

Решение неравенств, сводящихся к квадратным

Учимся решать неравенства через график, корни и интервалы.



Где встречаются квадратные неравенства

Такие задания появляются после преобразований, в дробях и текстовых задачах. Они учат приводить выражение к удобному виду, находить допустимые значения и определять промежутки, где оно становится больше или меньше нуля.



Что означает «свести к квадратному неравенству»

1 Приведение к нужному виду

Сначала исходное неравенство преобразуют так, чтобы в нём осталось квадратное выражение или произведение, которое удобно исследовать как квадратный трёхчлен.

2 Замена переменной

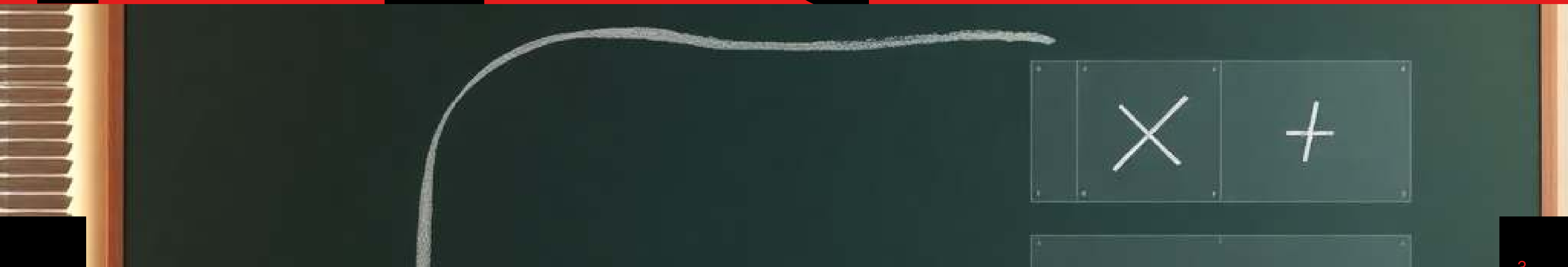
Если в записи есть x^2 , x^4 или похожие конструкции, вводят новую переменную t . Это упрощает решение и делает условие похожим на обычное квадратное неравенство.

3 Решение для новой переменной

После замены находят промежутки для t , а затем возвращаются к x . При этом важно не забыть ограничения исходной задачи и не допустить лишних корней.

4 Проверка ответа

В конце проверяют, подходят ли найденные промежутки по смыслу задачи. Особенно внимательно смотрят на дроби, корни и области, где выражение вообще определено.



Парабола и знак квадратного трёхчлена

Направление ветвей

Если коэффициент при x^2 положительный, парабола направлена вверх.
При отрицательном коэффициенте её ветви смотрят вниз, и знаки на промежутках меняются.

Дискриминант и корни

Когда дискриминант положителен, график пересекает ось Ox в двух точках.
При нуле он касается оси один раз, а при отрицательном значении не пересекает её.

Где выражение положительно

По графику видно, на каких промежутках значение трёхчлена больше нуля, а где меньше нуля. Это помогает сразу выбрать нужные интервалы ответа.

Почему график полезен

Изображение параболы делает решение наглядным: легче увидеть корни, вершину и расположение нужных промежутков, чем только работать с формулами.



Алгоритм решения через замену переменной

Схема показывает переход от исходного выражения к квадратному неравенству относительно новой переменной.



Случаи, которые зависят от дискриминанта и знака коэффициента а

Таблица помогает быстро увидеть, где квадратный трёхчлен положителен, а где отрицателен.

Знак выражения определяется направлением ветвей и числом корней; это позволяет выбирать нужные промежутки без лишних вычислений.

Случай	Корни	Знак
$a > 0, D > 0$	2	$+/-/+$
$a > 0, D = 0$	1	≥ 0
$a < 0, D < 0$	0	$-$

Свойства квадратного трёхчлена

Промежутки знаков на числовой прямой

Знаки на промежутках удобно отмечать после нахождения корней и выбора направления ветвей параболы.

Схема сразу показывает, где брать ответ для строгих и нестрогих неравенств.

Схема знаков квадратного трёхчлена



2

шага хватает, чтобы заменить x^2 на t и решить задачу.

При чётных степенях замена переменной делает неравенство заметно проще и помогает избежать лишних вычислений.

Пример из темы «неравенства, сводящиеся к квадратным»

Разложение на множители как удобный способ

1 Поиск корней

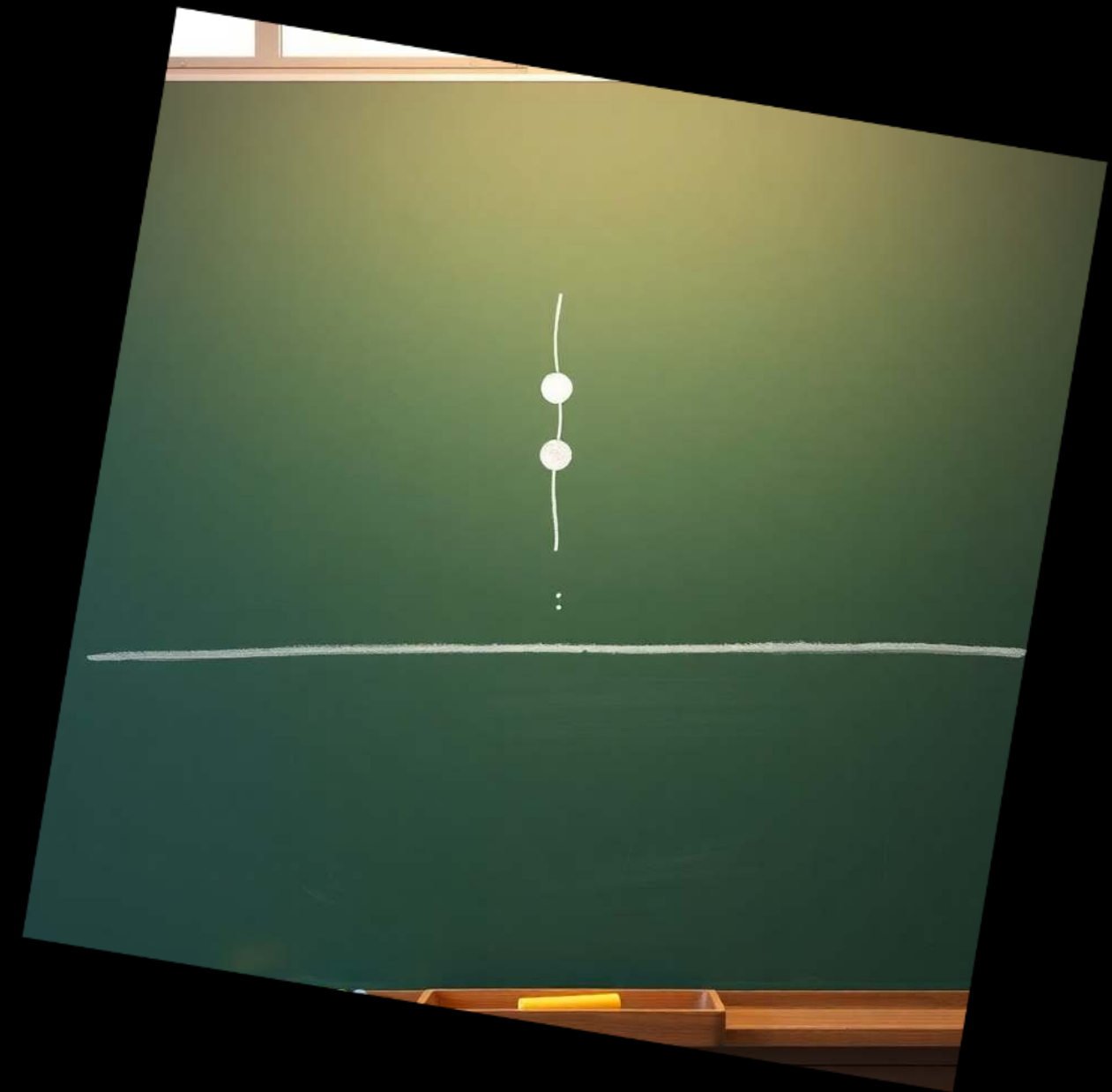
Если выражение раскладывается на линейные множители, нули каждого множителя сразу дают границы промежутков. Это особенно удобно, когда корни видны без дополнительных формул.

2 Знак по промежуткам

После нахождения корней проверяют знак на каждом промежутке числовой прямой. Для произведений это часто быстрее, чем полный расчёт дискриминанта и вершины параболы.

3 Когда способ особенно полезен

Метод хорошо работает, если коэффициенты целые и разложение получается простым. Тогда решение становится короче, а ответ легче проверить по правилам интервалов.

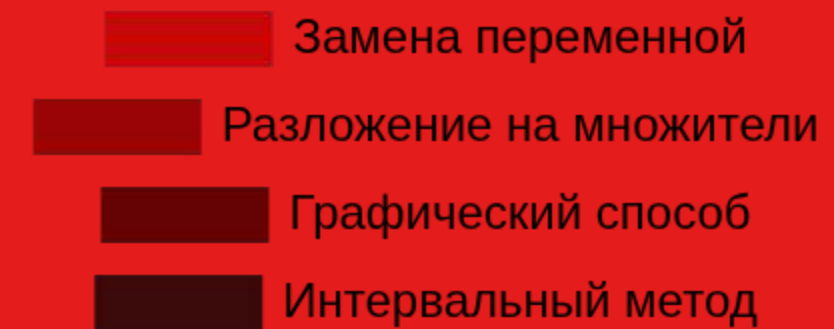


Сравнение способов решения

Выбор метода зависит от вида выражения:
иногда важнее скорость, иногда — наглядность
и удобство проверки.

Все четыре способа полезны, но каждый лучше
подходит для своей структуры неравенства.

Обобщение по теме



Типичные ошибки восьмиклассников



Потеряли ОДЗ — потеряли ответ

Ученики часто находят корни, но забывают проверить, где выражение вообще имеет смысл. Особенно это заметно в задачах с дробями и корнями: в ответ попадают лишние значения, которые сразу нужно исключить по условиям задачи.



Путают строгие и нестрогие знаки

Ещё одна типичная ошибка — неверно записать границы промежутков. При $>$ и $<$ точки-корни не включаются, а при $\geq$ и $\leq$ могут входить в ответ. Из-за одной скобки итог становится неправильным.



Неправильный промежуток между корнями

Часто школьники выбирают промежуток наугад, не учитывая знак коэффициента a . При $a < 0$ знак выражения между корнями меняется, и именно это приводит к ошибке на числовой прямой и в записи ответа.

Пошаговый разбор примера $x^4 - 5x^2 + 4 > 0$

Таблица показывает, как исходное неравенство последовательно сводится к квадратному виду, решается относительно новой переменной и возвращается к переменной x с учётом ограничения $t \geq 0$.

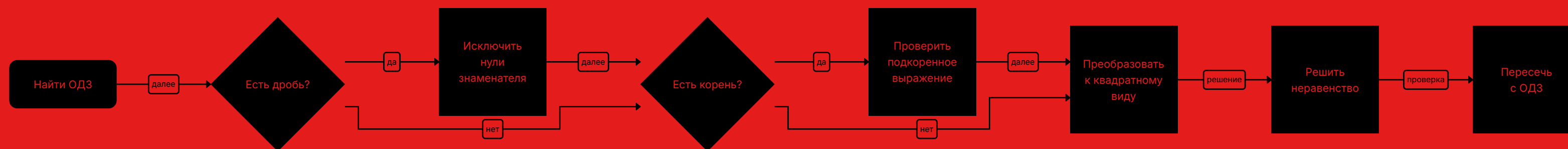
Новая переменная делает выражение проще, а ограничение $t \geq 0$ не позволяет принять недопустимые значения. После обратной замены получается ответ в нескольких промежутках.

Разбор стандартного учебного примера по теме сводимых неравенств

Шаг	Действие	Результат
1	Замена	$t = x^2$
2	Квадратное	$t^2 - 5t + 4 > 0$
3	Разложение	$(t - 1)(t - 4) > 0$
4	Ответ для t	$t < 1$ или $t > 4$

Как учитывать область допустимых значений

Последовательность действий при решении неравенств с дробями, корнями и знаменателем



Простые задачи с параметром

Параметр меняет ответ

Буквы a , k или m обозначают число, которое можно менять. Если параметр изменяется, меняются корни, знак коэффициента при x^2 и вид промежутков решения, поэтому ответ нужно исследовать заново.

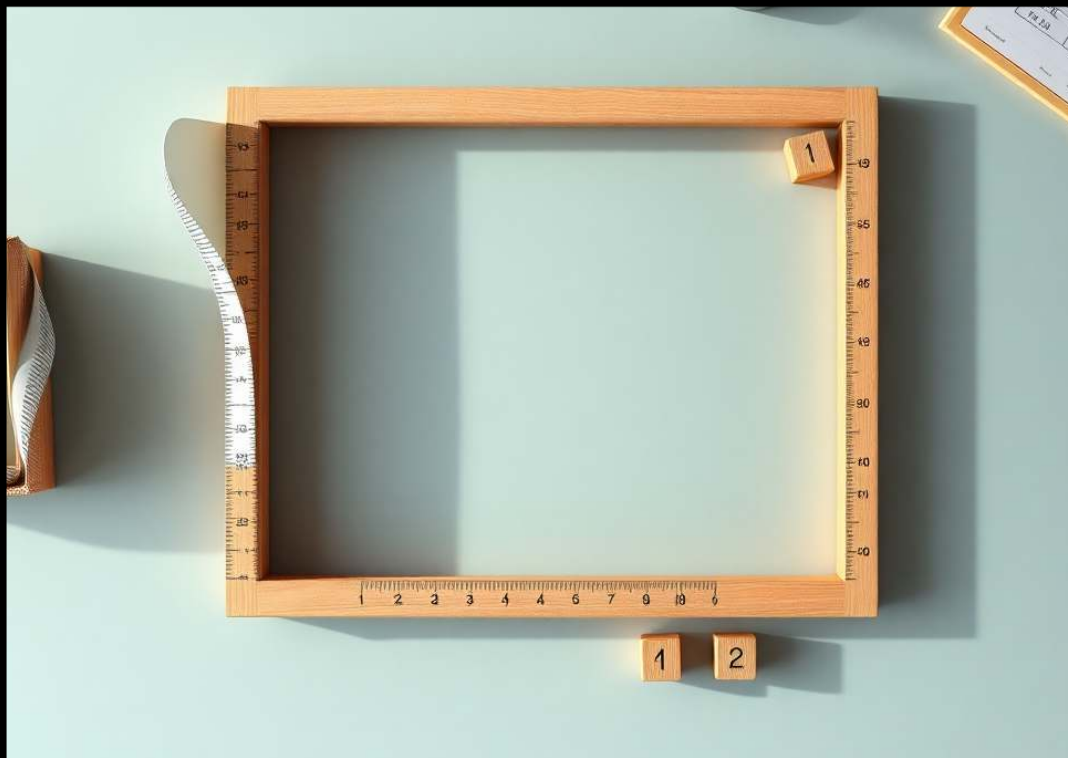
Смотрим дискриминант

В простых задачах удобно сначала найти дискриминант. Он показывает, будет ли один корень, два корня или их не будет, а значит помогает понять, как поведёт себя неравенство при разных значениях параметра.

Учимся сравнивать случаи

Такие задания тренируют аккуратность: нужно отдельно рассматривать разные значения параметра и не смешивать их в один ответ. Это полезно для понимания, как одно условие влияет на всю задачу.

Связь с реальными задачами



Площадь прямоугольника

Если периметр прямоугольника известен, его стороны выражают через одну переменную. Тогда площадь записывается формулой с квадратным выражением, и можно понять, при каких значениях стороны площадь больше или меньше нужного числа.



Скорость, время и сравнение величин

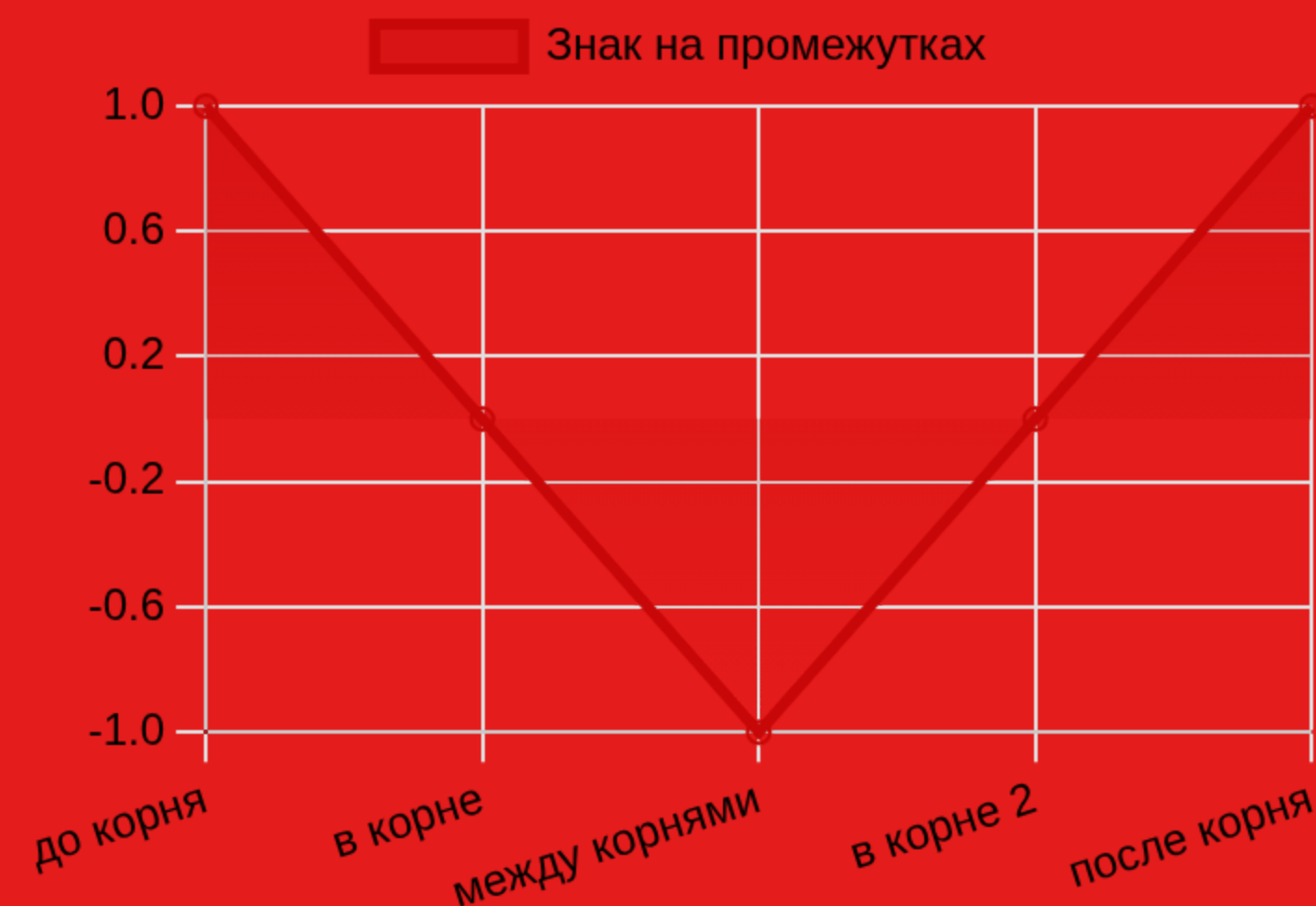
В задачах на движение или сравнение двух величин после преобразований часто появляется выражение с квадратом. Оно помогает выяснить, когда одно значение становится больше другого и какие промежутки подходят по условию.

Как меняется знак при переходе через корни

На схеме удобно видеть, где знак меняется, а где остаётся прежним. Это особенно помогает при проверке решений методом интервалов и при сравнении с графиком функции.

Через простой корень знак меняется, через кратный — нет. Значит, перед записью ответа важно понимать кратность корня и не делать лишний переход между знаками.

Учебное правило знаков для многочленов и произведений



Памятка по записи ответа

Таблица напоминает, как оформлять промежутки решения, чтобы ответ был записан без ошибок и с учётом всех ограничений.

Скобки показывают, входят ли границы в ответ, а операции объединения и пересечения помогают собрать окончательное множество решений из нескольких условий.

Ситуация	Запись
Строгое неравенство	$()$
Нестрогое неравенство	$[]$
Объединение	$\cup$
Пересечение	$\cap$

Проверка решения и контроль результата

Берём контрольную точку

Для каждого промежутка выбирают удобное число и подставляют его в исходное выражение. Если знак совпадает с ожидаемым, промежуток выбран верно; если нет, ответ нужно пересмотреть.

Проверяем границы

Особое внимание требуется корням и точкам, где выражение обращается в ноль. Именно там чаще всего теряются решения или появляются лишние записи из-за неправильной скобки.

Сверяем с ОДЗ

Если в задаче есть дробь или корень, найденные промежутки обязательно сравнивают с областью допустимых значений. Любая точка вне ОДЗ должна быть исключена, даже если подходит по знаку.

Сопоставляем с графиком

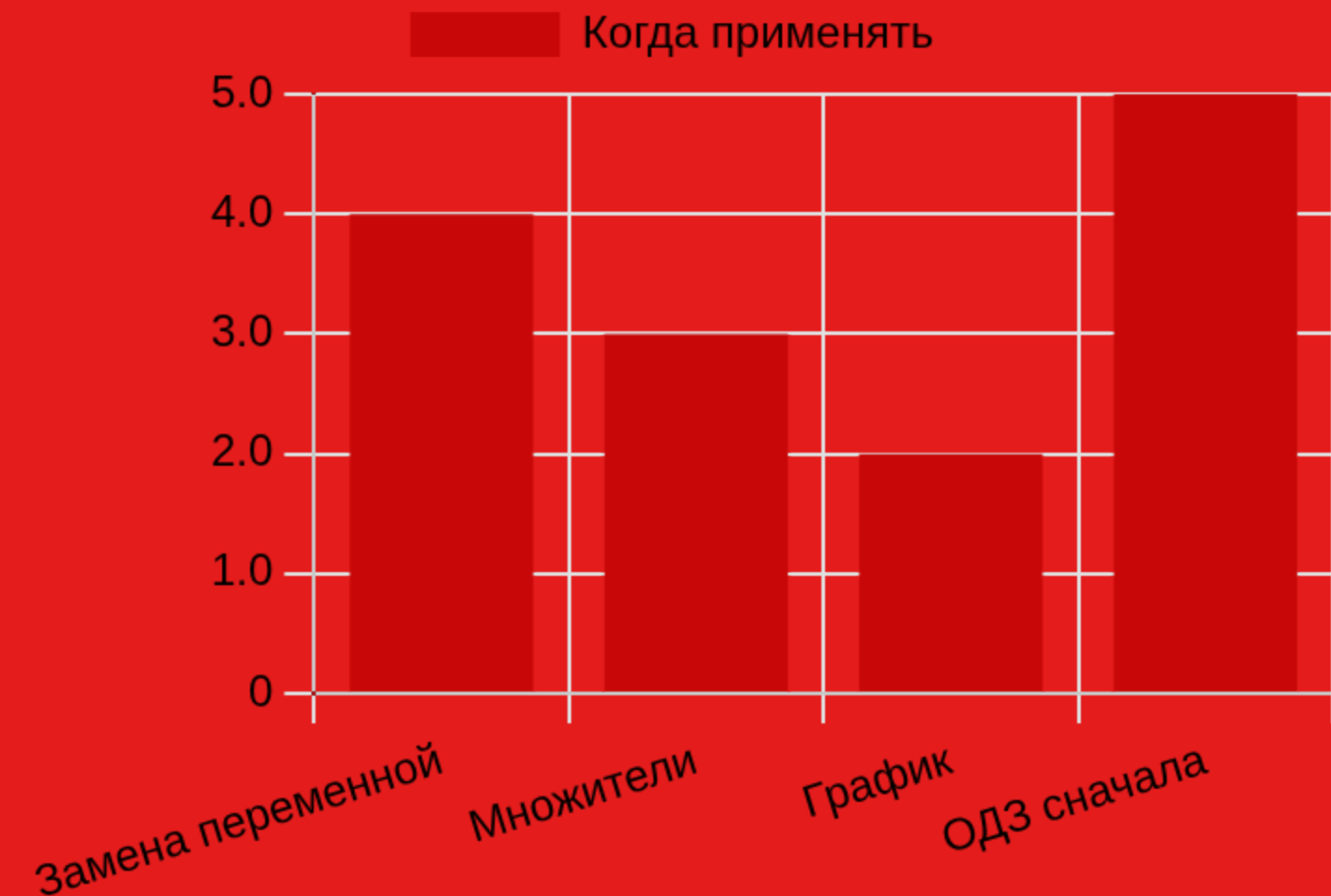
Когда есть возможность, полезно посмотреть на график или схему знаков. Визуальная проверка быстро показывает, не перепутаны ли промежутки и не нарушена ли логика решения.

Итоговая схема выбора способа решения

Разные методы удобны в разных ситуациях.
Главное — сначала понять структуру выражения, а уже потом выбирать короткий и надёжный путь решения.

Если есть знаменатель, сначала нужна ОДЗ;
если встречаются x^2 или x^4 , полезна замена;
если выражение раскладывается, удобен метод интервалов.

Обобщение способов решения сводимых неравенств



Главное, что нужно запомнить

Неравенства, сводящиеся к квадратным, удобно решать разными способами: через замену переменной, разложение на множители, график и интервалы. Успех зависит от аккуратных преобразований, учёта ОДЗ и правильной записи ответа.