

Квадратные уравнения в алгебре 9 класса: основные идеи и способы решения

Квадратные уравнения: формулы,
графики, корни.



Зачем изучать квадратные уравнения

Квадратные уравнения помогают находить неизвестные в задачах на движение, площадь и графики функций. Эта тема учит выбирать удобный способ решения и готовит к более сложным алгебраическим задачам.



Что называется квадратным уравнением

Общий вид

01 Квадратным называют уравнение, в котором переменная входит во вторую степень и нет степеней выше второй. В общем виде оно записывается как $ax^2 + bx + c = 0$.

Полное и неполное

02 Если в записи есть все три слагаемых, уравнение считают полным. Если отсутствует либо член с x , либо свободный член, получается неполное квадратное уравнение с более простым решением.

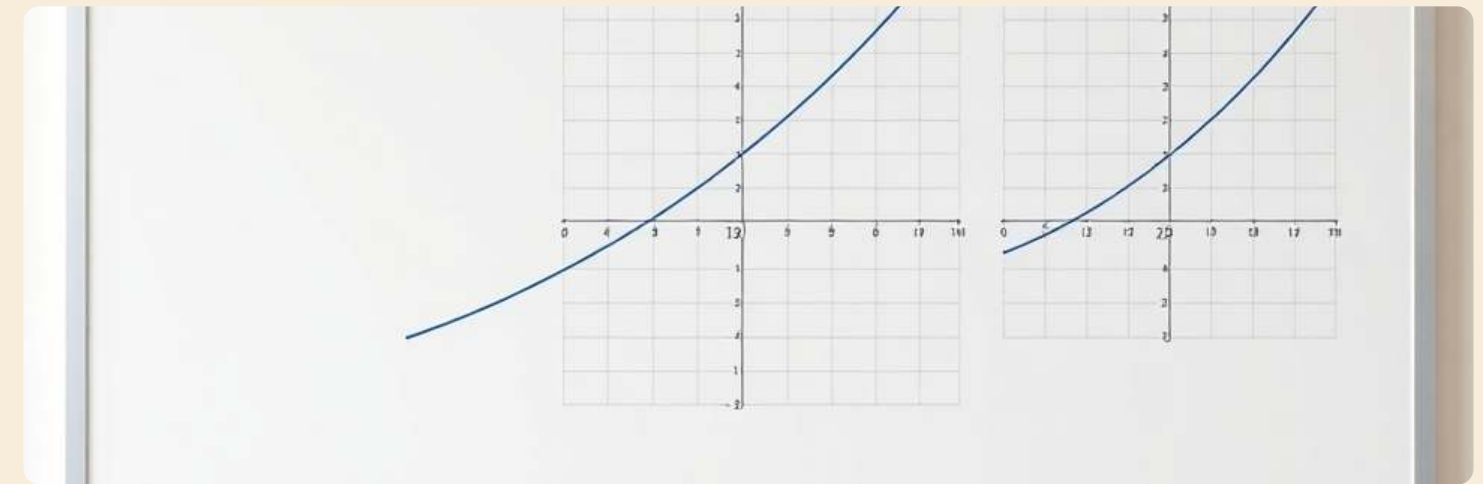
Роль коэффициента a

03 Коэффициент a не должен равняться нулю, иначе уравнение перестаёт быть квадратным. Именно наличие члена ax^2 делает возможным применение дискриминанта, формулы корней и других методов.

График параболы и число корней

Две точки пересечения

Если парабола пересекает ось Ox в двух местах, уравнение имеет два действительных корня. Каждый корень соответствует одной точке пересечения графика с осью.



Касание оси

Когда парабола только касается оси Ox , она имеет один действительный корень. В этом случае оба найденных значения совпадают и описывают одну точку.

Нет пересечений

Если график не пересекает ось Ox , действительных корней нет. Такое положение удобно сразу увидеть на рисунке, не выполняя вычисления до конца.

Неполные квадратные уравнения и их решение

1

Вид $ax^2 + c = 0$

Сначала выделяют x^2 и переносят свободный член. Затем извлекают квадратный корень, учитывая знак выражения под корнем: при отрицательном значении действительных решений не будет.

2

Вид $ax^2 + bx = 0$

Здесь удобно вынести x за скобку: $x(ax + b) = 0$. После этого применяют правило нуля произведения и получают два возможных значения корня.

3

Проверка результата

Для неполных уравнений полезно сразу подставить найденные значения в исходную запись. Это помогает убедиться, что корни не потеряны и не появились лишние ответы.

Сравнение основных видов квадратных уравнений

Таблица показывает, как вид уравнения влияет на выбор способа решения и число корней.

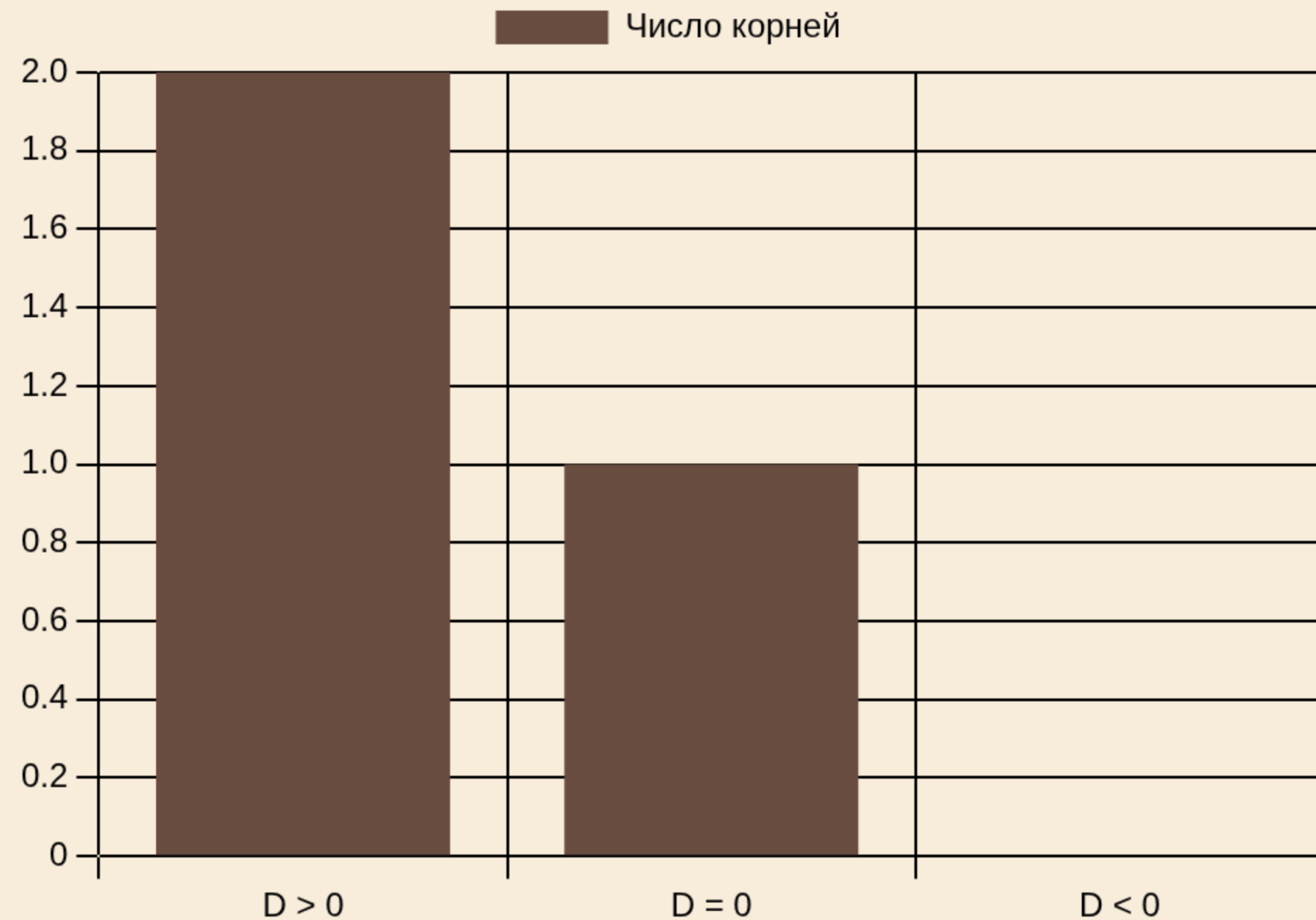
По таблице видно, что сначала важно определить тип уравнения, а уже потом выбирать удобный способ решения.

Вид	Способ	Корни
Полное	D или множители	2,1,0
$ax^2 + c = 0$	Корень	0,1,2
$ax^2 + bx = 0$	Вынесение x	2 или 1

Как меняется число корней в зависимости от дискриминанта

Дискриминант быстро показывает, сколько действительных решений нужно искать, не раскрывая все выражение до конца.

Знак дискриминанта полностью определяет число действительных корней квадратного уравнения.



Формула дискриминанта и формула корней

Найти D

01

Для уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ сначала вычисляют дискриминант по формуле $D = b^2 - 4ac$. Этот шаг помогает заранее определить, сколько корней можно ожидать.

Подставить в формулу

02

Если дискриминант неотрицателен, используют формулу $x = (-b \pm \sqrt{D}) / 2a$. Она даёт два значения, когда D положителен, и одно совпадающее значение при $D = 0$.

Особый случай

03

Когда $D = 0$, квадратный корень из нуля равен нулю, поэтому оба ответа совпадают. Тогда корень записывают одним числом $x = -b / 2a$.

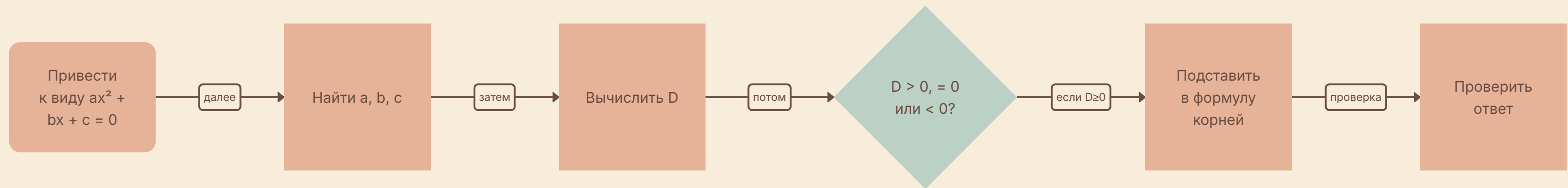
Границы применения

04

Формулы работают для любых полных квадратных уравнений, если коэффициент a не равен нулю. Перед вычислениями важно аккуратно определить знаки всех коэффициентов.

Алгоритм решения квадратного уравнения

Последовательность шагов для поиска корней и проверки ответа



Разложение на множители как способ решения



Когда скобки помогают быстрее

Некоторые уравнения проще решать не через дискриминант, а через разложение на множители. Если левая часть превращается в произведение двух скобок, достаточно найти, при каких значениях x хотя бы один множитель равен нулю.



Переход от выражения к ответу

Например, в записи $(x - 3)(x + 5) = 0$ каждый множитель рассматривают отдельно. Отсюда сразу получают $x = 3$ и $x = -5$, а затем проверяют, действительно ли оба значения подходят исходному уравнению.

Теорема Виета для приведённых квадратных уравнений

1

Сумма корней

Для уравнения вида $x^2 + px + q = 0$ сумма корней равна $-p$. Это удобно, когда корни уже найдены: можно быстро проверить, соответствует ли ответ условию и знакам коэффициентов.

2

Произведение корней

Произведение корней равно q , поэтому по нему легко оценить, могли ли получиться именно такие числа. Если один корень найден неверно, это сразу заметно при проверке произведения.

3

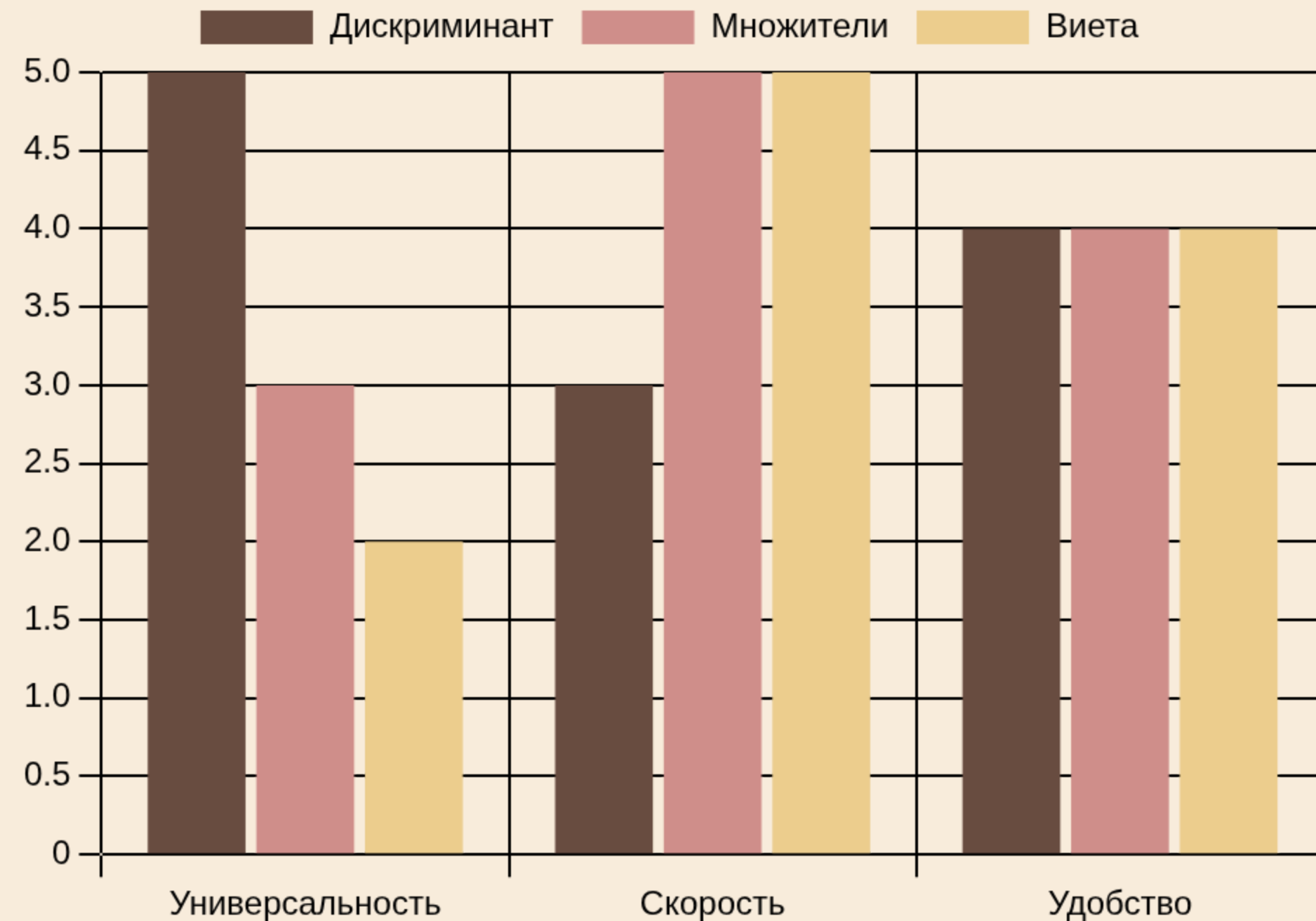
Быстрый подбор

Теорема Виета особенно полезна, когда корни — целые числа. Тогда можно подобрать пары чисел без вычисления дискриминанта и быстрее получить ответ в простых примерах.

Сравнение способов решения квадратного уравнения

Оценки показывают, что разные методы лучше подходят для разных типов заданий. Выбор способа зависит от вида уравнения и того, насколько быстро нужно получить ответ.

Дискриминант выигрывает по универсальности, а разложение на множители и Виета — по скорости в простых случаях.



Сравнительная оценка учебных свойств методов решения; без эмпирических данных

Типичные ошибки при решении квадратных уравнений

Путают коэффициенты

Часто ученики неверно определяют a , b и c , особенно после преобразования записи. Из-за этого подставляют числа не в ту формулу и получают неправильный дискриминант или корни.

Теряют знак минус

Распространённая ошибка — пропустить знак минус в формуле корней или в вычислении выражения $-b$. Даже одна такая неточность полностью меняет ответ, поэтому запись нужно проверять внимательно.

Ошибаются в дискриминанте

При вычислении $D = b^2 - 4ac$ нередко забывают скобки или неверно умножают числа. Тогда выбирается неправильный случай: два корня, один корень или отсутствие действительных решений.

Не делают проверку

После нахождения корней важно подставить их в исходное уравнение. Без проверки легко оставить лишний ответ, который формально появился в вычислениях, но не подходит по смыслу задачи.

Примеры уравнений и подходящий способ решения

Уравнение	Способ	Корни
$x^2 - 16 = 0$	Корень	2; ± 4
$x^2 + 7x = 0$	х за скобку	2; 0 и -7
$x^2 - 5x + 6 = 0$	Множители	2; 2 и 3
$2x^2 + 3x - 2 = 0$	Дискриминант	2; $D > 0$

В таблице показано, как вид уравнения помогает выбрать самый удобный способ решения и сразу понять, сколько действительных корней получится.

Неполные уравнения часто решаются быстрее простыми преобразованиями, а полные — через множители или дискриминант в зависимости от структуры.

Квадратные уравнения в текстовых задачах



Площадь и размеры

Если известна площадь прямоугольника и одна из сторон выражена через неизвестную, получается уравнение второй степени. Так находят длину стороны по условию задачи.



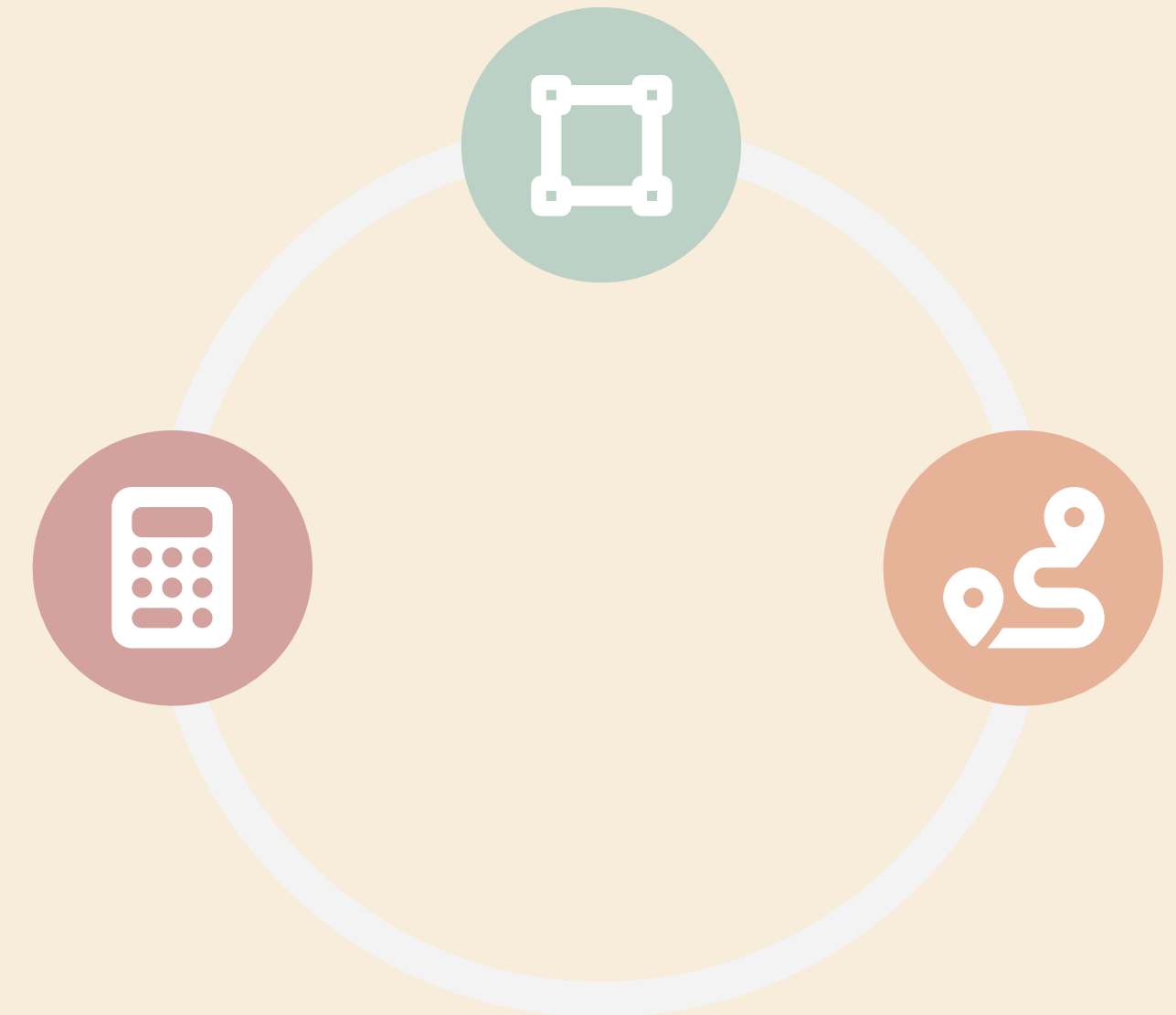
Движение и время

В задачах на движение квадратное уравнение возникает, когда нужно учесть сразу расстояние, скорость и время. Тогда неизвестная входит в несколько частей условия одновременно.



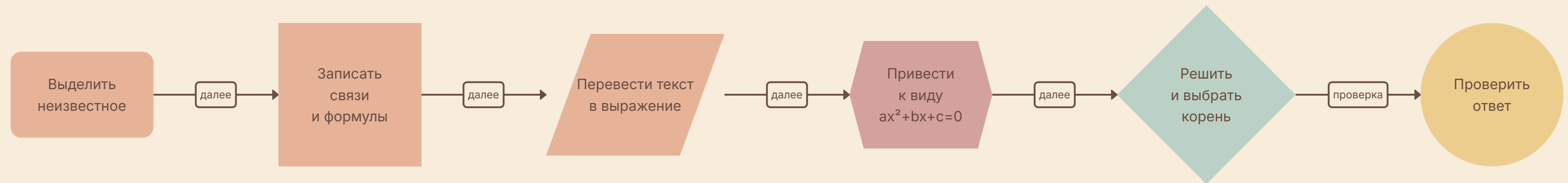
Алгебраическая модель

Сначала текст переводят в формулы, а затем сводят выражение к стандартному виду. После решения выбирают только тот корень, который имеет смысл в реальной ситуации.



Как составить квадратное уравнение по условию задачи

Последовательность показывает путь от текста задачи к уравнению, решению и проверке результата.



Графический смысл корней уравнения

Точки пересечения

01

Корни квадратного уравнения — это значения x , при которых график $y = ax^2 + bx + c$ пересекает ось Ox . Каждая такая точка показывает одно действительное решение.

Положение вершины

02

Если вершина параболы находится выше оси Ox , график не пересекает её, и действительных корней нет. Если вершина ниже, обычно появляются два пересечения и два корня.

Связь с формулами

03

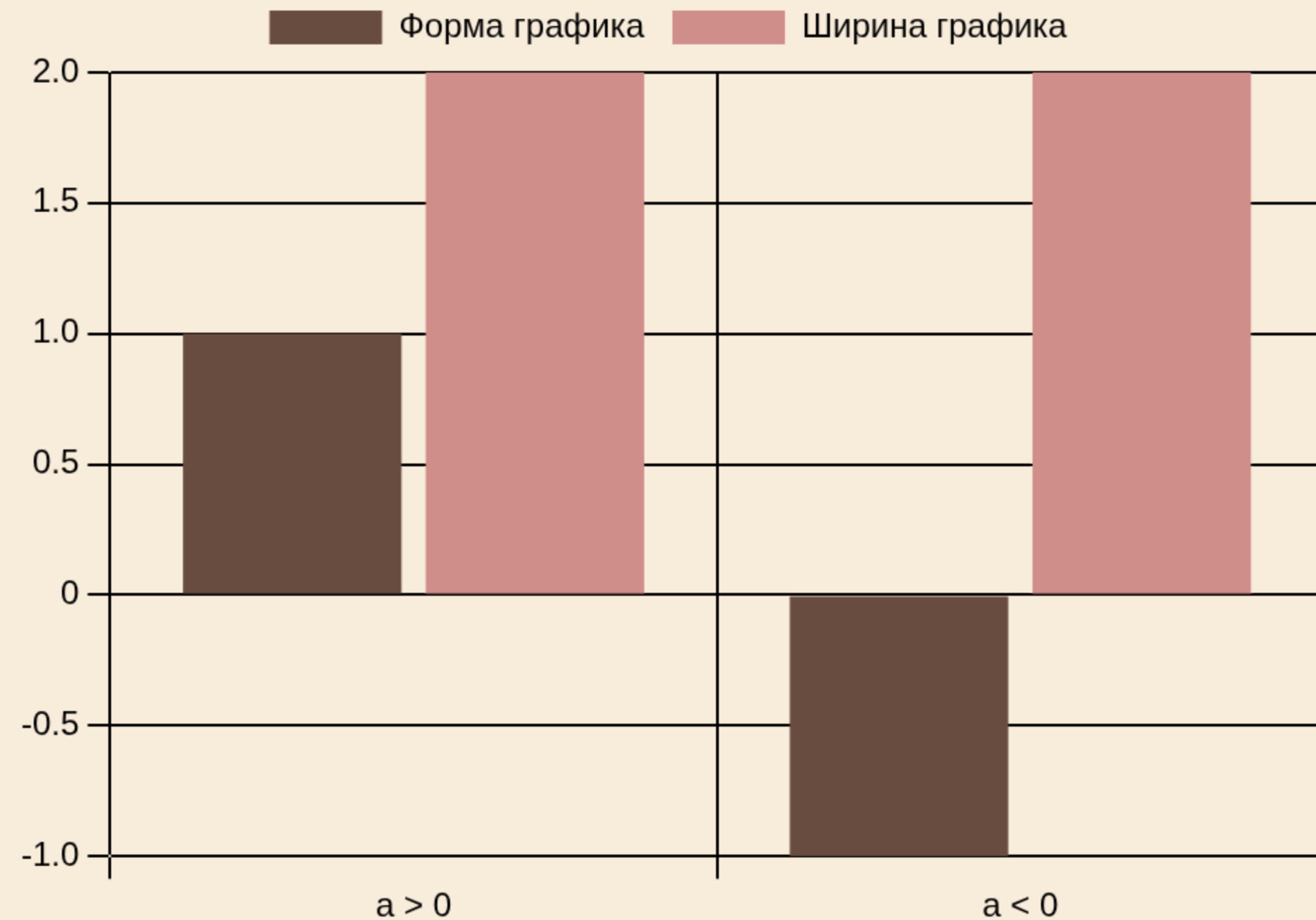
График помогает увидеть не только число решений, но и проверить их правдоподобность. Поэтому изображение параболы удобно использовать вместе с дискриминантом и формулой корней.



Связь коэффициента a с направлением ветвей параболы

Знак коэффициента a задаёт общий вид параболы, а его модуль влияет на крутизну изгиба. Это помогает заранее представить график без построения таблицы значений.

При положительном a ветви направлены вверх, при отрицательном — вниз; изменение $|a|$ меняет только ширину параболы.



4

главные формулы достаточно,
чтобы решать большинство
заданий по теме.

Школьный курс алгебры 9 класса

Эти четыре опорные формулы связывают вид уравнения, дискриминант, корни и соотношения Виета. С ними легче выбирать способ решения и быстро проверять полученный ответ.

Квадратные уравнения как основа дальнейшего изучения алгебры

Квадратные уравнения учат не только считать, но и выбирать удобный способ решения. Эта тема соединяет преобразования, графики и проверку ответа, поэтому становится важной опорой для дальнейшей алгебры.