

A circular metal frame and a triangular metal frame are positioned on a green surface. The circular frame is on the left, and the triangular frame is on the right. Both frames are made of thin metal rods with small spherical joints at the vertices. The background is a blurred indoor setting with wooden shelves.

Вписанные и описанные четырёхугольники

Окружность открывает удобные способы изучать четырёхугольники.

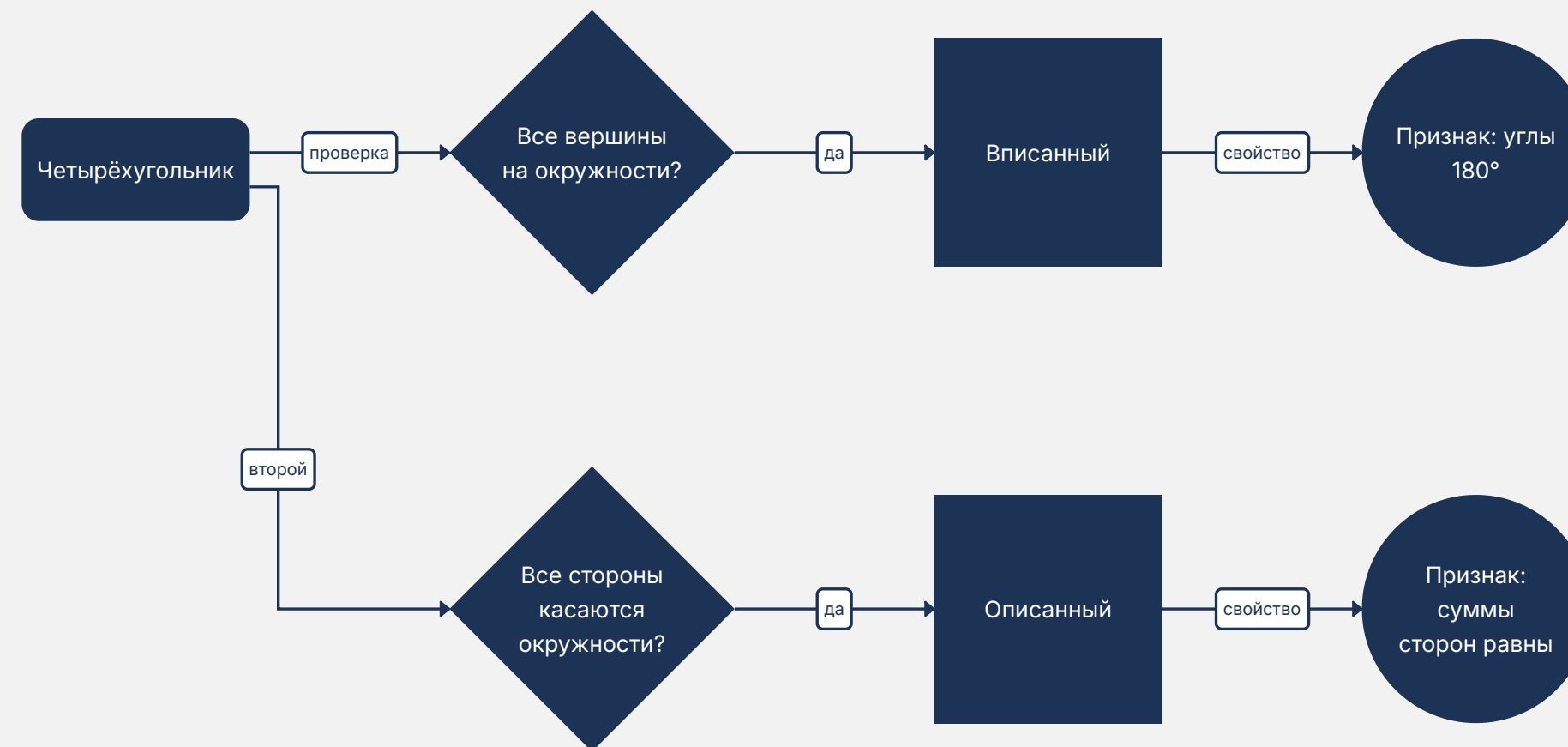
Почему окружность так полезна в четырёхугольниках

С окружностью легко находить углы и стороны, проверять свойства фигур и доказывать нужные утверждения. Эти идеи особенно важны в геометрии 9 класса, где часто встречаются задачи на распознавание и вычисления.



Два случая связи четырёхугольника с окружностью

Схема показывает два основных способа расположения фигуры и окружности, а также главный признак каждого случая.



Определение вписанного четырёхугольника

01

Все вершины на окружности

Вписанным называют четырёхугольник, у которого все вершины лежат на одной окружности. Такая окружность называется описанной около четырёхугольника и помогает изучать его углы и дуги.

03

Удобство для задач

Это определение особенно полезно, когда нужно доказать, что точки лежат на одной окружности, или найти неизвестный угол через уже известные элементы окружности.

02

Связь с дугами

Каждый угол вписанного четырёхугольника опирается на дугу окружности. Поэтому при решении задач можно переходить от углов к дугам и обратно, не теряя точности вычислений.

04

Для чего используют

Вписанные четырёхугольники часто встречаются в упражнениях на доказательство, потому что окружность связывает стороны, углы, хорды и дуги в одну понятную схему.



180°

сумма противоположных углов
именно такова у вписанного
четырёхугольника

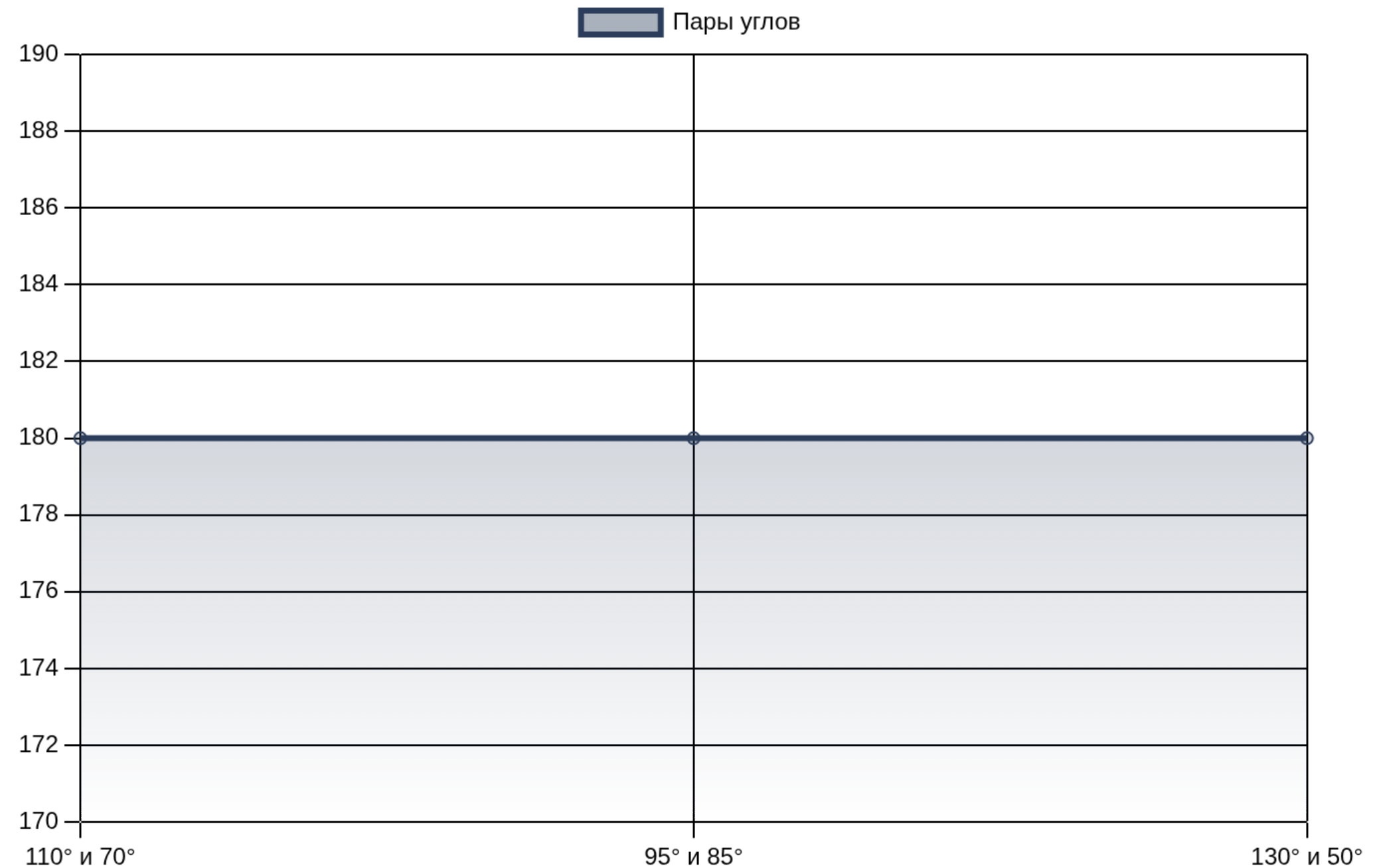
Свойство вписанного четырёхугольника

Это ключевое условие помогает сразу
проверить, можно ли вписать четырёхугольник
в окружность.

Сумма противоположных углов вписанного четырёхугольника

На графике показаны разные пары углов, но результат у них одинаковый: развернутый угол. Это удобно запоминать как проверку на вписанность.

Если противоположные углы дают 180° , четырёхугольник можно считать вписанным.



Связь вписанного угла и дуги окружности

Вписанный угол

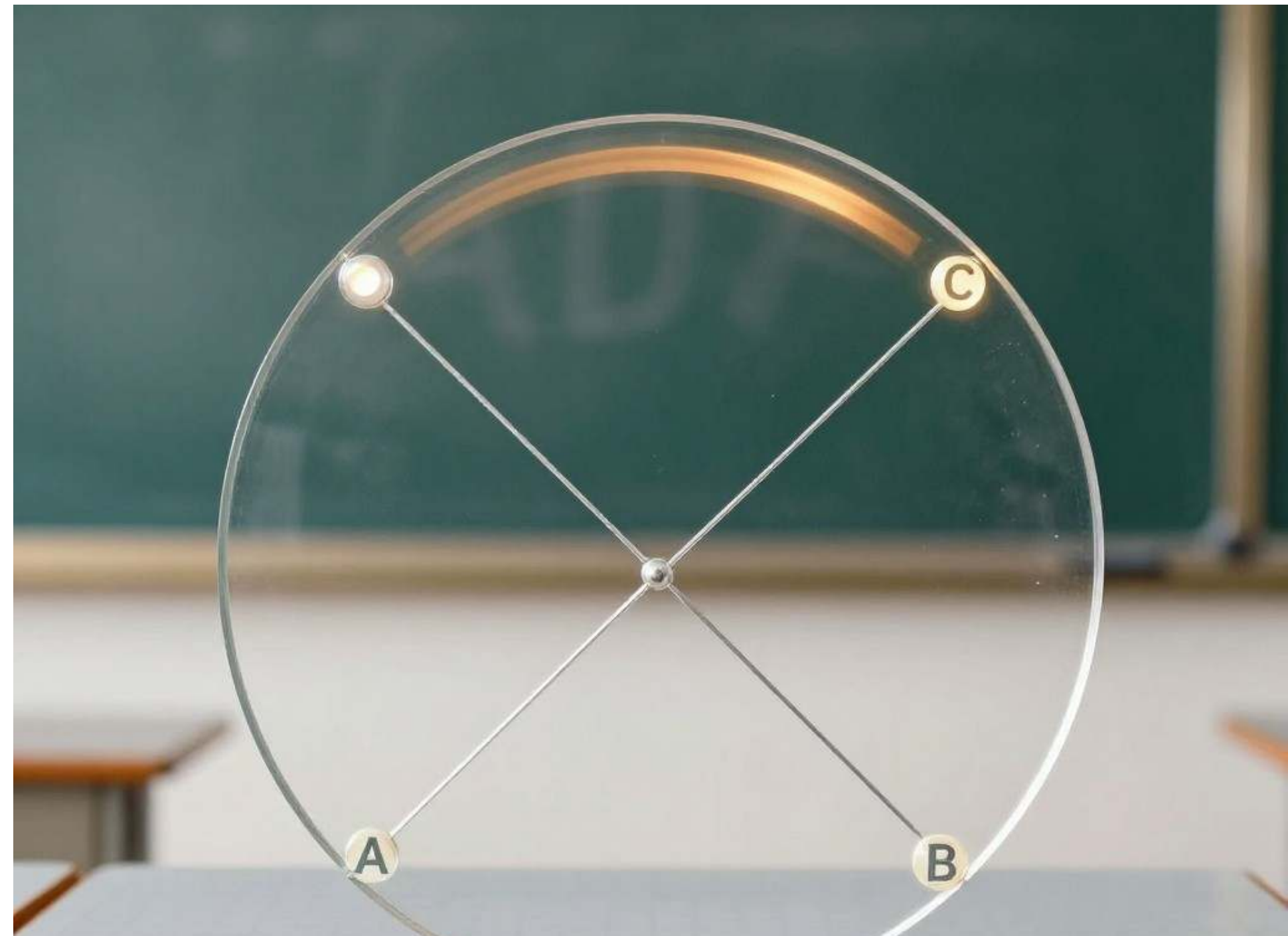
Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается. Чем больше дуга, тем больше угол, поэтому значение угла легко находить по известной дуге.

Полуокружность

Если угол опирается на полуокружность, он всегда равен 90° . Это частый приём в задачах, где нужно быстро заметить прямой угол без дополнительных построений.

Хорды и дуги

Хорды, дуги и вершины четырёхугольника помогают увидеть, какие углы связаны друг с другом. Такое изображение делает решение задач на окружность более наглядным и понятным.



Частные случаи вписанных четырёхугольников

1. Прямоугольник

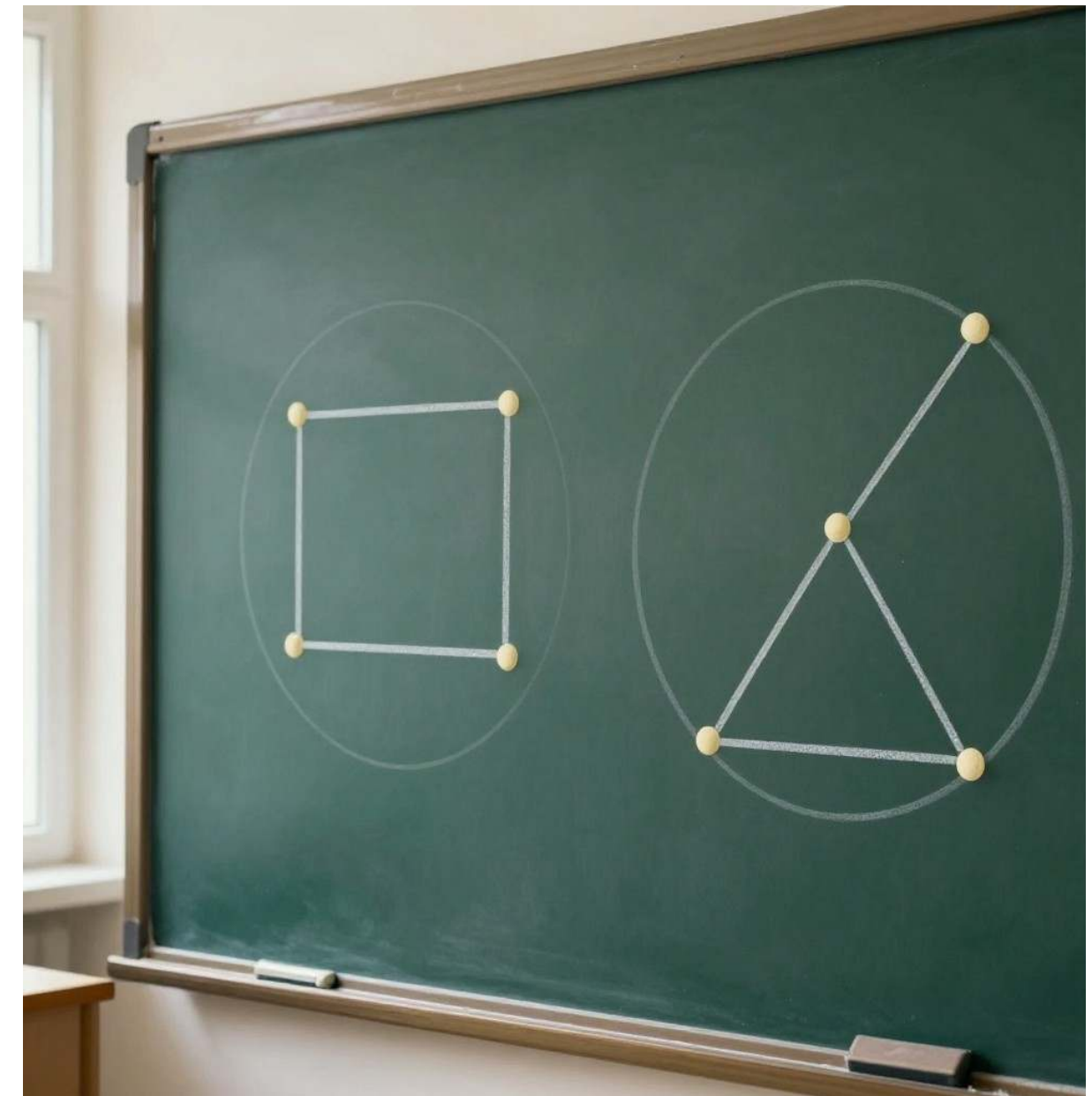
Любой прямоугольник является вписанным четырёхугольником, потому что все его углы прямые. Значит, противоположные углы дают в сумме 180° , и точки вершин лежат на одной окружности.

3. Параллелограмм

У произвольного параллелограмма это свойство не выполняется всегда. Вписанным он становится только тогда, когда является прямоугольником, то есть имеет все углы по 90° .

2. Равнобедренная трапеция

Равнобедренная трапеция тоже может быть вписанной. У неё углы при каждом основании равны, а соседние углы вдоль одной боковой стороны дополняют друг друга до 180° .



Свойства и признаки вписанного четырёхугольника

Краткая таблица помогает быстро увидеть главное и вспомнить нужный признак при решении задач.

Для проверки вписанности чаще всего используют сумму противоположных углов; остальные свойства помогают находить углы и узнавать частные случаи.

Свойство	Формулировка	Пример
Вершины	на окружности	ABCD
Признак	углы 180°	$\sphericalangle A + \sphericalangle C$
Свойство угла	половина дуги	$\sphericalangle A$
Частный случай	прямоугольник	90°

Определение описанного четырёхугольника

01

Окружность внутри

Описанным называют четырёхугольник, вокруг которого можно провести окружность, касающуюся всех его сторон. Такая окружность называется вписанной в четырёхугольник.

03

Биссектрисы углов

В задачах центр часто связан с пересечением биссектрис углов. Это помогает найти положение окружности и понять, почему она касается всех сторон фигуры.

02

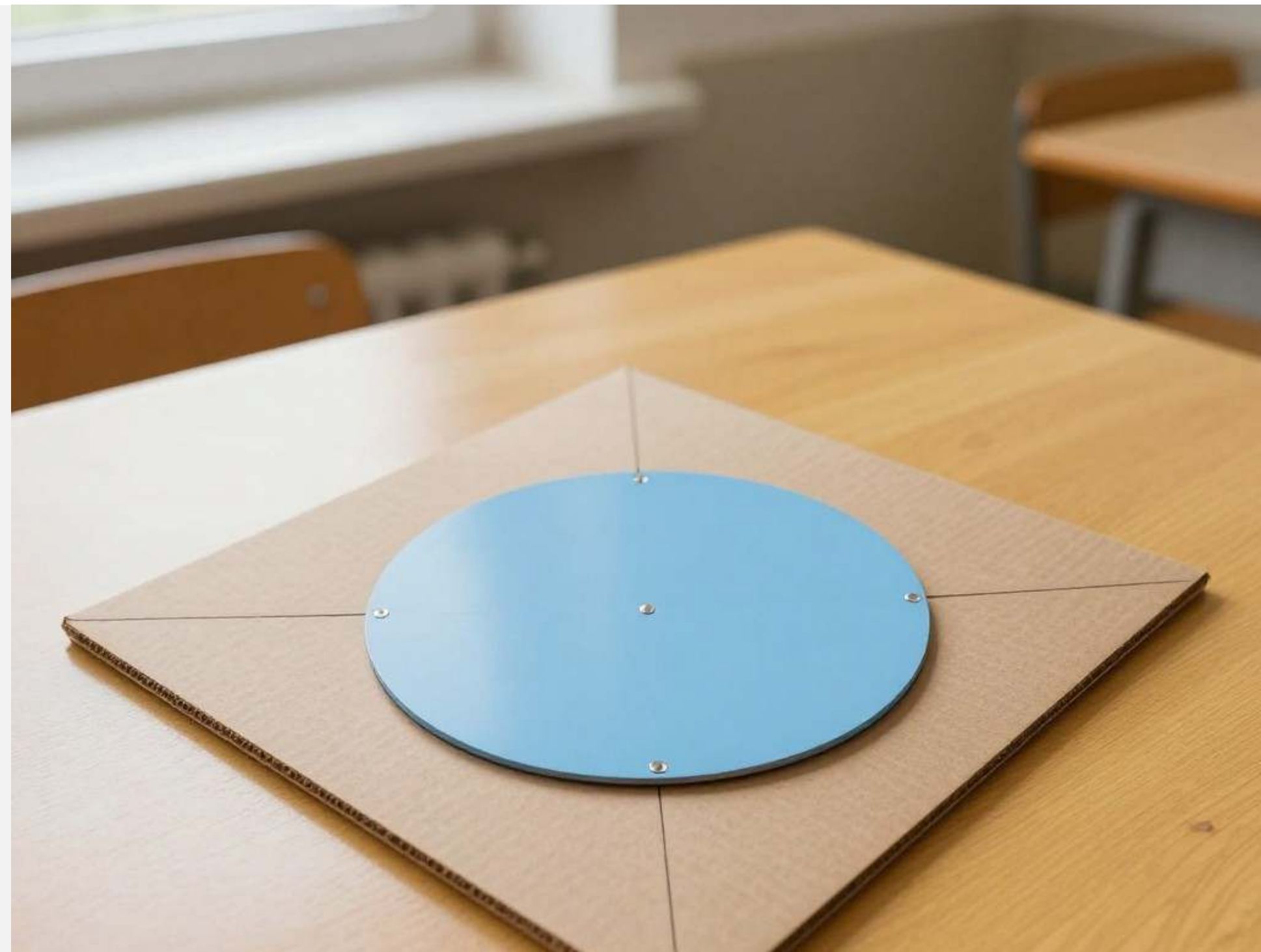
Равные расстояния

Центр этой окружности находится на одинаковом расстоянии от всех сторон. Поэтому он играет роль точки, от которой удобно строить решение в геометрических задачах.

04

Где встречается

Описанные четырёхугольники полезны при вычислении сторон и доказательстве существования окружности. Особенно часто они встречаются в задачах с касательными и точками касания.



Главный признак описанного четырёхугольника

● Равенство сумм

Четырёхугольник можно описать вокруг окружности тогда и только тогда, когда суммы длин его противоположных сторон равны. Это основной проверочный признак, который используют в задачах на распознавание фигуры.

● Запись условия

Для сторон a, b, c, d выполняется равенство $a + c = b + d$.
Если известны три стороны, четвёртую удобно найти из этого уравнения без дополнительных построений.

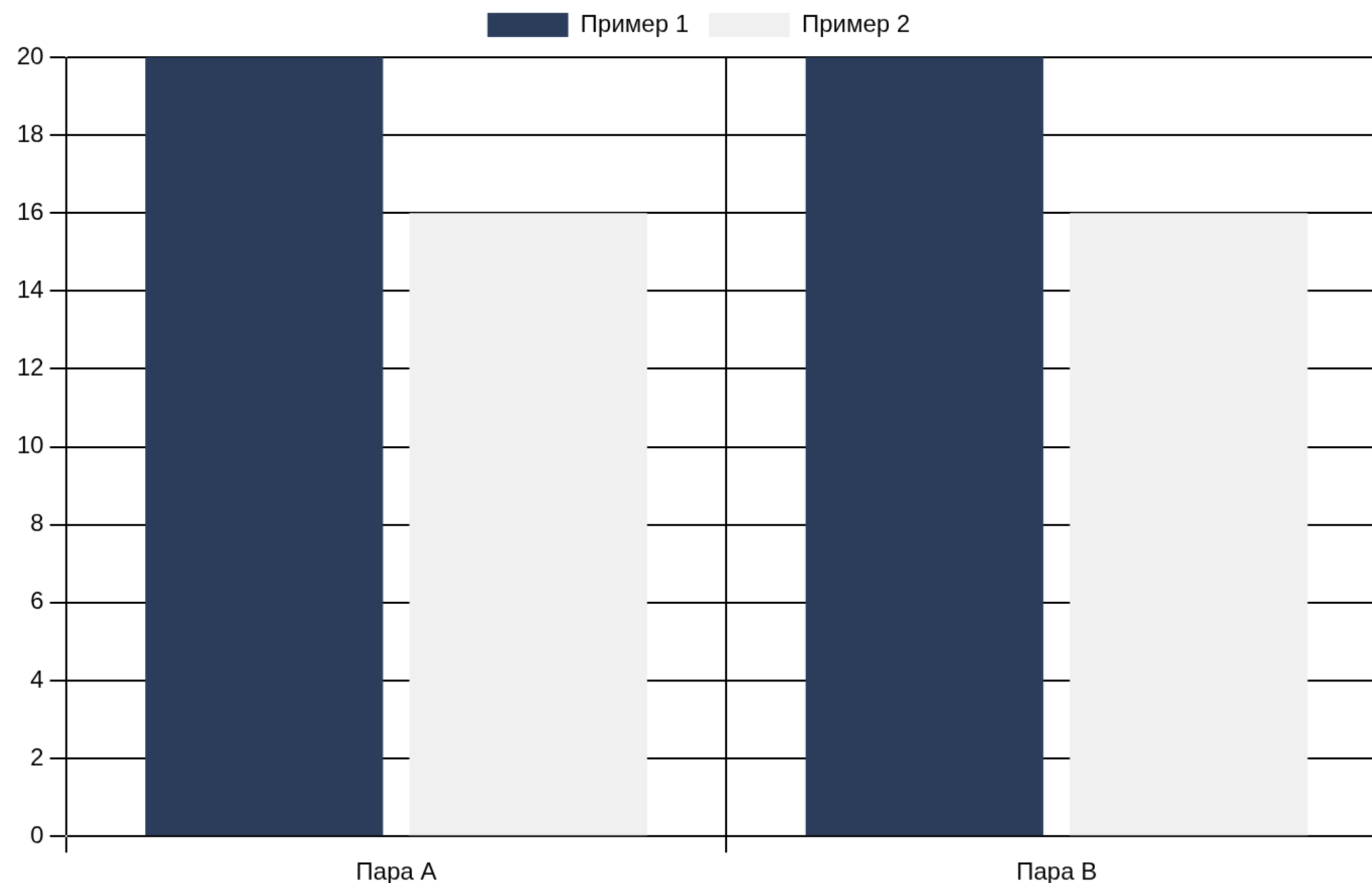
● Практический смысл

Признак особенно полезен, когда нужно доказать существование вписанной окружности или проверить решение. Он позволяет связать стороны фигуры с касаниями окружности и быстро получить точный ответ.

Сравнение сумм противоположных сторон

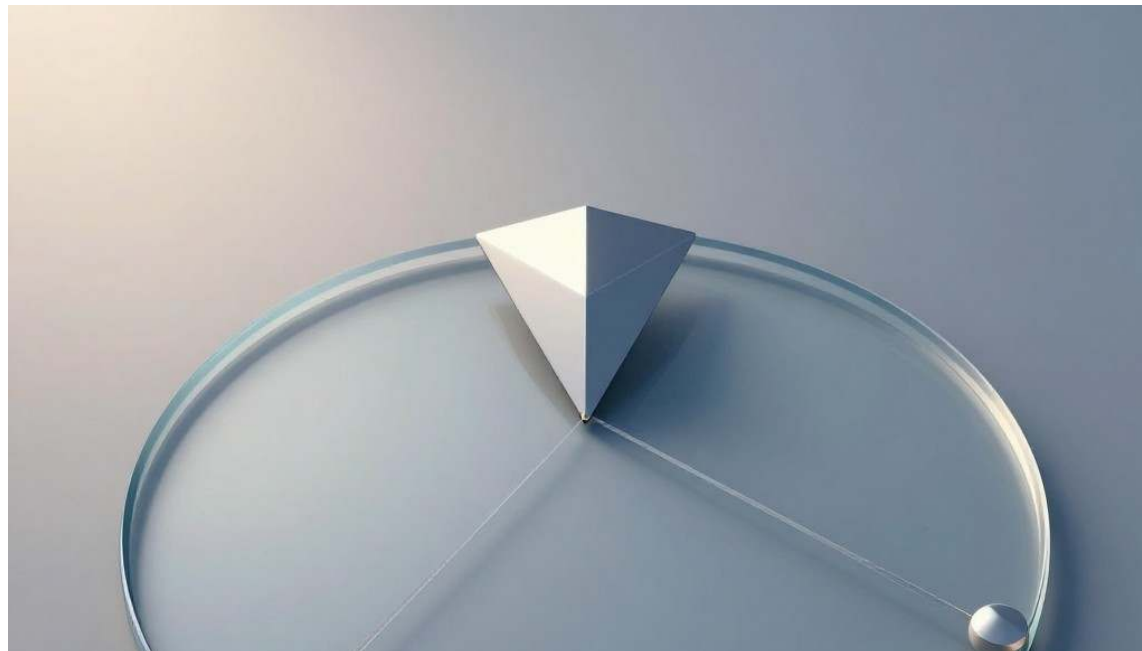
Диаграмма показывает не отдельные стороны, а суммы противоположных пар. Именно это равенство и служит признаком описанного четырёхугольника.

В обоих примерах суммы внутри каждой пары совпадают, поэтому важно сравнивать именно итог каждой пары, а не длины по отдельности.



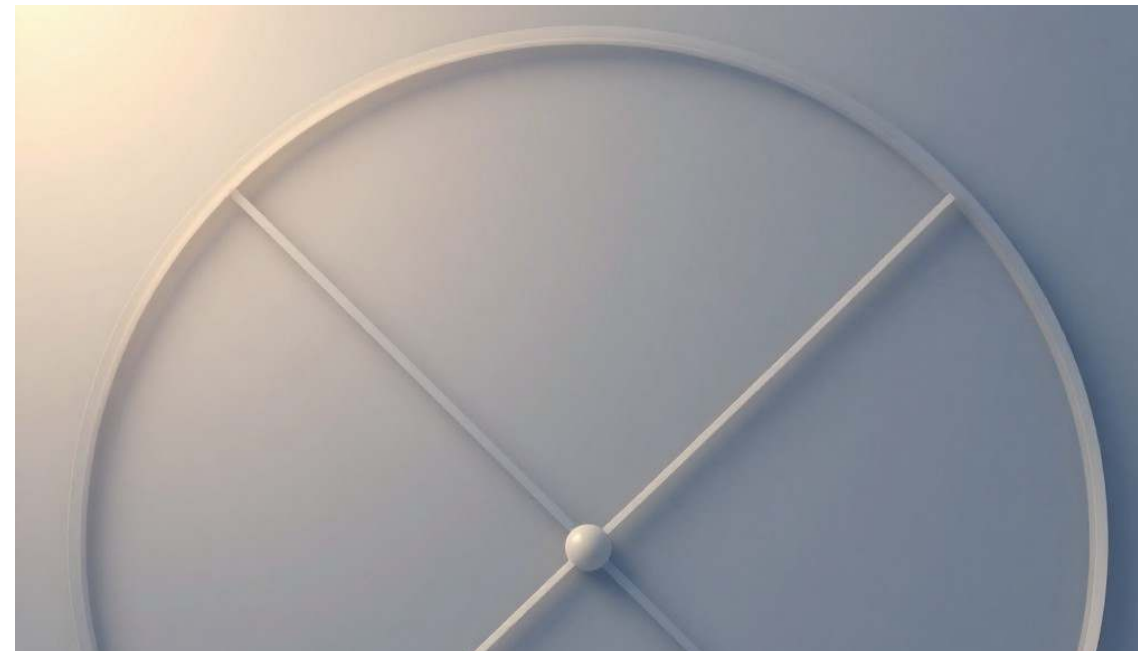
Учебные примеры по теме «Описанные четырёхугольники», иллюстративные значения

Касательные к окружности и равные отрезки



Одна вершина — два равных касания

Из одной точки к окружности можно провести две касательные, и их отрезки всегда равны. Поэтому у вершины описанного четырёхугольника удобно отмечать две одинаковые части до точек касания. Это сразу связывает стороны фигуры с окружностью и помогает искать неизвестные длины.



Точки касания на сторонах

На чертеже точки касания лучше выделять отдельно: тогда видно, какие отрезки принадлежат соседним сторонам. Равенство касательных от одной вершины часто разбивает сторону на две части, которые можно складывать и сравнивать с другими сторонами.



Переход к вычислениям

Если известны длины отрезков до точек касания, стороны четырёхугольника выражаются через их суммы. Такой рисунок делает задачу наглядной: сначала отмечают равные касательные, затем составляют равенство противоположных сторон и находят неизвестную величину.

Проверка, что четырёхугольник описан вокруг окружности

Последовательность проверки строится от сравнения сторон к поиску центра окружности.



Сравнение вписанного и описанного четырёхугольника

Признак	Вписанный	Описанный
Положение окружности	через вершины	касается сторон
Главный критерий	$\sphericalangle A + \sphericalangle C = 180^\circ$	$a + c = b + d$
Что считают	углы	стороны

Таблица помогает увидеть главное различие между двумя случаями связи четырёхугольника и окружности.

Вписанный четырёхугольник удобнее проверять по углам, а описанный — по сторонам и касаниям. Это разные признаки, хотя обе фигуры связаны с одной окружностью.

Как решают задачи на вписанные четырёхугольники



Считают через 180°

Если известен один из противоположных углов, второй сразу находят вычитанием из 180° . Этот приём чаще всего помогает в быстрых вычислениях без дополнительных построений.



Используют дуги

Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается. Поэтому, когда на рисунке указаны дуги окружности, можно быстро восстановить нужные углы четырёхугольника.



Связывают с хордой

Углы, опирающиеся на одну и ту же хорду, равны. Это свойство особенно полезно, когда в условии есть несколько точек на окружности и нужно доказать равенство углов.



Проверяют признак

В решении часто сначала доказывают, что сумма противоположных углов равна 180° , а затем делают вывод о вписанности. Такой порядок удобен при доказательстве свойств фигуры.

Как решают задачи на описанные четырёхугольники

1. Составляют уравнение

Сначала выписывают условие $a + c = b + d$ и подставляют известные длины. Так неизвестная сторона находится обычным арифметическим способом, без сложных построений.

3. Проверяют существование окружности

После нахождения длин сравнивают противоположные стороны и делают вывод, можно ли описать окружность вокруг четырёхугольника. Такой шаг важен в задачах на доказательство.

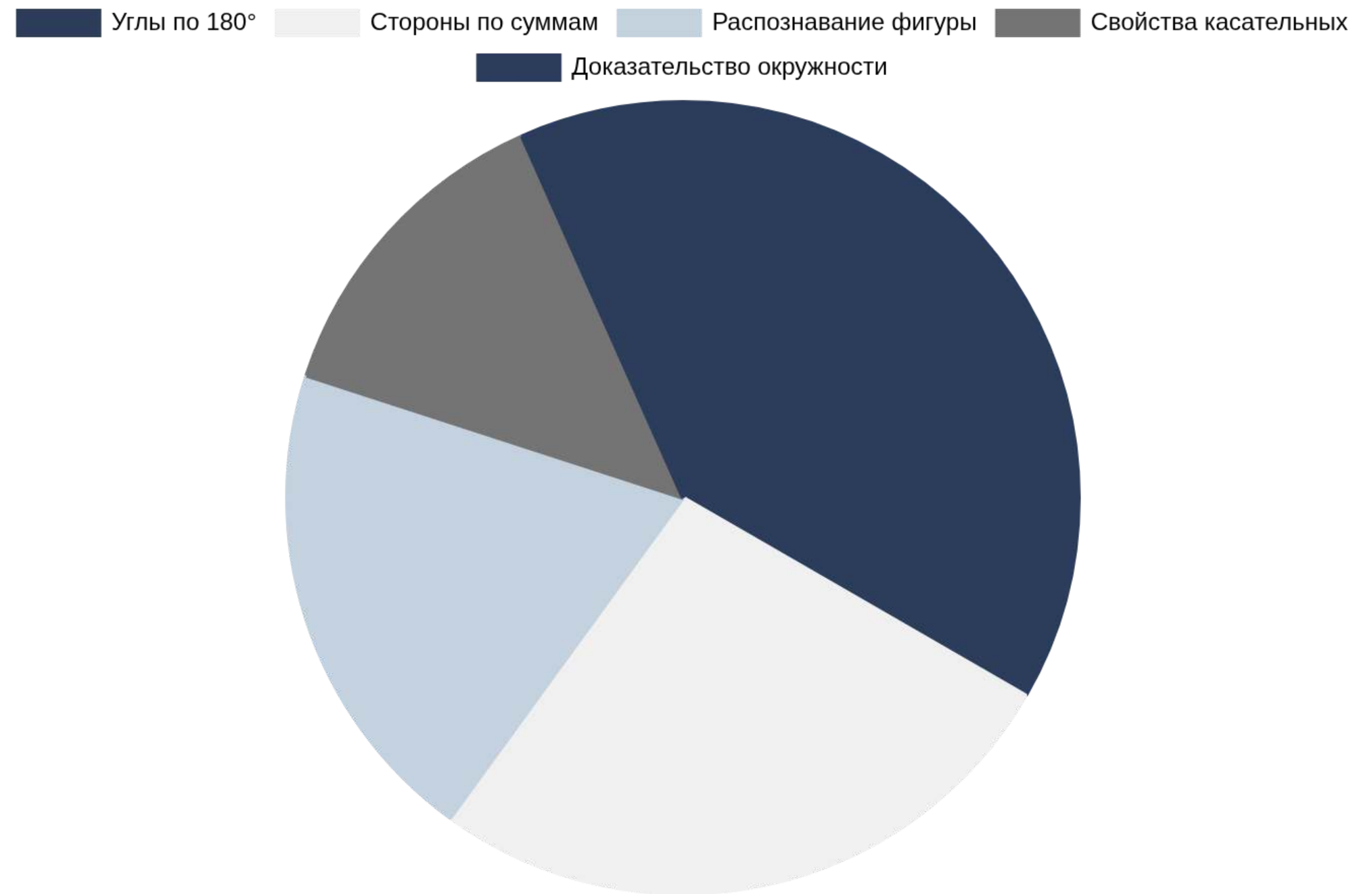
2. Используют касательные

Если на рисунке отмечены точки касания, то от одной вершины к ним идут равные отрезки касательных. Это помогает разложить сторону на части и проверить правильность всех вычислений.

Какие действия чаще всего встречаются в задачах

Диаграмма отражает типичные шаги решения в школьных задачах по теме. Значения условные и служат для наглядного сравнения.

Чаще всего приходится считать углы и проверять признаки фигуры. Реже встречается полное доказательство существования окружности, но именно оно закрепляет понимание темы.



Учебная схема по теме, иллюстративные значения

Типичные ошибки при работе с четырёхугольниками и окружностью

Путаница между двумя фигурами

Иногда вписанный и описанный четырёхугольники смешивают между собой. Чтобы не ошибиться, нужно помнить: в первом случае вершины лежат на окружности, во втором — окружность касается сторон.

Слабый признак

Нельзя считать, что одинаковые противоположные стороны сами по себе доказывают описанность. Главным остаётся равенство сумм противоположных сторон, а не равенство отдельных отрезков.

Неверный выбор свойства

Для вписанного четырёхугольника проверяют сумму противоположных углов, а для описанного — сумму противоположных сторон и касательные. Если выбрать не тот признак, решение быстро становится неверным.

Что важно запомнить

Вписанные и описанные четырёхугольники различаются по положению окружности и по главным признакам. Если помнить связи углов, сторон и касательных, многие задачи по геометрии становятся гораздо проще.