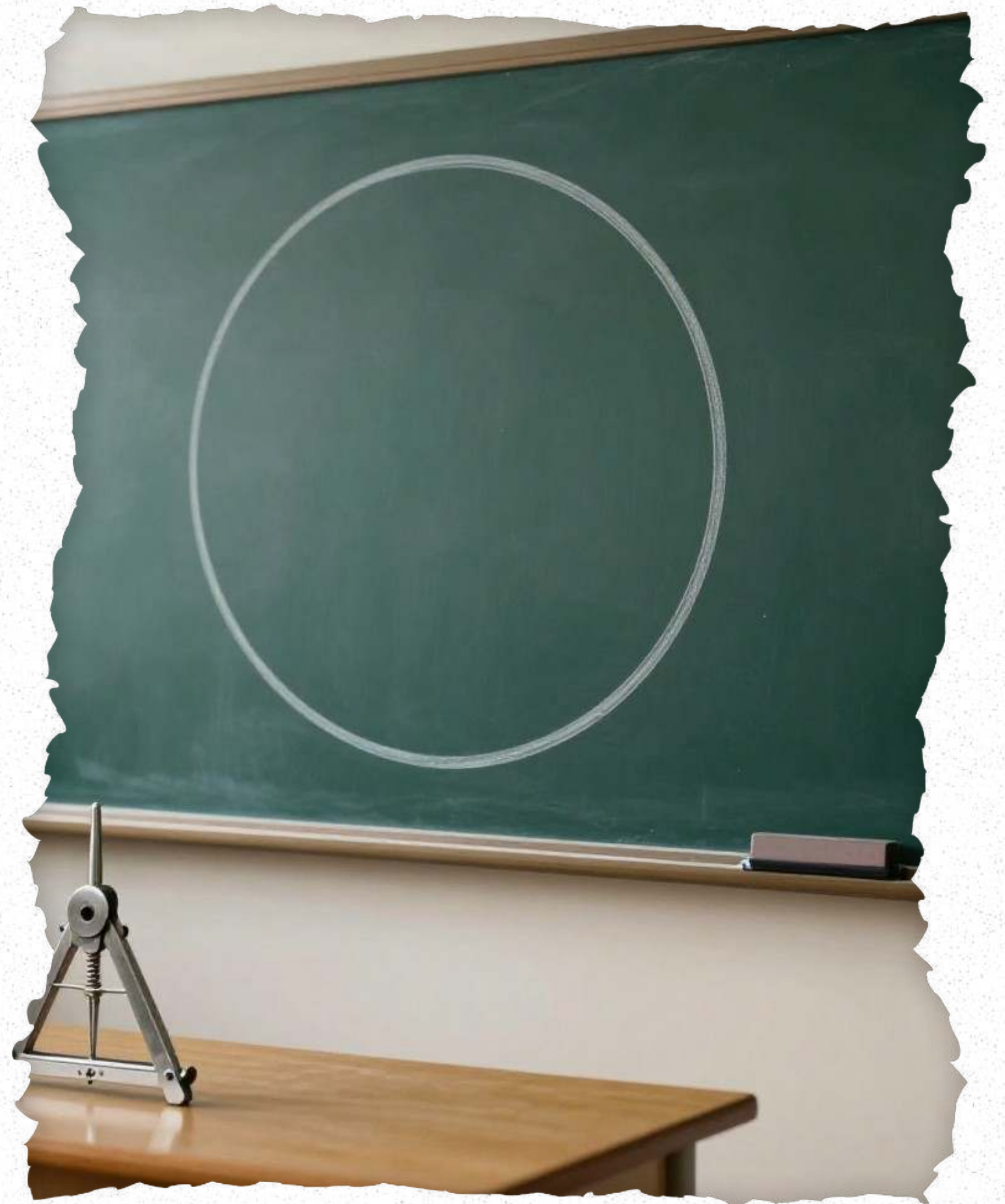


Метод вспомогательной окружности: зачем он нужен

Скрытые свойства окружности часто дают короткое решение.



Когда в задаче стоит искать окружность

- Если в чертеже встречаются углы, хорды, касательные или равные отрезки, стоит проверить, не скрыта ли здесь окружность.



Что такое метод вспомогательной окружности

1. Добавляем окружность

Сначала в условии ищут точки и отрезки, которые удобно соединить одной окружностью. Такая добавка не меняет задачу, но делает видимыми новые углы и равенства.

2. Получаем готовые свойства

Затем используют свойства вписанных углов, хорд и касательных. Они позволяют заменить неизвестные элементы уже знакомыми школьными фактами и сократить рассуждение.

3. Переходим к ответу

После этого задача часто сводится к равенству углов, доказательству цикличности или вычислению длины через степень точки. Это и есть главный выигрыш метода.

4. Находим скрытую связь

Метод особенно полезен там, где на чертеже сначала видны только треугольники и отрезки, а нужная связь появляется лишь после дополнительного построения.

Как распознать нужную задачу

Равные углы

Если в условии встречаются равные углы, особенно при разных вершинах, стоит проверить, не лежат ли эти углы на одной окружности.

Касательная и хорда

Касательная рядом с хордой почти всегда подсказывает работу с окружностью, потому что угол можно заменить вписанным углом на той же хорде.

Середины и прямые углы

Середины отрезков, диаметры и прямые углы часто связаны с окружностью через середину дуги или свойства окружности с заданным центром.

Сумма 180°

Если сумма двух противоположных углов похожа на 180° , это сильный сигнал искать циклический четырёхугольник.

Четыре точки

Когда нужно доказать, что четыре точки лежат на одной окружности, метод часто становится самым коротким путём к решению.

Какие признаки подсказывают окружность

1. Одна хорда

Если удаётся показать равенство двух углов, опирающихся на одну хорду, значит, точки, вероятно, лежат на одной окружности.

2. Сумма углов

Когда в задаче появляется сумма противоположных углов, ищут циклический четырёхугольник: для него эта сумма равна 180° .

3. Хорды и равенства

Если отрезки удобно трактовать как хорды одной окружности, окружность помогает заменить длинные вычисления короткой связкой углов и равенств.

Вписанные углы и одна дуга

1. Находим общую дугу

Сначала выбирают окружность так, чтобы нужные точки оказались на ней. Тогда можно сравнивать углы, опирающиеся на одну и ту же дугу.

2. Сравниваем углы

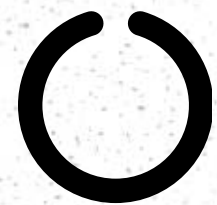
Далее отмечают вписанные углы, которые опираются на одну хорду. Такие углы равны, даже если находятся в разных частях чертежа.

3. Получаем результат

После этого равенство углов превращается в нужный вывод: о длине, параллельности или принадлежности точек одной окружности.



Главные признаки и приёмы



Главный признак

У циклического четырёхугольника противоположные углы дополняют друг друга до 180° . Это часто позволяет доказать нужное утверждение без лишних построений.



Цепочка углов

Если в задаче уже известно несколько равных углов, их удобно собрать в цепочку и проверить, не образуют ли они циклический четырёхугольник.



Короткое решение

После распознавания окружности доказательство становится короче: достаточно одного свойства, чтобы перейти от чертежа к строгому выводу.

Касательная и хорда

Замена угла

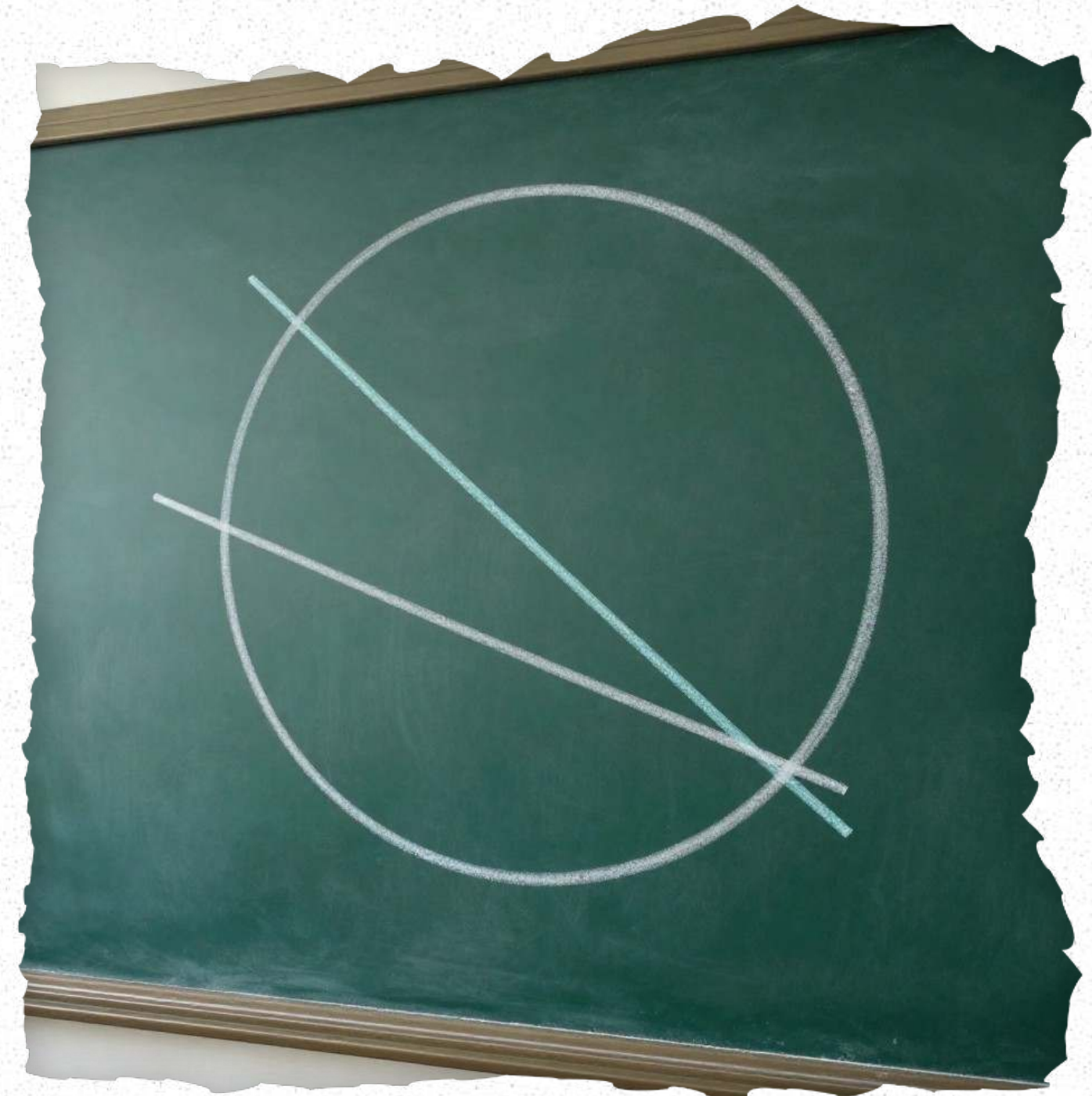
Угол между касательной и хордой равен вписанному углу, опирающемуся на ту же хорду. Поэтому неизвестный угол часто сразу заменяется известным.

Упрощение чертежа

Если касательная и хорда входят в одну окружность, решение строится через уже знакомые свойства вписанных углов, без дополнительных сложных построений.

Связь с длинами

Та же идея помогает и в вычислениях длин: касательная нередко связывается с секущей через степень точки.



Степень точки связывает пересекающиеся хорды и секущие в одно равенство. Это особенно полезно, когда внутри фигуры есть точка пересечения.

Теорема о степени точки в школьной планиметрии

1

**равенство
для каждой точки
позволяет находить
длины без лишних
вычислений.**

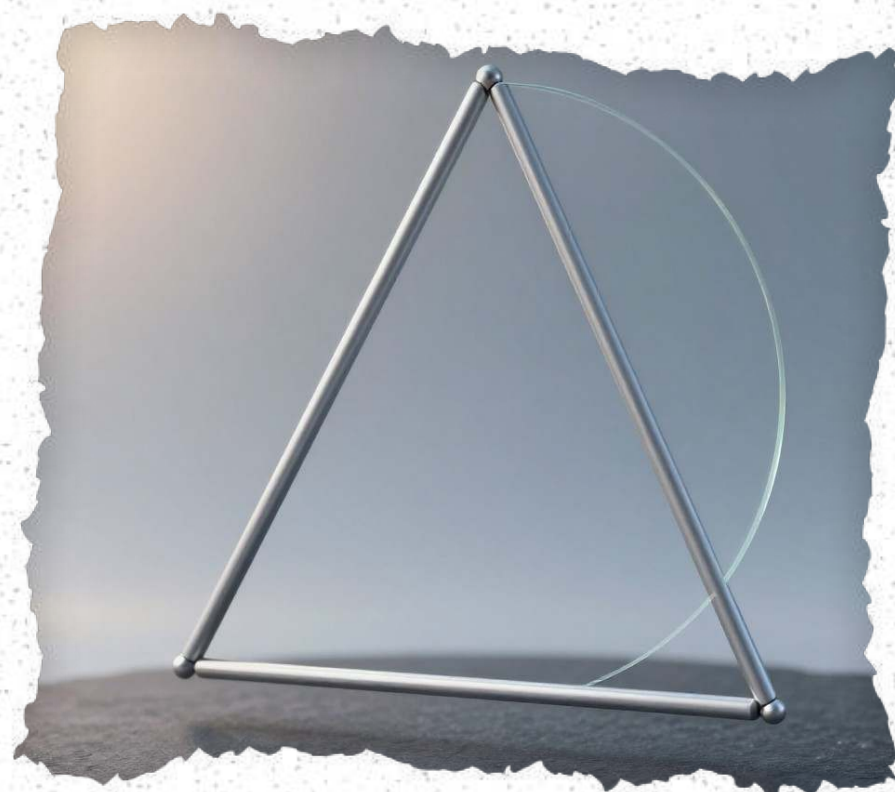
Переход к окружности сразу даёт равные углы или произведения отрезков, из которых и строится решение.

Школьный алгоритм решения геометрических задач через вспомогательную окружность

2

**главных шага
обычно хватает,
чтобы превратить
условие
в равенства.**

Заметки к примеру: треугольник и скрытая окружность



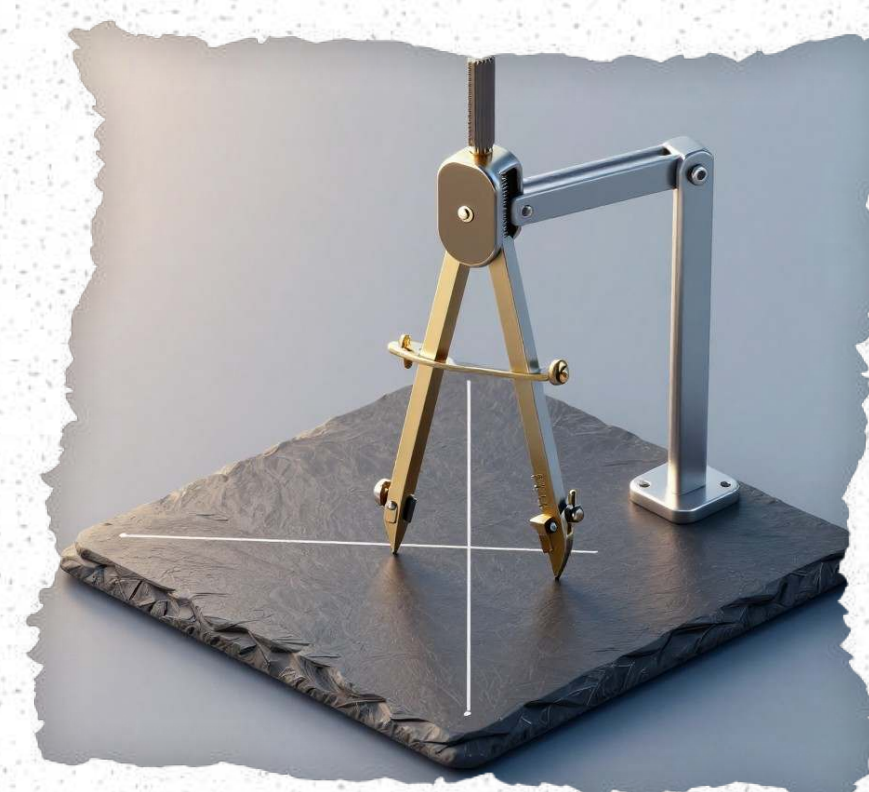
Треугольник как подсказка

На чертеже сначала видны только стороны треугольника, но угол между прямыми часто связан не напрямую, а через окружность. Если провести её через вершины, можно перейти от неизвестного угла к уже знакомым вписанным и центральным углам.



Что скрыто в условии

Внешний угол нередко кажется лишним, пока не появляется окружность. Тогда он связывается с дугой и помогает сравнивать углы, опирающиеся на одну хорду. Решение становится короче, потому что геометрия перестаёт быть «плоской» и начинает работать через окружность.



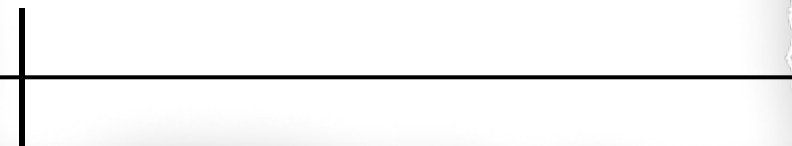
Почему метод экономит шаги

Такой приём особенно удобен в задачах на вычисление, где важно быстро увидеть равенство углов. Вместо длинных выкладок достаточно заметить правильную окружность и использовать её свойства как готовый инструмент.

Пошаговый ход решения

1. Добавляем окружность

Построить окружность через три вершины треугольника и отметить, какие углы на ней уже можно сравнивать.



2. Сопоставляем углы

Найти пару углов, опирающихся на одну хорду или одну дугу, и записать их равенство.



3. Получаем ответ

Использовать полученное равенство, чтобы выразить искомый угол без дополнительных построений.



Известный угол задаёт опору для всех остальных углов в циклическом четырёхугольнике.

Условие задачи и свойство противоположных углов циклического четырёхугольника

52°

**— ЭТО УГОЛ,
ПО КОТОРОМУ УДОБНО
НАЙТИ
ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ
ИСКОМЫЙ УГОЛ В 128° .**

Где касательная упрощает вычисления

Угол становится вписанным

Касательная и хорда дают почти мгновенную замену неизвестного угла на вписанный. Это особенно полезно, когда в чертеже сложно увидеть прямую связь между линиями, а окружность сразу делает её очевидной.

Длины через произведения

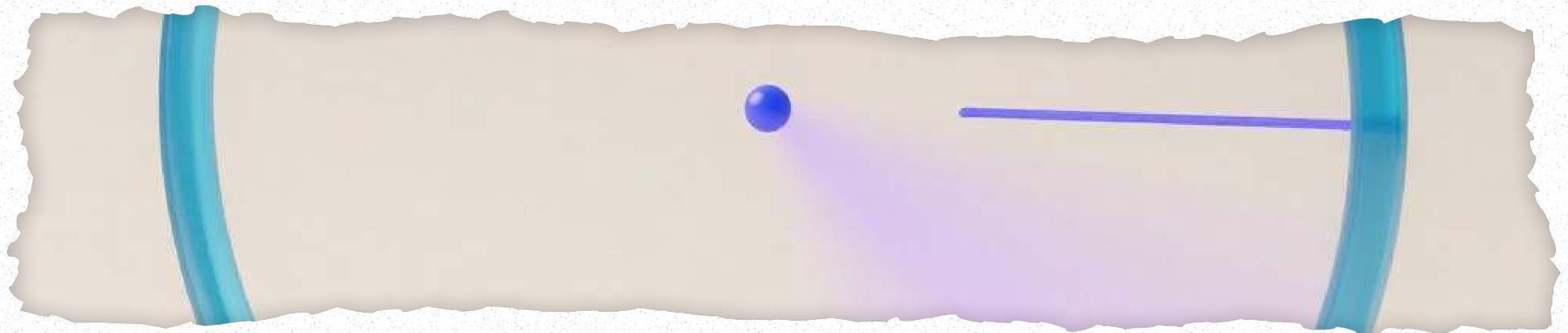
Если точка находится вне окружности, удобно применять степень точки. Тогда произведения отрезков на секущих сравниваются между собой, и длины находятся без лишних вспомогательных построений.

Хорда как опора

Хорда помогает зафиксировать дугу, а касательная — выбрать правильный угол для сравнения. Вместе они превращают рисунок в задачу на знакомые теоремы, а не на догадки.

Правильный выбор окружности

В подобных примерах окружность стоит провести так, чтобы на ней оказались точка касания и концы хорды. После этого вычисление сводится к двум стандартным свойствам окружности.



Как собрать решение по шагам

1. Шаг 1. Выделить опорные точки

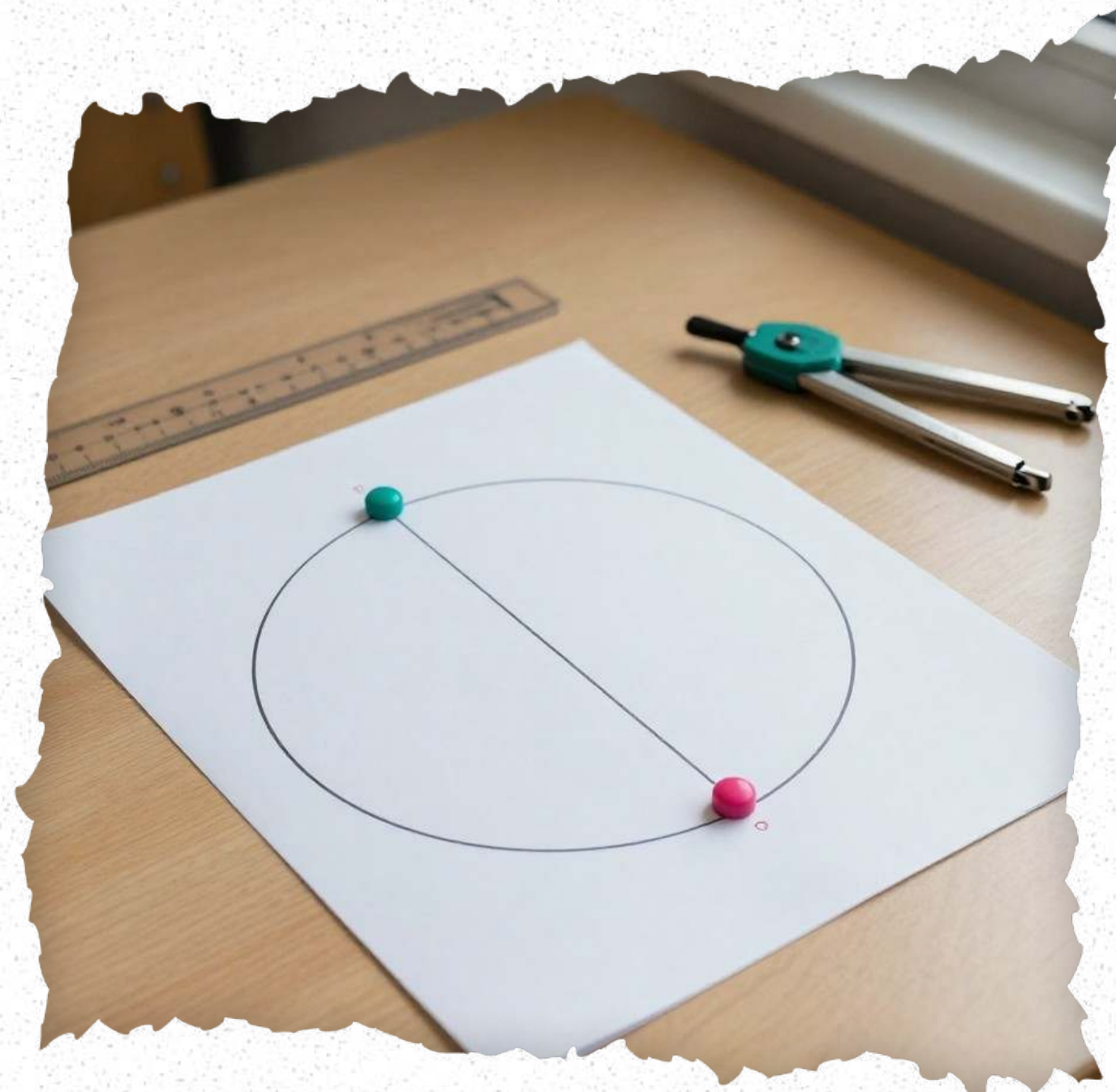
Сначала отмечают точку касания и концы хорды, которые должны лечь на одну окружность. Это сразу задаёт нужную фигуру и убирает лишние линии из чертежа.

2. Шаг 2. Найти равный угол

Затем сравнивают угол между касательной и хордой с вписанным углом, опирающимся на ту же хорду. Так появляется равенство, которое можно использовать в вычислении.

3. Шаг 3. Дойти до ответа

После этого остаётся применить степень точки или известные отрезки на секущих. Искомая длина или угол выражается через уже данные элементы без дополнительных построений.



Две секущие из одной точки дают одно и то же произведение отрезков. Это позволяет сразу перейти от рисунка к равенству длин и закончить вычисление.

Теорема о степени точки

2

**секущие из одной
точки дают
равные
произведения
отрезков.**

На что смотреть в доказательстве

Равные углы

Если нужно доказать, что четыре точки лежат на одной окружности, удобнее искать равенство углов, опирающихся на один отрезок. Тогда достаточно показать, что они видят одну и ту же хорду.

Сумма 180°

Другой путь — проверить, что сумма противоположных углов равна 180° . Этот признак особенно полезен, когда на чертеже уже есть пара смежных или дополнительных углов.

Короткий критерий

Оба подхода сводят доказательство к короткой цепочке уже знакомых фактов. Вместо сложного построения появляется ясный критерий, по которому видно, что точки образуют одну окружность.

От рисунка к доказательству

1. 1. Ищем опорную хорду

Сначала выбирают пару точек, для которых удобно проверить равенство углов. Обычно это углы, опирающиеся на одну хорду или связанные с одной и той же дугой.

2. 2. Связываем точки окружностью

Затем добавляют вспомогательную окружность так, чтобы нужные точки оказались на ней. После этого равные углы становятся следствием свойств вписанных углов, а не отдельным предположением.

3. 3. Собираем углы

Дальше строят цепочку равенств: один угол равен другому, затем появляется дополнительный угол до 180° . Такой переход почти всегда приводит к циклическому четырёхугольнику.

4. 4. Записываем вывод

Когда условие выполнено, формулируют вывод: точки лежат на одной окружности. Это и есть нужный результат, который открывает путь к дальнейшему доказательству параллельности или перпендикулярности.

Истории, где середины открывают окружность

Средины как ориентир

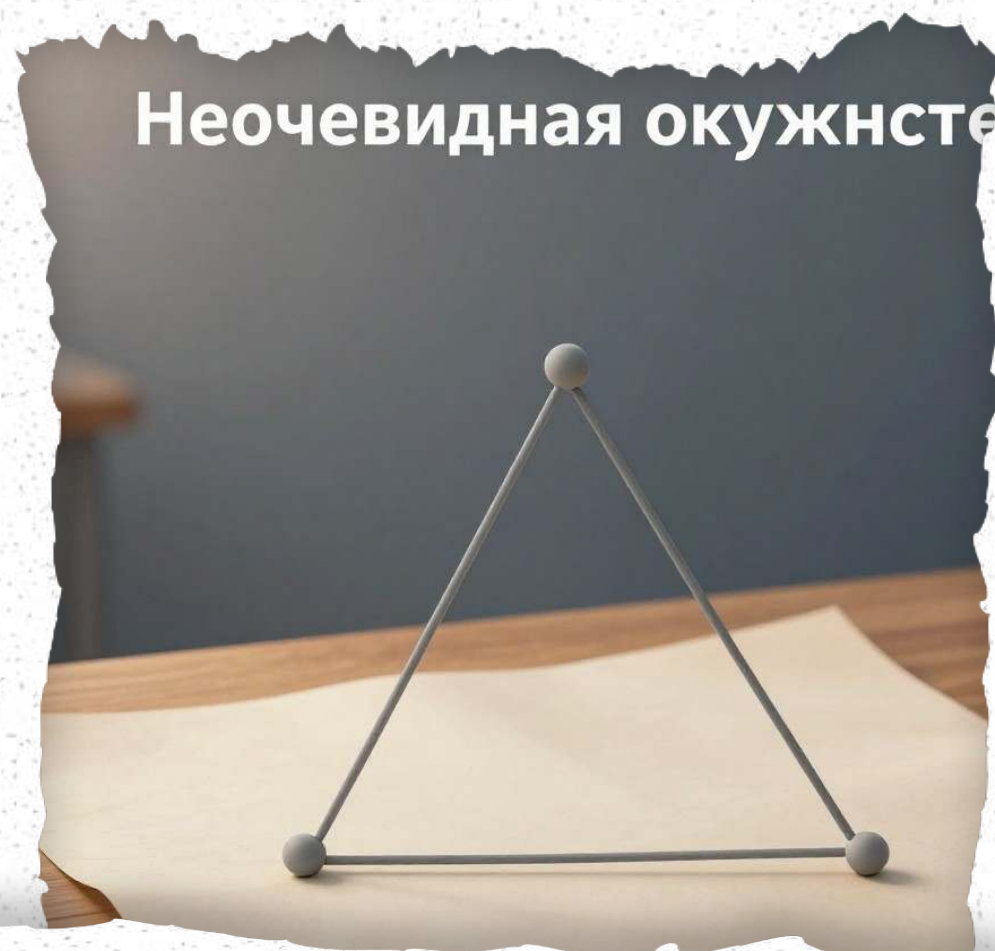
На рисунке появляются середины отрезков, и именно они задают неожиданные точки для окружности.

Если заметить равные углы, можно провести окружность через середины и вершины треугольника, а затем использовать равенство дуг для вывода о параллельности.



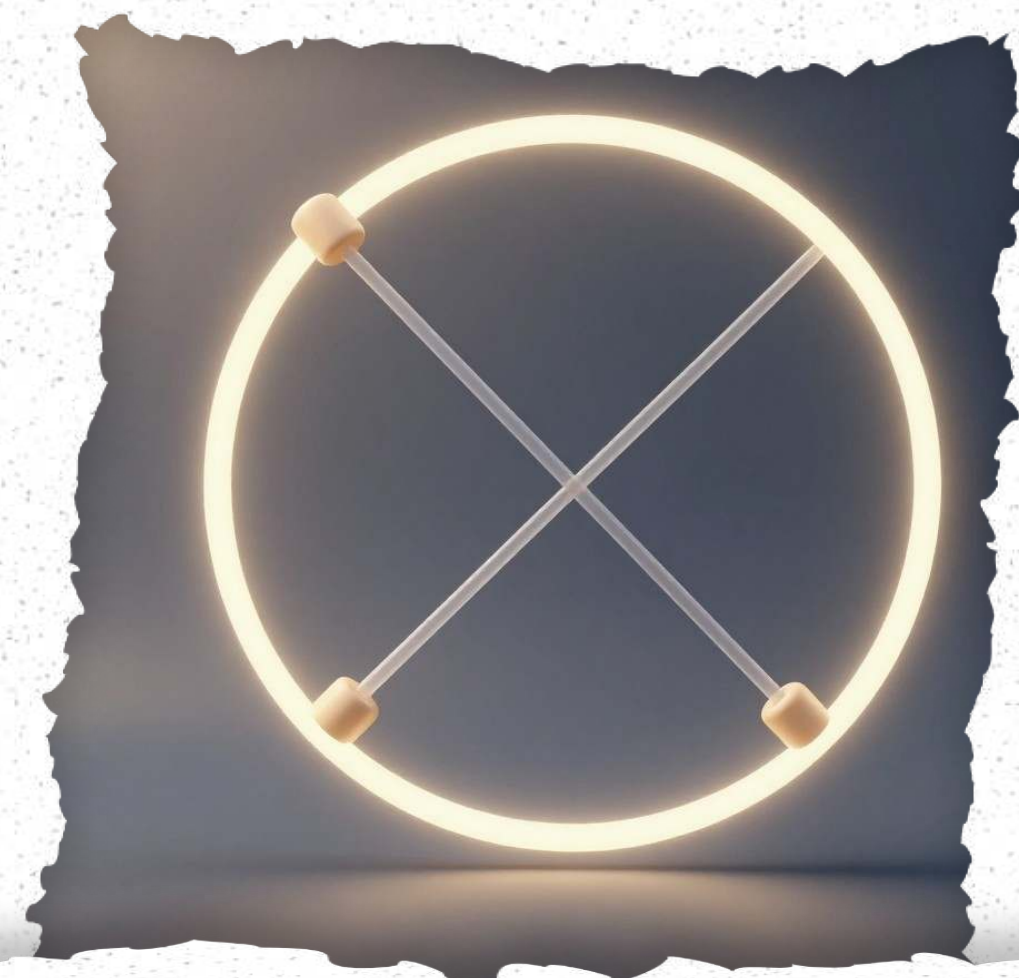
Неочевидная окружность

Иногда нужная окружность проходит не через все вершины сразу, а через две вершины и середину стороны. Тогда дуги оказываются равными, а это превращает сложное соотношение в понятное геометрическое равенство.



Когда середина решает

Такой подход часто помогает доказать перпендикулярность: как только появляется нужная хорда и равные дуги, углы начинают складываться в прямую. В результате середины отрезков становятся не вспомогательной деталью, а ключом к решению.



Что запомнить в конце

Метод вспомогательной окружности делает сложную планиметрию понятной: нужно увидеть хорды, углы и касательные. Если сразу искать подходящую окружность, решение чаще всего складывается из коротких и знакомых шагов.