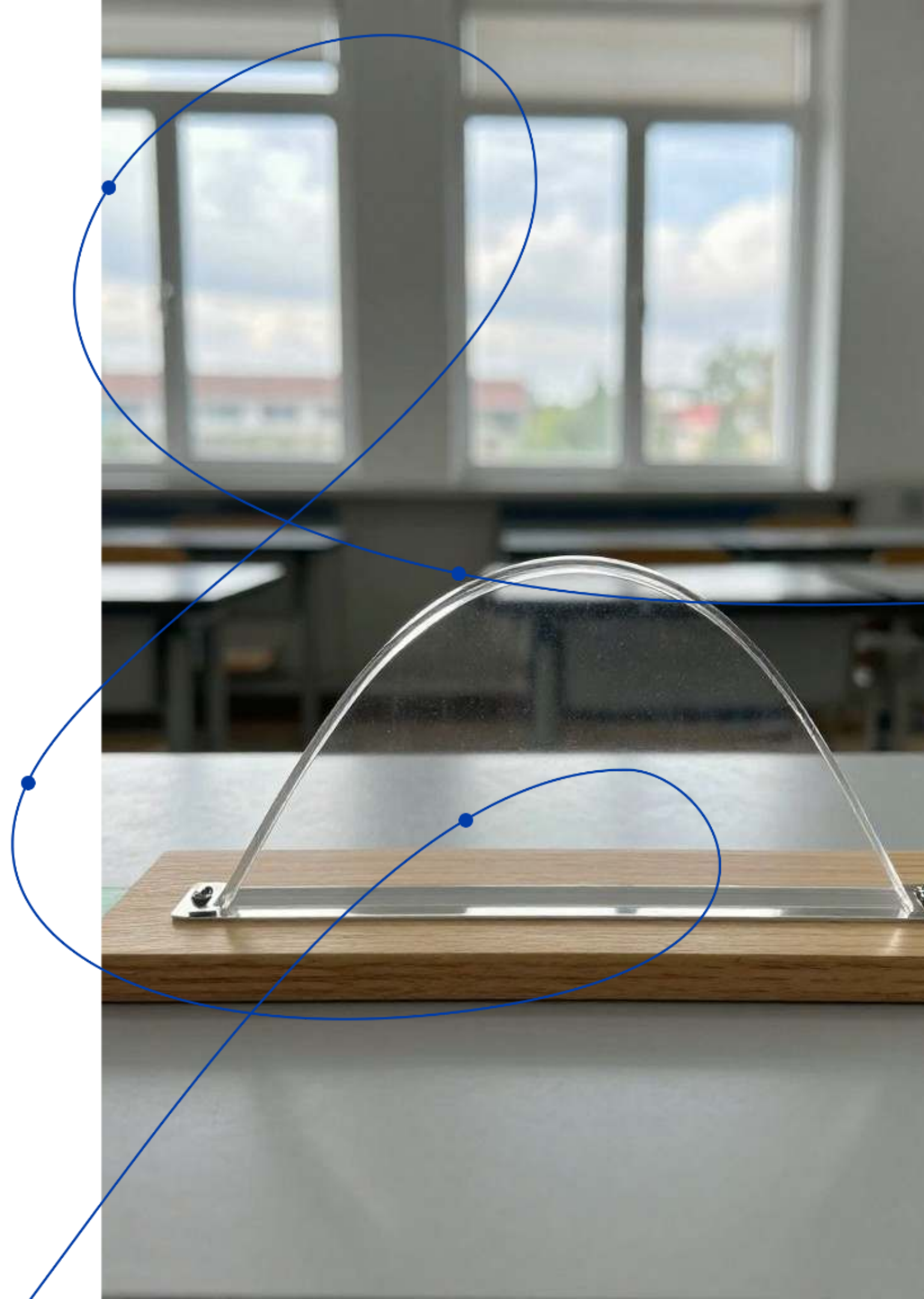


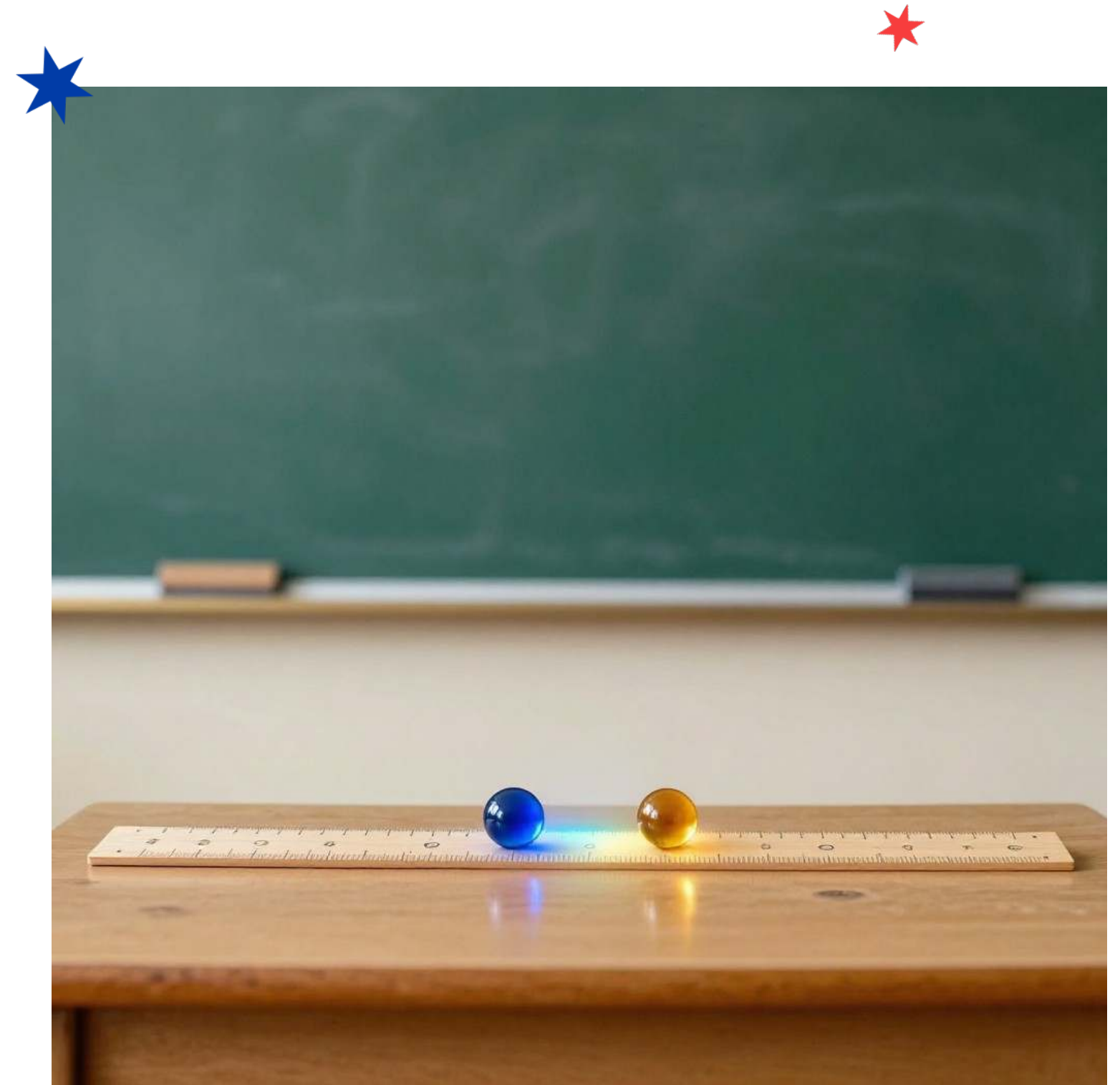
Квадратные неравенства в 9 классе: основные идеи темы

Неравенства вида ax^2+bx+c сравнивают с нулём и подсказывают, какие x дают нужный знак.



От квадратных уравнений к решениям на числовой прямой

Квадратные неравенства изучаются после квадратных уравнений и продолжают тему квадратной функции. Вам пригодятся дискриминант, формулы корней, числовая прямая и интервал. На уроках учатся находить допустимые значения, а не одно число.



Что называется квадратным неравенством

Квадратное неравенство содержит выражение второй степени и один из знаков сравнения: $>$, $<$, $\geq$, $\leq$. Обычно оно записывается в виде $ax^2+bx+c ? 0$, где $a \neq 0$.

Решением называют любое значение x , при котором исходное неравенство становится верным. То есть нужно проверить знак выражения ax^2+bx+c относительно нуля для каждого подходящего x .

Ответ чаще всего не число, а промежуток или объединение промежутков. Это позволяет показать все x , где неравенство выполняется, и сразу обозначить границы.



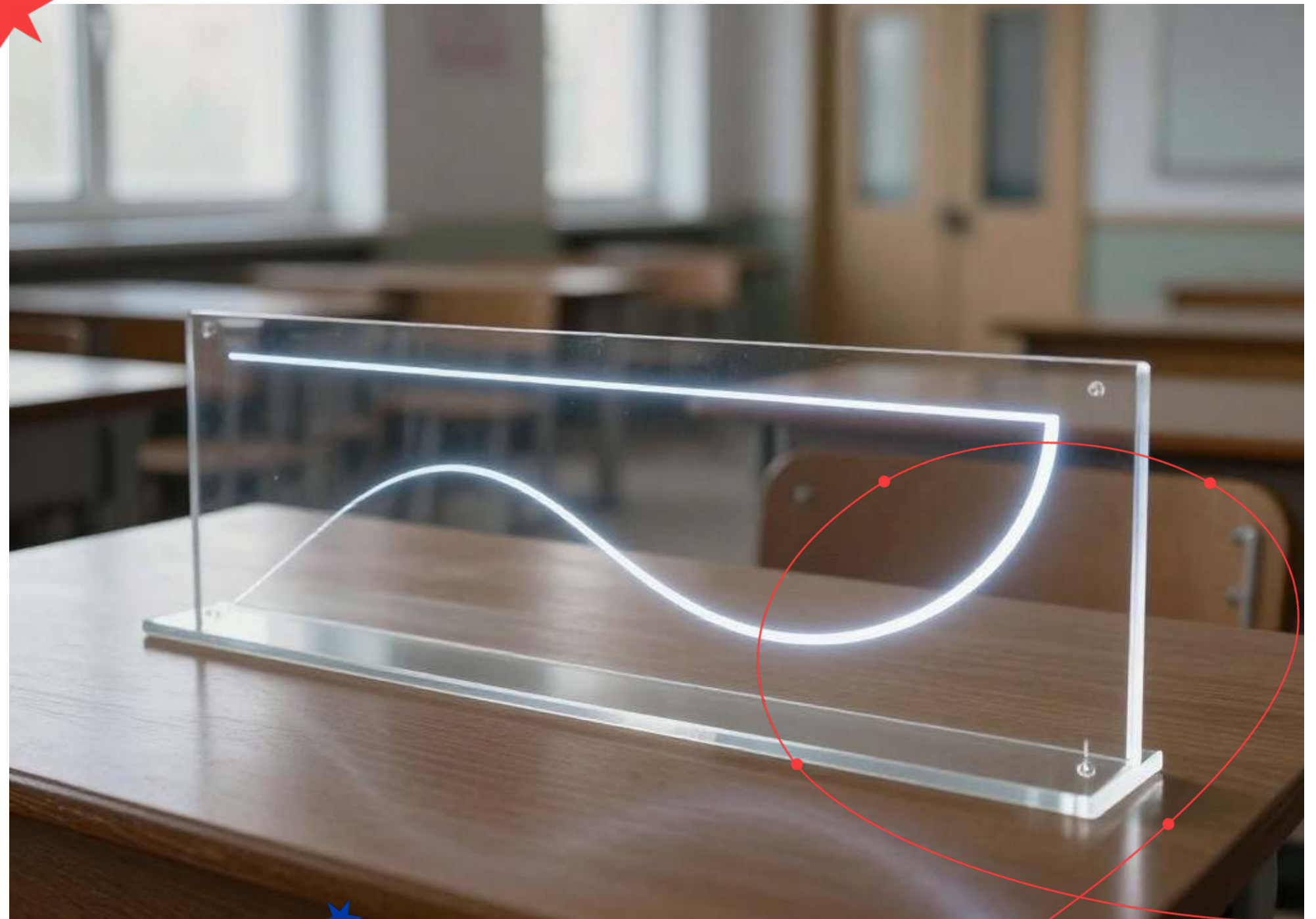
Парабола и знак квадратного выражения

Где выражение положительно и отрицательно

График функции $y = ax^2 + bx + c$ помогает понять знак выражения: точки выше оси Ox дают $y > 0$, а ниже — $y < 0$. Там, где график «под осью», выражение отрицательно.

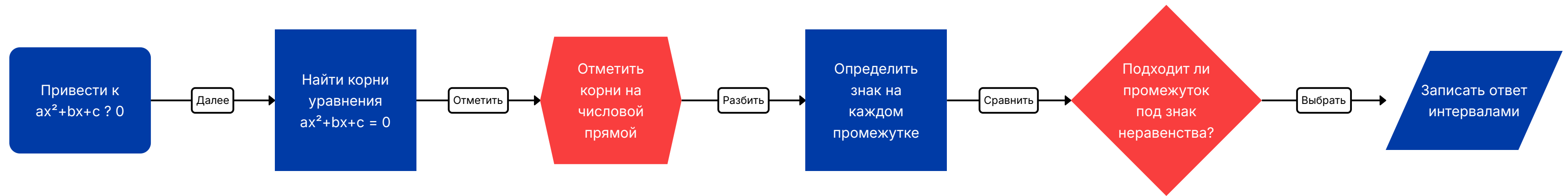
Корни как границы промежутков

Пересечения графика с осью Ox отвечают корням уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Эти корни делят числовую прямую на промежутки: внутри каждого знак не меняется, пока вы не перейдёте через корень.



Как решать квадратное неравенство: от вида к ответу

Схема отражает стандартную логику: корни разбивают прямую, дальше выбираем подходящие промежутки.



$$D < 0$$

Тогда парабола не пересекает ось Ox , и знак выражения не меняется.

Если дискриминант $D < 0$, у уравнения $ax^2+bx+c = 0$ нет действительных корней. Парабола не пересекает Ox : при $a > 0$ выражение положительно при любом x , при $a < 0$ — отрицательно.

Случай одного корня и касания оси Ox

Если дискриминант $D = 0$, квадратное уравнение имеет один действительный корень — двойной. График параболы касается оси Ox в одной точке и не пересекает её.

Для нестрогих неравенств ($\geq$ и $\leq$) такой корень может входить в ответ, если знак неравенства согласуется со значением выражения в этой точке.

Для строгих неравенств ($>$ и $<$) точка касания не включается. Поэтому решение строят, учитывая, что в корне выражение равно нулю, а строгий знак это запрещает.

Как знак зависит от числа корней



Таблица связывает коэффициент a и дискриминант D с тем, где знак ax^2+bx+c сохраняется, а где меняется при переходе через корни.

Главное: знак меняется только при переходе через действительный корень. При двух корнях появляются внешние и внутренний промежутки, и знак внутри противоположен знаку снаружи.

a	Число корней	Вне корней	Между корнями	Решение
$a > 0$	$D < 0$	+	—	все x или пусто
$a < 0$	$D < 0$	—	—	все x или пусто
$a > 0$	$D = 0$	+ (в точке 0)	—	один промежуток или точка
$a < 0$	$D = 0$	— (в точке 0)	—	один промежуток или точка
$a \neq 0$	$D > 0$	внешние: знак как у a	между корнями: противоположный	объединение внешних или внутренний



Ключевые правила знаков для квадратного трёхчлена ax^2+bx+c

Связь дискриминанта с видом решения



Если $D < 0$, действительных корней нет — решение часто становится всей прямой или пустым множеством. При $D > 0$ появляются интервалы по разные стороны от корней.

Дискриминант сразу подсказывает, сколько действительных корней будет на Ox , а значит — сколько «кусочков» числовой прямой нужно рассмотреть. Это ускоряет выбор правильных промежутков.

Строгие и нестрогие неравенства



Строгие знаки: $>$ и $<$

Знаки $>$ и $<$ не включают точки, где ax^2+bx+c равно нулю. Поэтому корни, найденные из уравнения, в ответ для строгих неравенств не попадают.



Нестрогие знаки: $\geq$ и $\leq$

Знаки $\geq$ и $\leq$ включают корни, если они соответствуют нужному условию. Значит, границы промежутков иногда нужно добавлять, а не исключать.



Границы: круглые и квадратные скобки

При записи ответа используют круглые скобки для исключения границ и квадратные — для включения. Важно аккуратно выбирать тип скобок, особенно когда корни точные числа.



Ответ задают интервалами, а не точками

Почти всегда результат удобнее записывать как промежуток или объединение интервалов. Так видно, для каких x неравенство выполняется, а где оно нарушается.



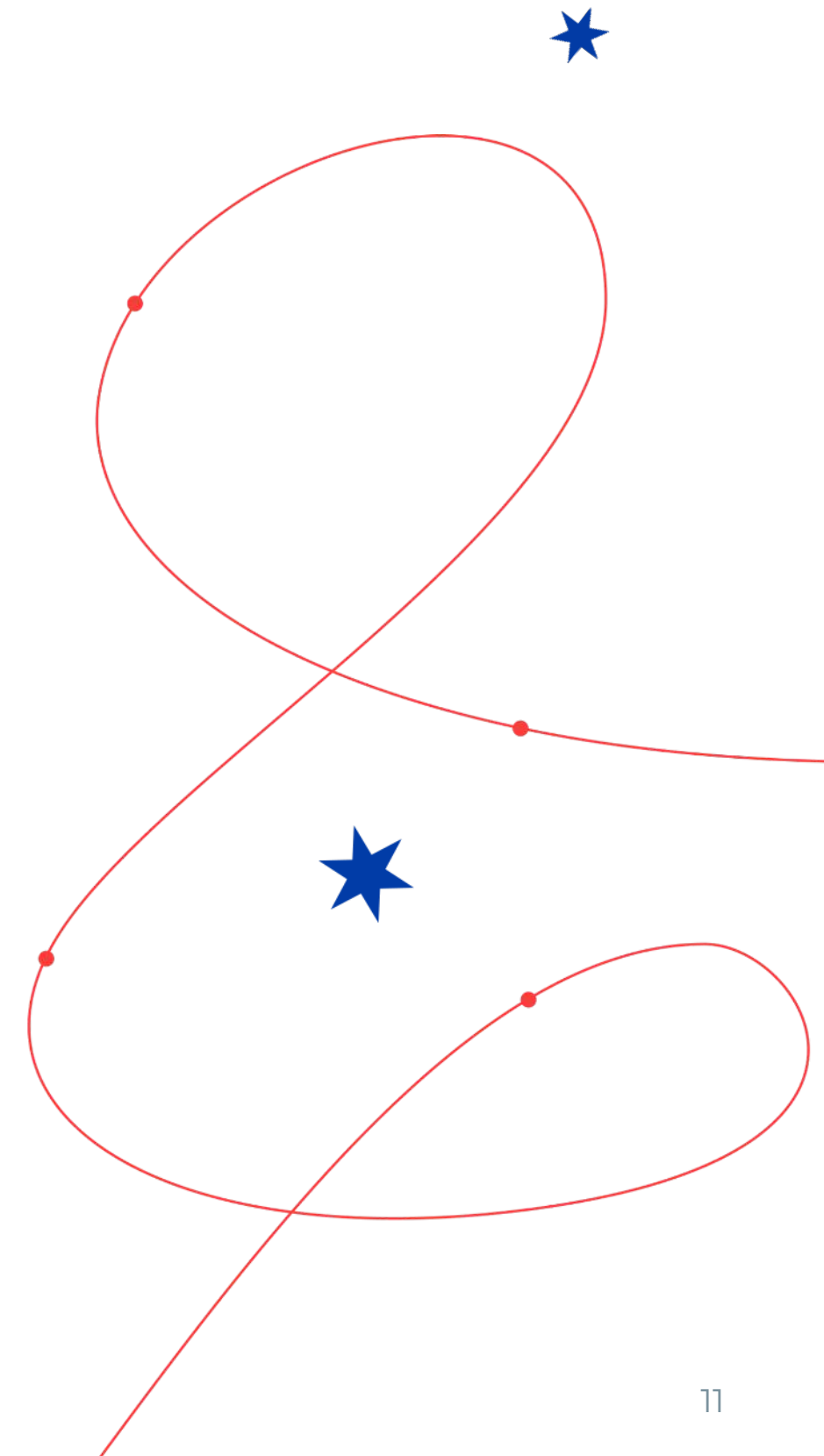
Решение через разложение на множители

Если квадратный трёхчлен можно разложить на множители, задача заметно упрощается. Например, $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$. Тогда нули задают точки, где произведение меняет знак.

Корни $x - 2 = 0$ и $x - 3 = 0$ дают значения 2 и 3. Их отмечают на числовой прямой, разбивая её на промежутки. На каждом промежутке удобно определить знаки $(x - 2)$ и $(x - 3)$.

После этого находят знак всего произведения $(x - 2)(x - 3)$: перемножают знаки множителей. Это позволяет сразу выбрать те промежутки, где выражение удовлетворяет заданному неравенству.

Способ особенно хорош, когда коэффициенты невелики и разложение выполняется без формул корней. Он также помогает избежать лишних вычислений и делает ответ через интервалы более наглядным.



Алгоритм решения квадратного неравенства через множители

По шагам: разложение на множители, нахождение нулей, разметка промежутков, выбор подходящих значений и запись ответа интервалами.

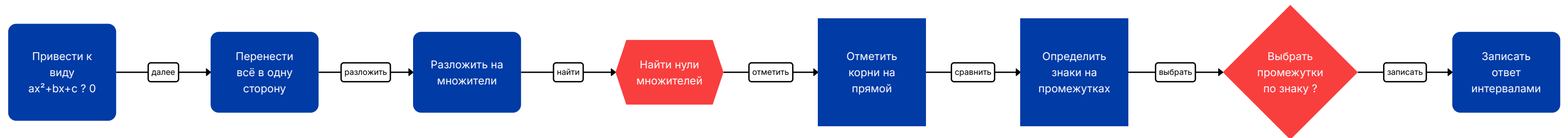
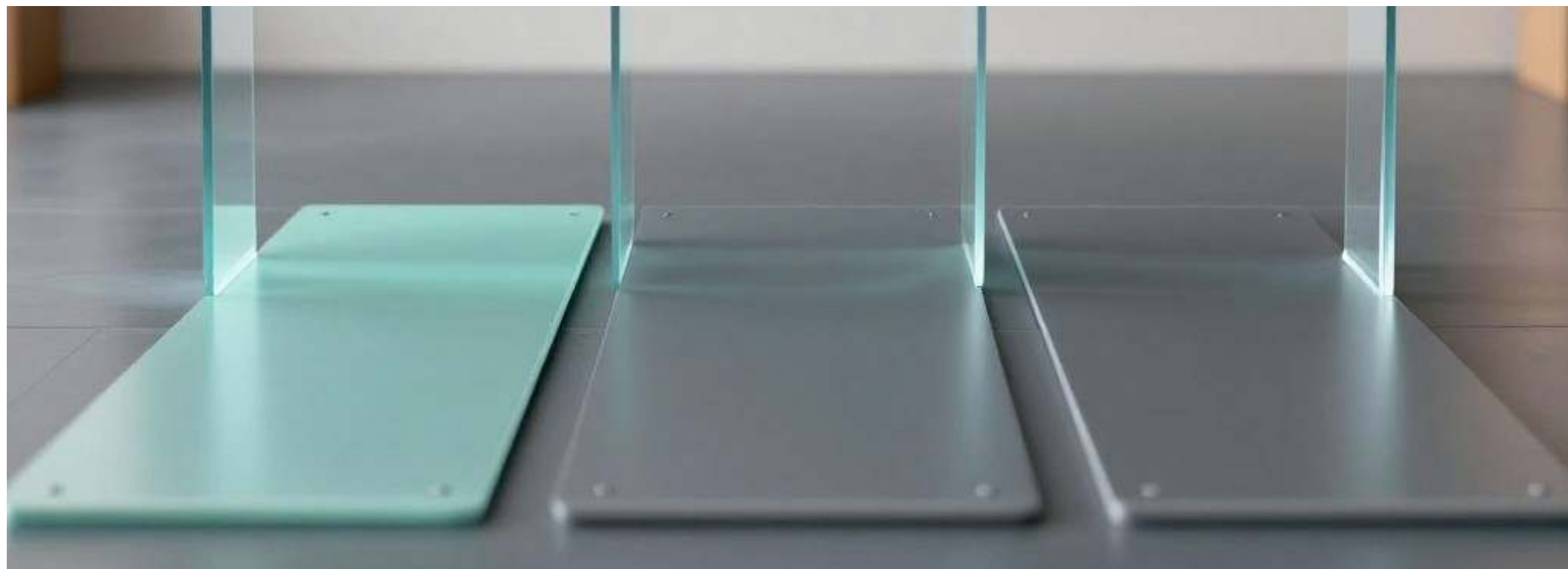


Таблица знаков для выражения с двумя корнями

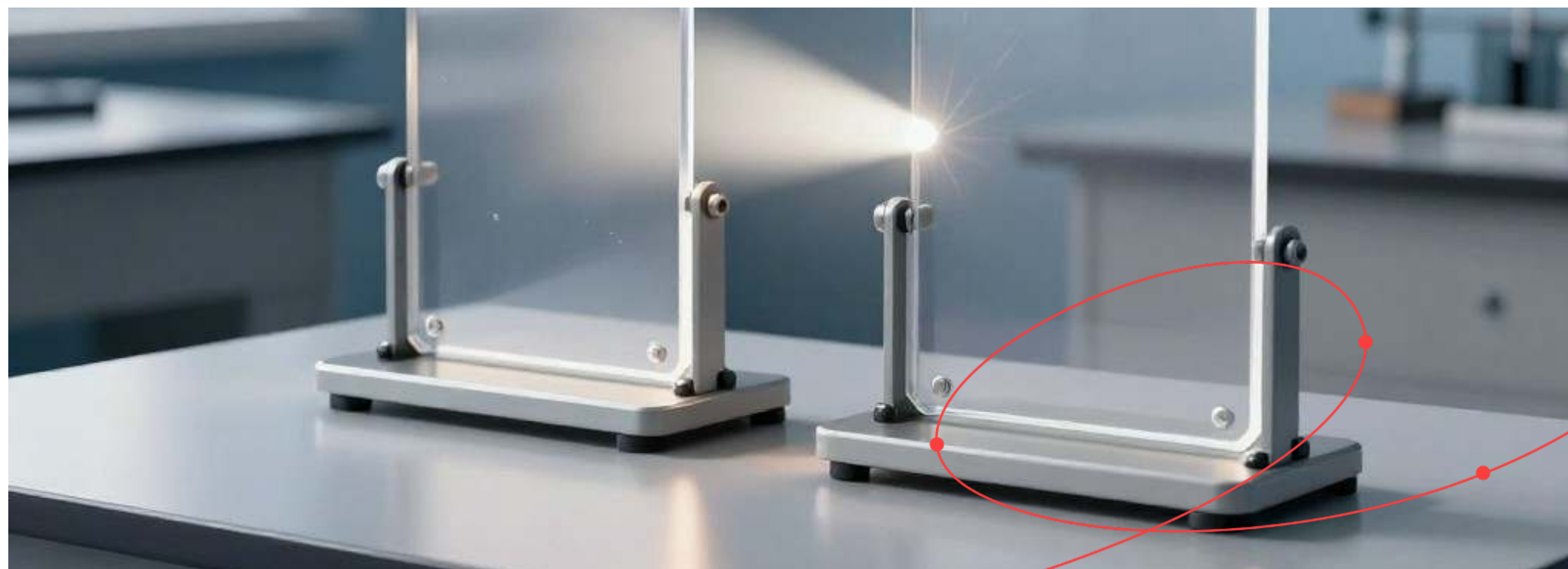
Точка-разделитель: когда знак меняется

Для выражения вида $(x-2)(x-5)$ корни 2 и 5 делят числовую прямую на три промежутка: $x < 2$, $2 < x < 5$, $x > 5$. Знаки множителей меняются при переходе через каждый корень.

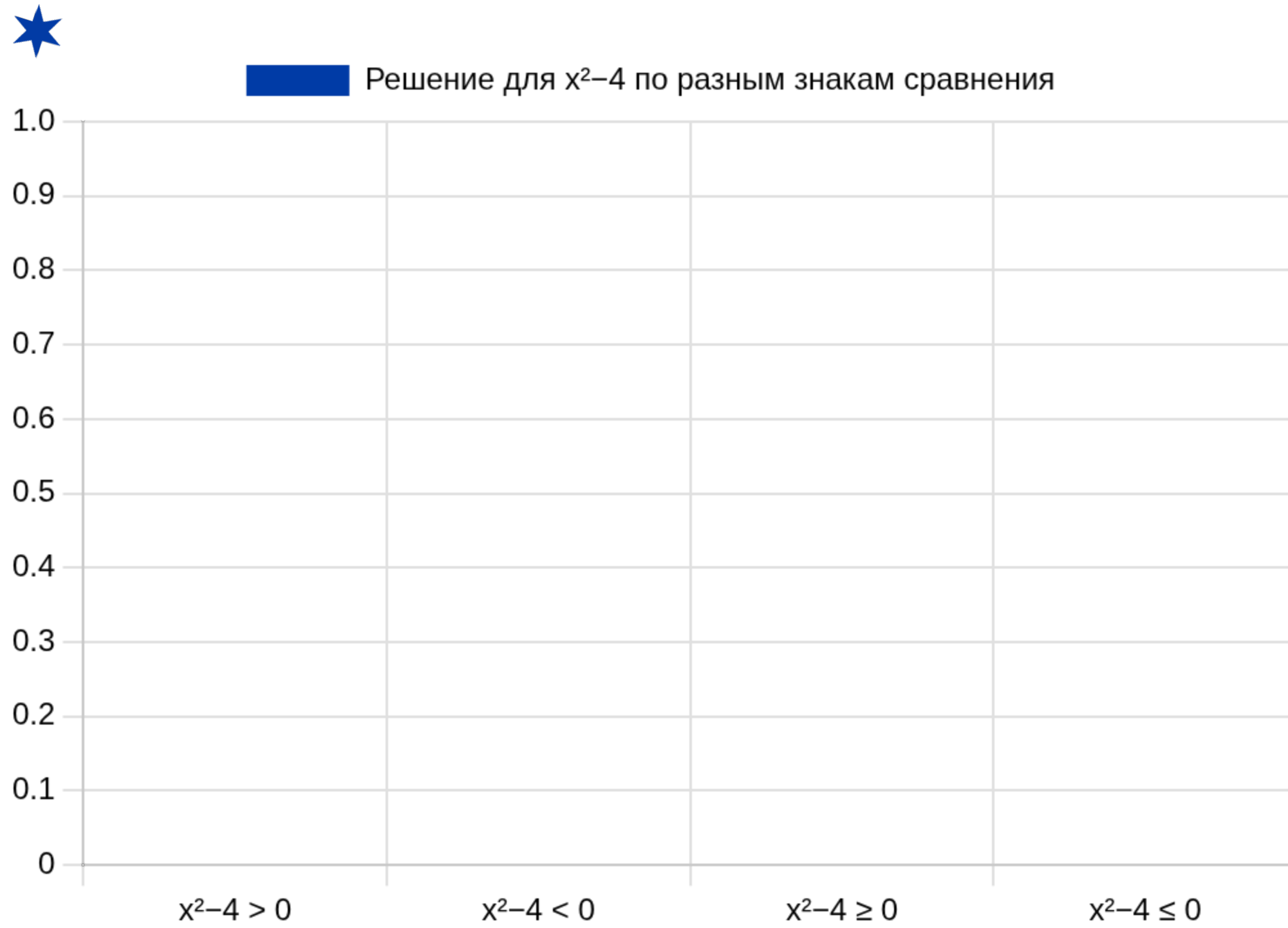


Почему получается «чередование» знаков

При положительном старшем коэффициенте произведение положительно вне корней и отрицательно между ними. Если же старший коэффициент отрицательный, картина меняется на противоположную. Так таблица знаков помогает быстро выбрать нужные интервалы.



Сравнение ответов для одного выражения при разных знаках



Данные для примера: x^2-4 , корни -2 и 2 ; сравнение для знаков $>$, $<$, $\geq$, $\leq$.

Корни выражения x^2-4 равны -2 и 2 . Строгие неравенства дают только «внутренние» или «внешние» промежутки без граничных точек.

Вид ответа определяется тем, включаем ли мы точки -2 и 2 . Для знака >0 берутся внешние промежутки, для <0 — внутренний, а при $\geq/\leq$ добавляются границы.

Графический способ решения



Парабола и ось Ох

Строится график функции $y=ax^2+bx+c$ и отмечается ось Ох. Решением будут те x , при которых график лежит выше или ниже оси, в зависимости от знака неравенства.



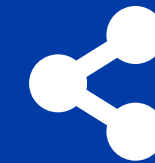
Как «считывают» знак

Точки пересечения с Ох — это корни уравнения $ax^2+bx+c=0$. Между ними знак выражения постоянен, поэтому по рисунку удобно понять, где именно выполняется условие.



Проверка и связь с алгеброй

График помогает проверить знак выражения: где $y>0$, там $ax^2+bx+c>0$, и наоборот. После разметки корней легче сопоставить интервалы с соответствующими участками параболы.



Сколько корней и куда направлены ветви

По графику видно, имеет ли уравнение два корня, один корень или не имеет их вовсе. Также заметно, куда направлены ветви параболы, что влияет на выбор промежутков.

Типичные ошибки при решении квадратных неравенств



Столбцы показывают: ошибку, причину её возникновения и правильный шаг. Сопоставляйте свой ход решения с таблицей, чтобы не потерять корни, промежутки и нужные границы.

Большинство промахов связано с тремя опорами: знак коэффициента a , строгие/нестрогие границы и корректная разметка промежутков. Проверка знака на каждом промежутке снижает вероятность ошибки.



Ошибка	Почему возникает	Правильное действие
Не учитывается знак a	Путают, где парабола выше/ниже Ox	Проверить D и учесть направление ветвей по знаку a
Путаются строгие и нестрогие знаки	Забывают, включаются ли нули	Для $>$ и $<$ корни не входят; для $\geq$ и $\leq$ — входят при подходящем знаке
Корни отмечаются без проверки	Неверно выбирают границы промежутков	Сначала найти корни уравнения $ax^2+bx+c=0$ и аккуратно отметить их
Вместо промежутков записываются числа	Теряют связь с неизменностью знака на промежутке	Записывать ответ интервалами и их объединениями
Знак на промежутке выбирается случайно	Не используют правило смены знака у корней	Определять знаки по таблице знаков и затем выбирать подходящие промежутки



Матрица типичных ошибок по алгоритму решения квадратных неравенств: разметка корней и выбор по знаку.

Примеры применения в школьных задачах



Площади и выражения с переменной

В задачах на площадь часто получается квадратное выражение через неизвестную сторону или параметр. Затем условие «больше/меньше» превращается в квадратное неравенство и требует интервалов допустимых значений.



Геометрические ограничения

В геометрии неравенства помогают находить допустимые размеры фигур: например, чтобы длины образовывали отрезки нужной конфигурации. Решение задаёт диапазон, где условие выполняется.



Движение и сравнение величин

При движении сравнивают расстояния, времена или скорости. Когда в формулу приходит переменная в квадрате, образуется неравенство второй степени, а решение показывает все подходящие значения параметра.

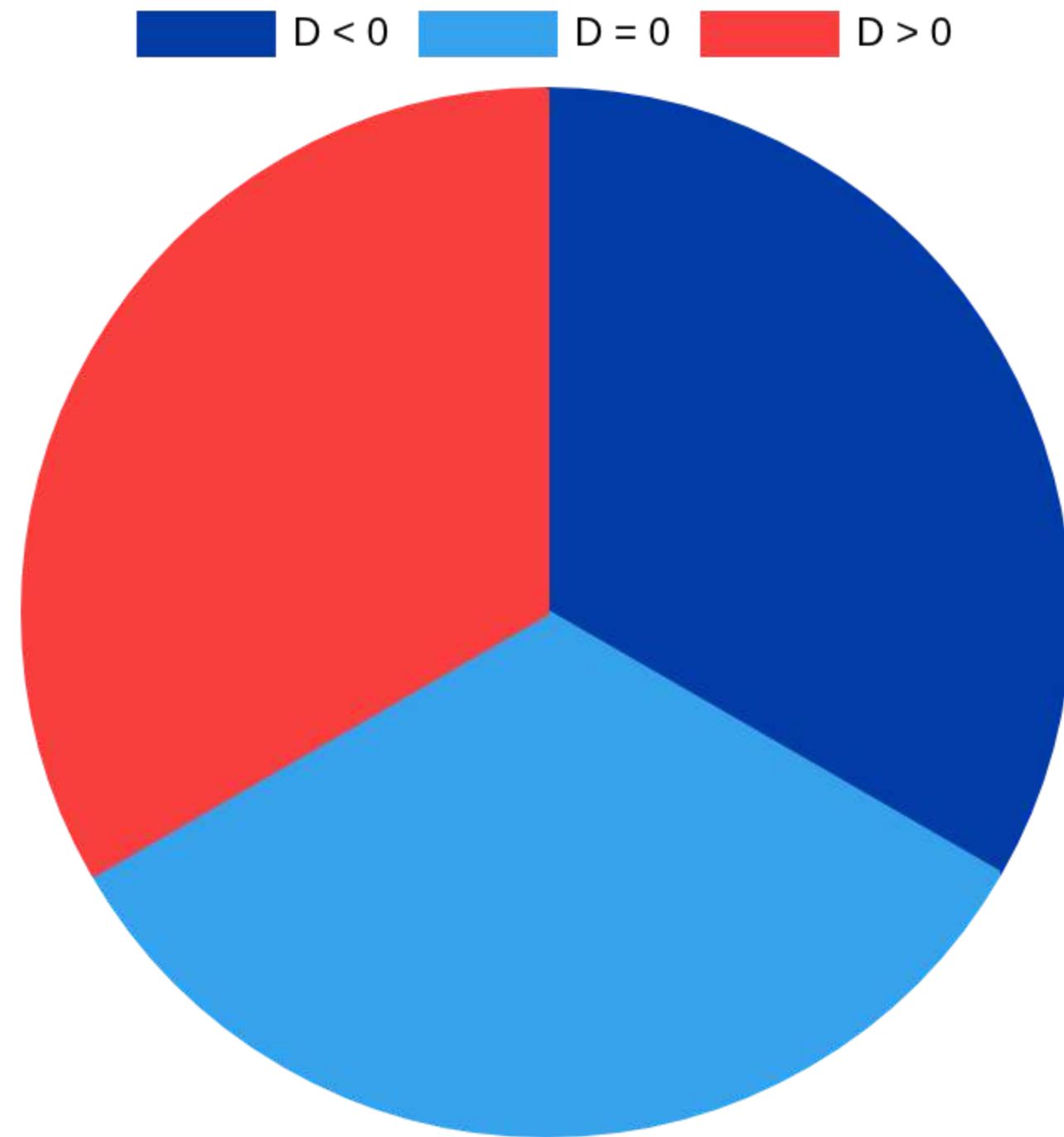


Проверка допустимости условий

Квадратные неравенства полезны, когда нужно отсеять «неподходящие» значения. Вместо одного ответа получается множество: интервалы, в которых условие истинно, а вне их — нарушается.



Как вид ответа зависит от дискриминанта и знака a



Сводная схема по трём случаям дискриминанта D для квадратного неравенства и влиянию знака коэффициента a (школьный курс алгебры).

При разных значениях дискриминанта меняется число действительных корней и количество промежутков решения. Знак a определяет, где парабола выше Ox и как ведёт себя выражение.

Диаграмма обобщает случаи: при $D < 0$ действительных корней нет, при $D = 0$ есть один двойной корень, при $D > 0$ появляются два корня и возможны объединения интервалов.

Проверка найденного ответа



Для проверки берут контрольное число из каждого найденного промежутка и подставляют его в исходное выражение. Если знак выражения совпадает с условием, промежуток выбран верно.



Когда корней два, такая проверка особенно помогает различать внутренние и внешние промежутки: легко перепутать направление знака, если отметки на прямой сделаны неаккуратно.

Ещё раз проверьте запись ответа: в строгих неравенствах границы не включаются, а в нестрогих — включаются только при нужном знаке. Это предотвращает потерю точек -2 и 2 (или других корней).



Итог по теме «Квадратные неравенства»

Квадратные неравенства решаются через корни, знаки и промежутки на числовой прямой. Парабола показывает, где выражение положительно, а где отрицательно. Выбирайте способ — дискриминант, таблица знаков, разложение или график — и точно записывайте ответ интервальными множествами.

