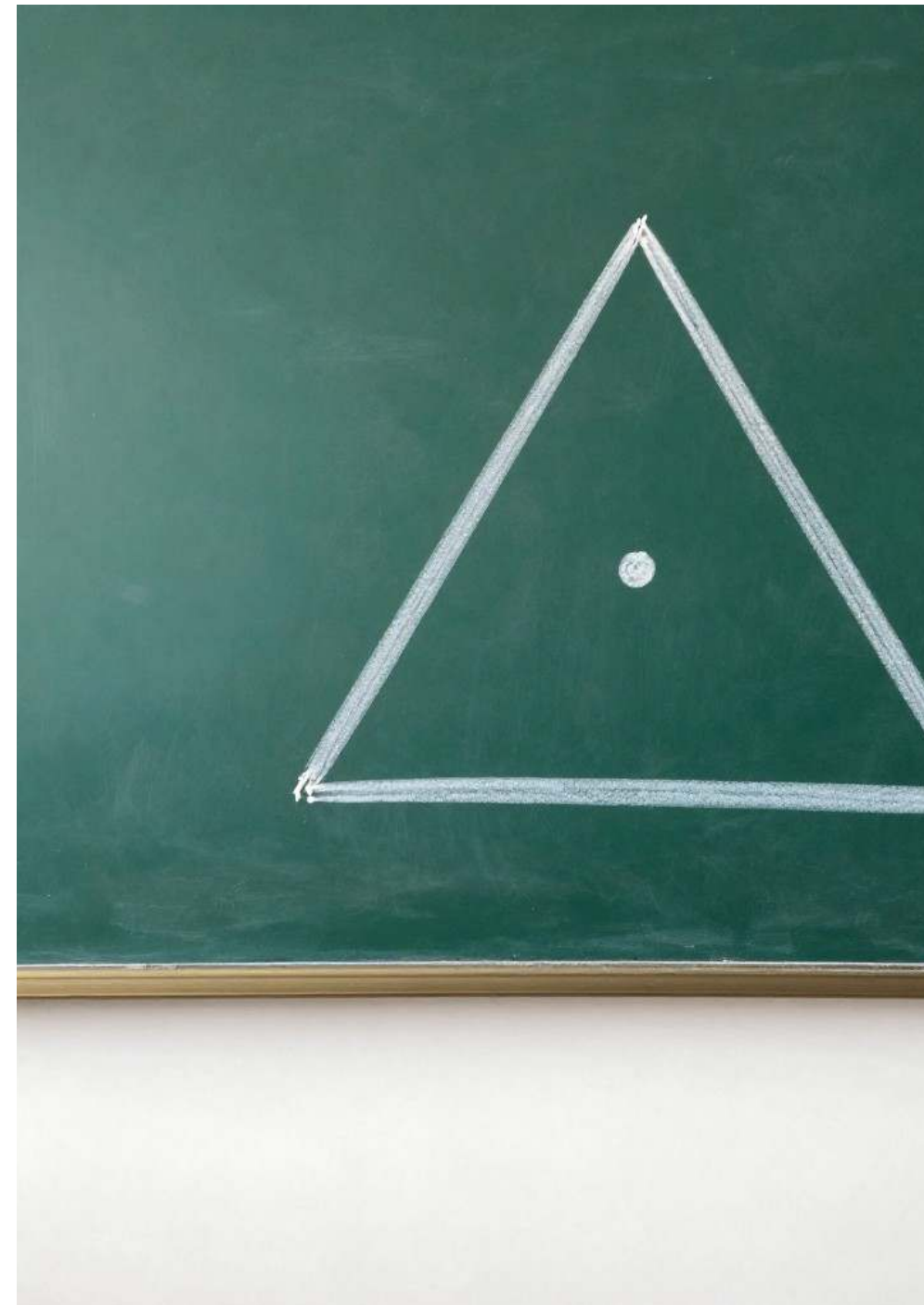
Сначала находят биссектрисы углов треугольника. Каждая из них делит угол на две равные части и задаёт направление к точкам, равноудалённым от его сторон.

1

Одинаковые расстояния

После этого проверяют расстояния от центра до сторон. Если они равны, вокруг центра можно провести окружность, касающуюся всех сторон треугольника.

3



Общая точка пересечения

Затем замечают, что все три биссектрисы пересекаются в одной точке. Именно она является центром вписанной окружности и называется инцентром.

2

Проверка существования

1

Треугольник

Для любого невырожденного треугольника можно построить единственную вписанную окружность: биссектрисы пересекутся, а центр окажется внутри фигуры.

2

Другие многоугольники

У четырёхугольников и более сложных многоугольников касательная окружность существует не всегда: здесь уже нужно проверять дополнительные условия.

Равенство касательных из одной точки

Две касательные

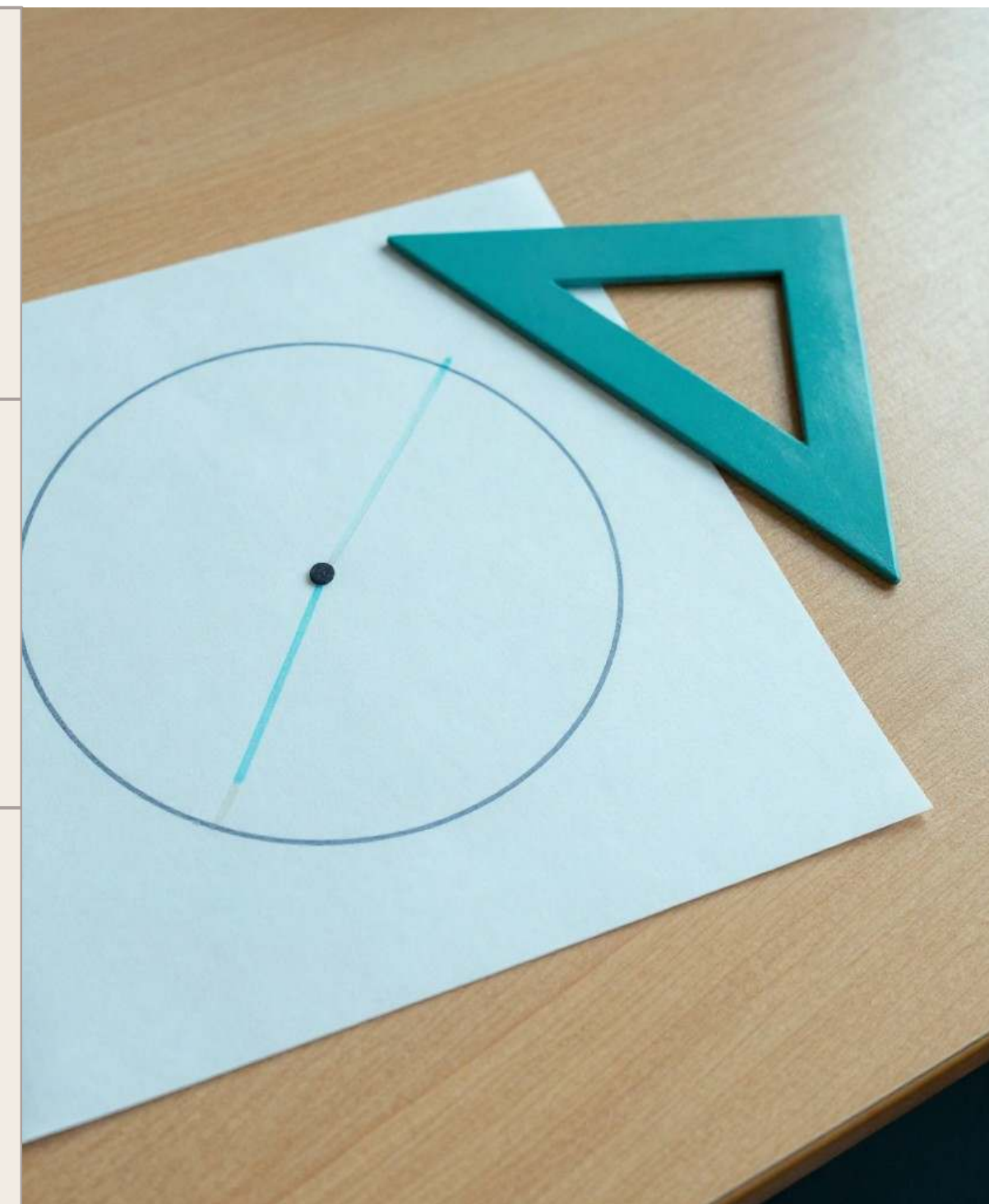
Если из одной точки к окружности проведены две касательные, то их отрезки до точек касания равны. Это свойство удобно искать у вершин треугольника.

Одинаковые отрезки

Равенство видно без вычислений: оба отрезка выходят из одной точки и опираются на одну окружность, поэтому их длины совпадают.

Применение в чертеже

В задачах на треугольник это помогает быстро находить неизвестные части сторон, если окружность касается двух соседних сторон у одной вершины.



Связь с биссектрисами

1

Пополам по углу

Биссектриса делит угол пополам, а значит, любая точка на ней одинаково удалена от обеих сторон угла. Это свойство и делает биссектрису полезной в построениях.

3

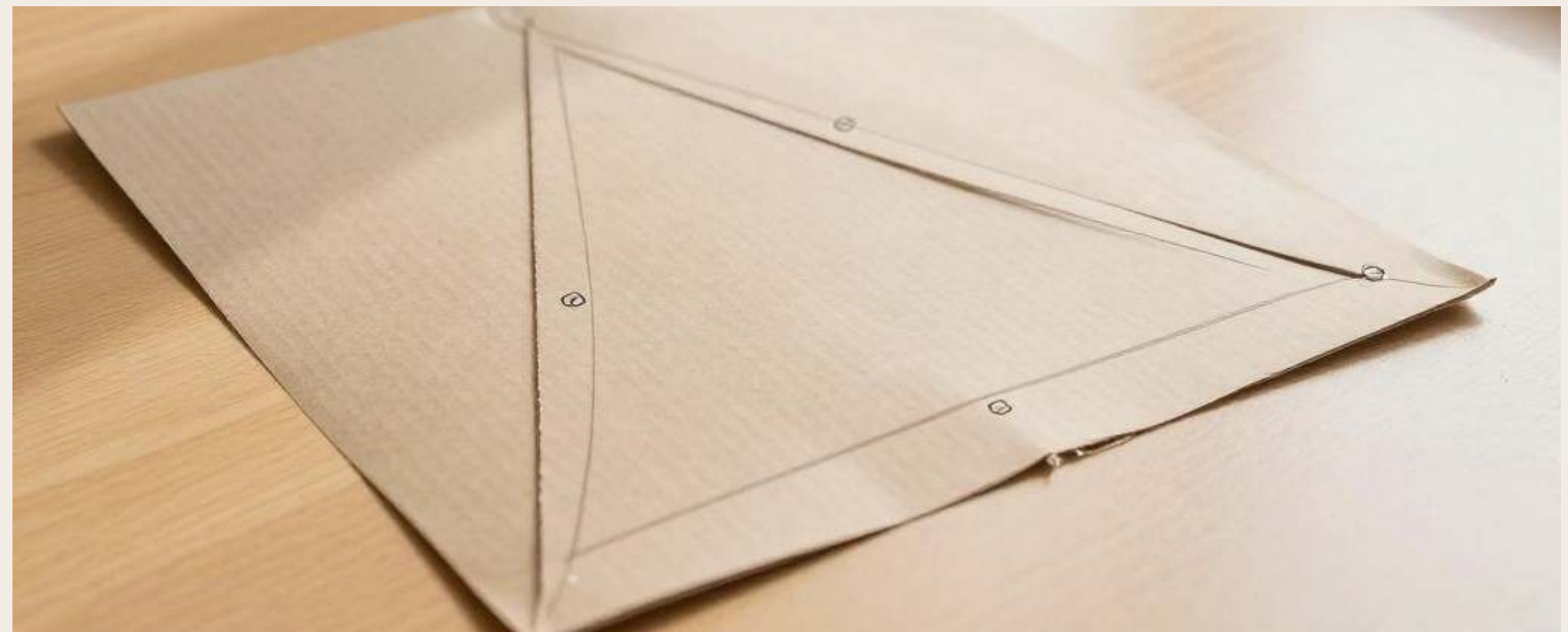
Путь к центру

Следовательно, достаточно провести биссектрисы, чтобы найти точку, из которой можно опустить равные перпендикуляры ко всем сторонам.

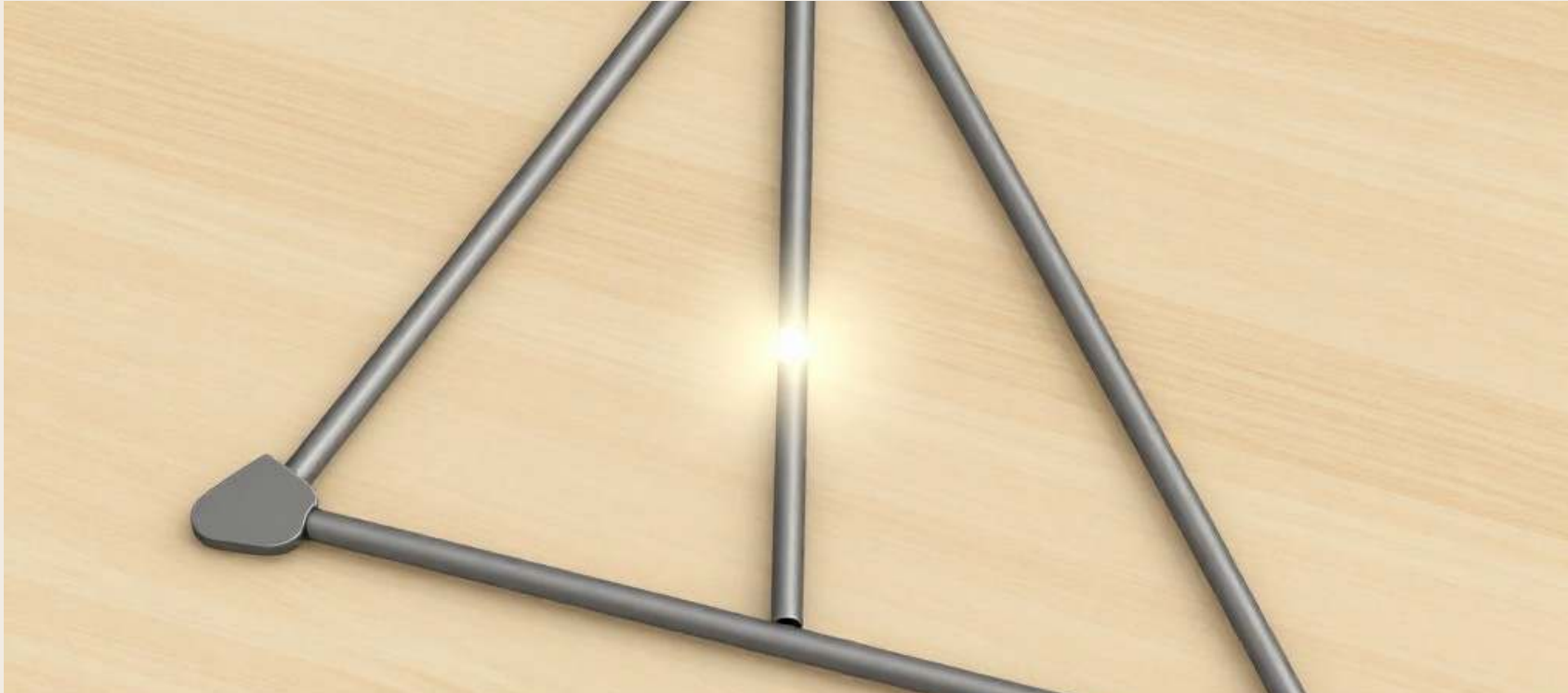
2

Общая равенность расстояний

Если рассмотреть точку пересечения двух биссектрис, она окажется равноудалённой уже от трёх сторон треугольника. Так появляется центр вписанной окружности.



Что искать на рисунке



Проверка по центру

На аккуратном чертеже сначала ищут центр, из которого к сторонам опущены перпендикуляры. Если все они равны, перед вами хороший кандидат на центр вписанной окружности. Затем проверяют, касаются ли стороны окружности в нужных точках: без полного касания окружность не считается вписанной.



Проверка по касаниям

Второй признак — касания на всех сторонах. Если окружность касается только двух сторон или одна сторона проходит мимо, фигура выглядит почти верно, но условие вписанности не выполнено. Такой рисунок важно отличать от настоящего построения.

Главные свойства касаний

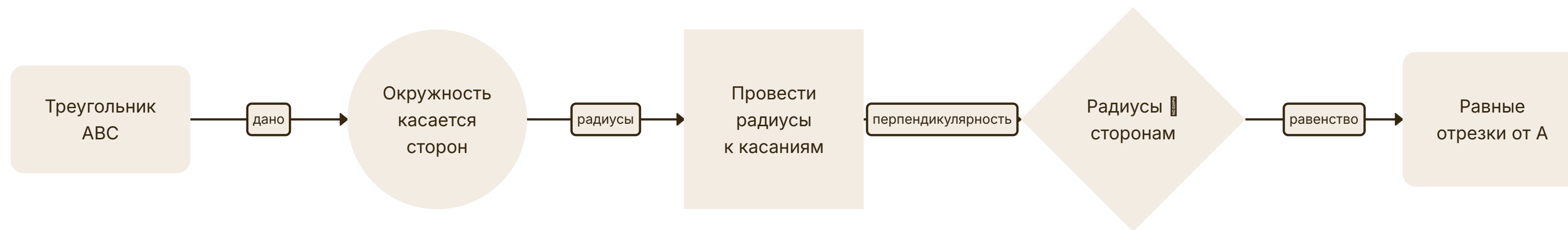
Свойство	Что означает	Зачем нужно
Радиус	Перпендикулярен стороне	Показывает касание
Касательные	Равны из вершины	Находит отрезки
Биссектрисы	Пересекаются в центре	Даёт инцентр

Сводка основных свойств, которые чаще всего используют в задачах на вписанную окружность.

Если на чертеже видны радиус, касание и биссектриса, можно сразу искать равные отрезки и центр окружности.

Мини-задача: как увидеть равные отрезки

Дано: треугольник ABC, окружность касается сторон AB, BC, CA. Нужно доказать равенство отрезков касательных от вершины A.





3

признака помогают сократить доказательство
до нескольких шагов.

Свойства прямоугольных треугольников

В задаче о прямоугольных
треугольниках обычно достаточно
найти минимальный набор равных
элементов и сразу перейти
к выводу о равенстве фигур.

Признак: гипотенуза и катет



Что нужно сравнить

Если в двух прямоугольных треугольниках совпадают гипотенуза и один катет, то этого достаточно для полного равенства. Прямые углы уже заданы, а остальные стороны и углы совпадут автоматически.



Что должно совпадать

Важно, чтобы равные элементы относились к одним и тем же треугольникам: гипотенуза к гипотенузе, катет к катету. Тогда признак можно применять без дополнительных построений.



Где он встречается

Этот признак особенно полезен в чертежах с перпендикулярами, радиусами и касаниями, где один катет часто уже известен из условия или из свойств окружности.

Признак: два катета

Шаг 1

Сначала отмечают, что оба треугольника прямоугольные. Это сразу даёт общий тип фигур и позволяет сосредоточиться на двух сторонах, образующих прямой угол.

1

Шаг 3

После этого делают вывод: треугольники равны, а значит, совпадают и их соответствующие углы, и третьи стороны. Это удобно для дальнейших доказательств.

3



Шаг 2

Затем сравнивают оба катета. Если они равны попарно, то уже выполнено главное условие признака, а дополнительных измерений не требуется.

2

Признак: гипотенуза и острый угол

Сравнение сторон

В обоих треугольниках отмечают прямой угол и сравнивают гипотенузы. Это задаёт основу для дальнейшего сопоставления фигур.

Сравнение угла

Затем находят равный острый угол. Он может быть дан в условии или получен из построения, например через биссектрису или касательную.

Итог

Когда известны гипотенуза и острый угол, треугольники полностью определяются. Остаётся записать вывод о равенстве всех соответствующих элементов.

Как строить доказательство по шагам

Сначала выделяются прямоугольные треугольники, затем находятся равные элементы, после чего выбирается подходящий признак.



Пример 1: гипотенуза и катет

Что известно	Что используем	Вывод
Гипотенузы равны	Общий катет	Треугольники равны
Прямые углы	Признак равенства	Все стороны совпадают
Соответствующие элементы	Сравнение фигур	Равны и углы

Покажем, как работает признак равенства по гипотенузе и катету в самом простом случае.

Равенство одной гипотенузы и одного катета достаточно для полного равенства прямоугольных треугольников.

Признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету

Пример 2: два катета

Что дано	Проверка	Результат
Катет 1	Равен	Катет 1
Катет 2	Равен	Катет 2
Прямой угол	Один и тот же	Треугольники равны

В этом примере сравниваются два прямоугольных треугольника, у которых равны оба катета.

Если совпадают оба катета, то прямоугольные треугольники равны, а значит, совпадают и остальные элементы.

Пример 3: касательные и треугольники

Объекты	Общее	Вывод
Радиусы	Перпендикулярны касательным	Есть прямые углы
Гипотенузы	Одинаковы по радиусу	Треугольники равны
Катет	Общий отрезок	Касательные равны

- Связь вписанной окружности с прямоугольными треугольниками помогает доказать равенство касательных от одной вершины.
- Два прямоугольных треугольника с радиусами можно сравнить по гипотенузе и катету, чтобы получить равенство касательных.

Свойства вписанной окружности и признак равенства прямоугольных треугольников



Главное правило для решения задач

Вписанная окружность и признаки равенства прямоугольных треугольников работают вместе: одна тема помогает находить равные отрезки, другая — быстро доказывать равенство фигур. Главное на чертеже — увидеть прямой угол и нужные совпадения.