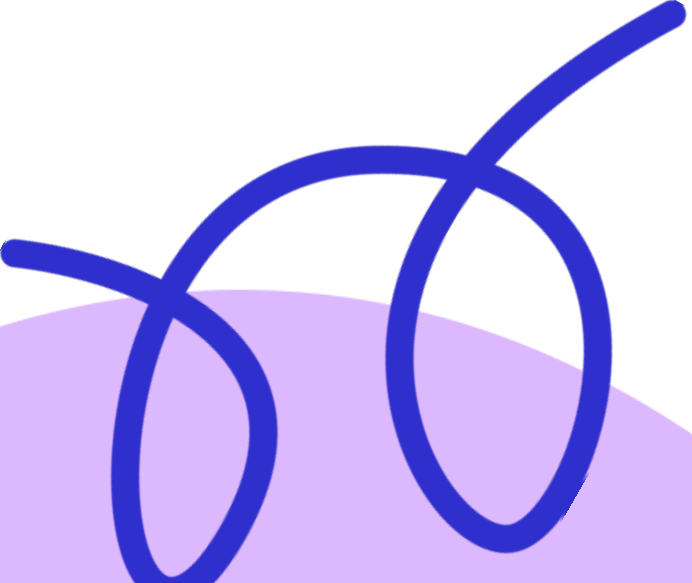
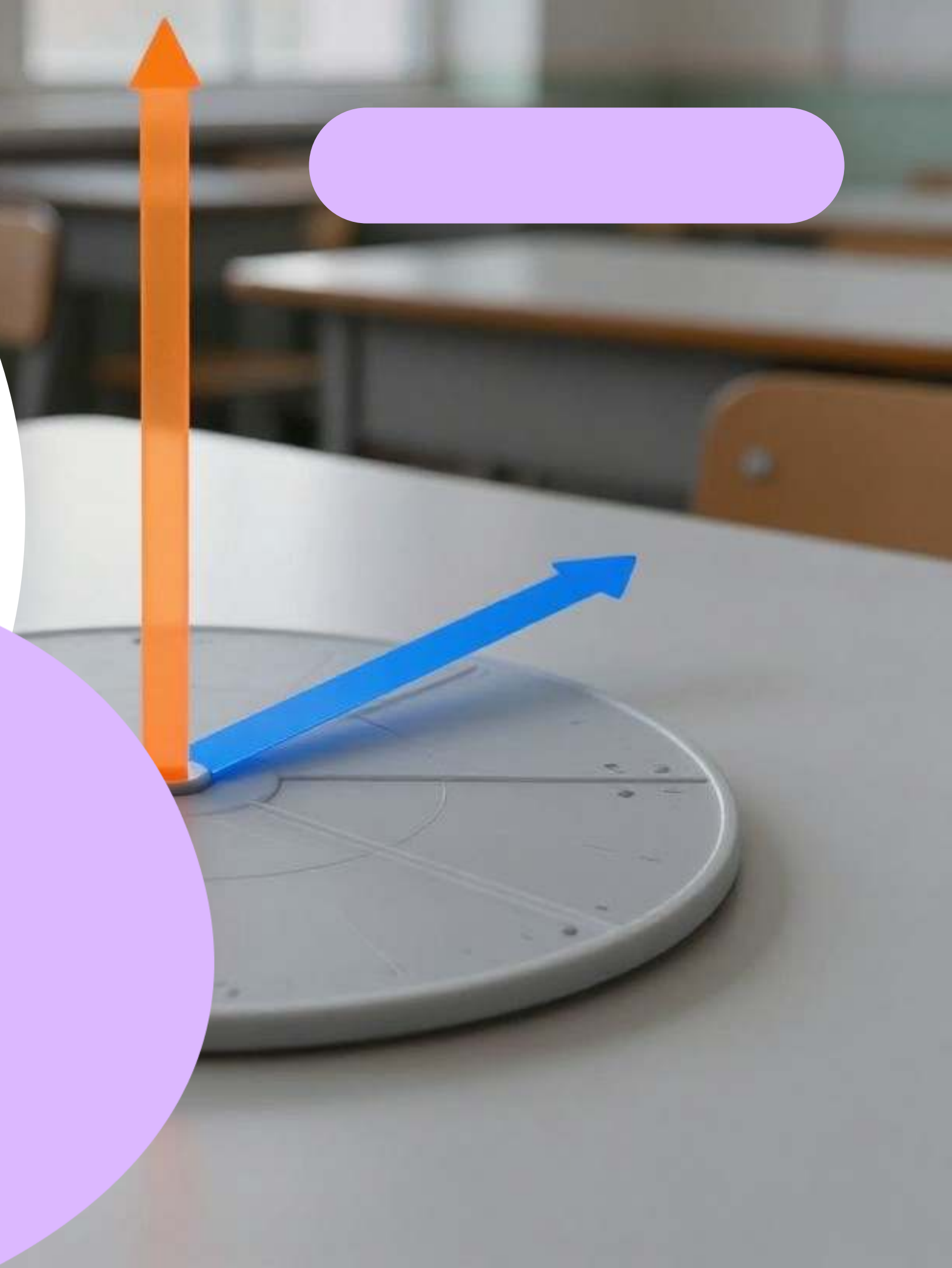


Основное тригонометрическое тождество и формулы приведения

Связь $\sin$ и $\cos$ и правила перехода между
углами на 90° , 180° , 270° , 360° .



Зачем это нужно в 9 классе

В 9 классе тригонометрия опирается на прямоугольный треугольник и окружность. Формулы приведения помогают быстро находить $\sin$ и $\cos$ для углов больше 90° , 180° и 270° , не выполняя новые вычисления.

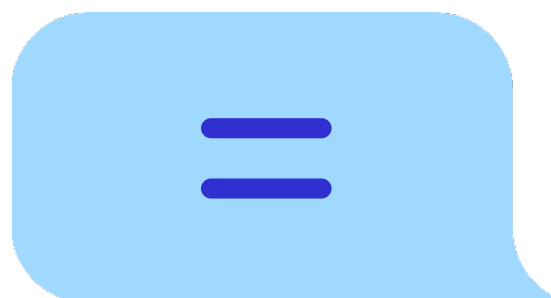


Единичная окружность: что показывают координаты



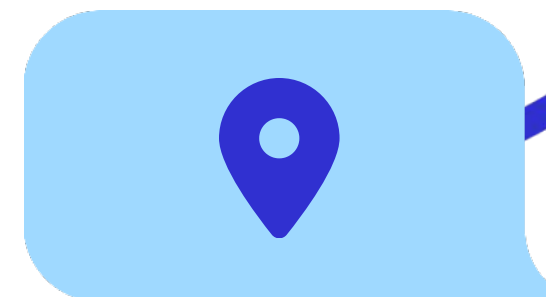
Радиус 1

На единичной окружности радиус равен 1. Поэтому расстояние от начала координат до точки точно соответствует этому числу, а координаты связаны одним уравнением.



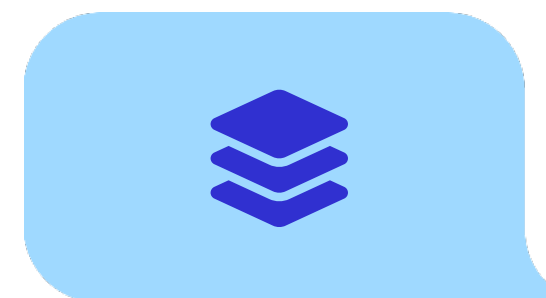
Связь координат

Так как $x^2 + y^2 = 1$ для любой точки окружности, подставляя $x = \cos x$ и $y = \sin x$, получаем тождество $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.



Координаты точки

Для угла x точка на окружности имеет координаты $(\cos x, \sin x)$. Это связывает геометрию окружности и алгебру тригонометрических функций.



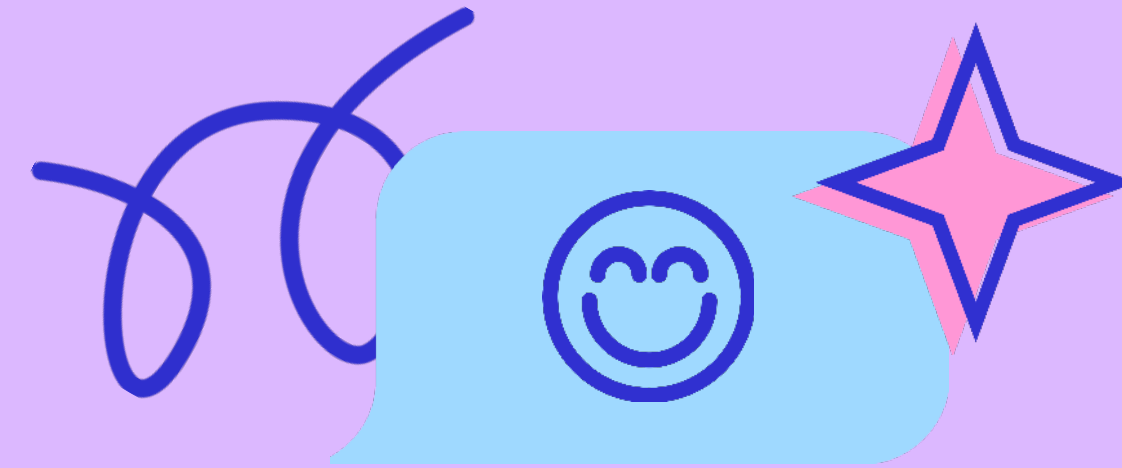
Знаки по четвертям

Окружность удобно делит плоскость на четверти. В каждой четверти координаты разных знаков, поэтому $\sin$ и $\cos$ могут быть положительными, отрицательными или равными нулю.

Связь с прямоугольным треугольником

1 Определения $\sin$ и $\cos$

В прямоугольном треугольнике для острого угла α синус равен отношению противолежащего катета к гипотенузе, а косинус — отношению прилежащего катета к гипотенузе.



2 Пифагор и тождество

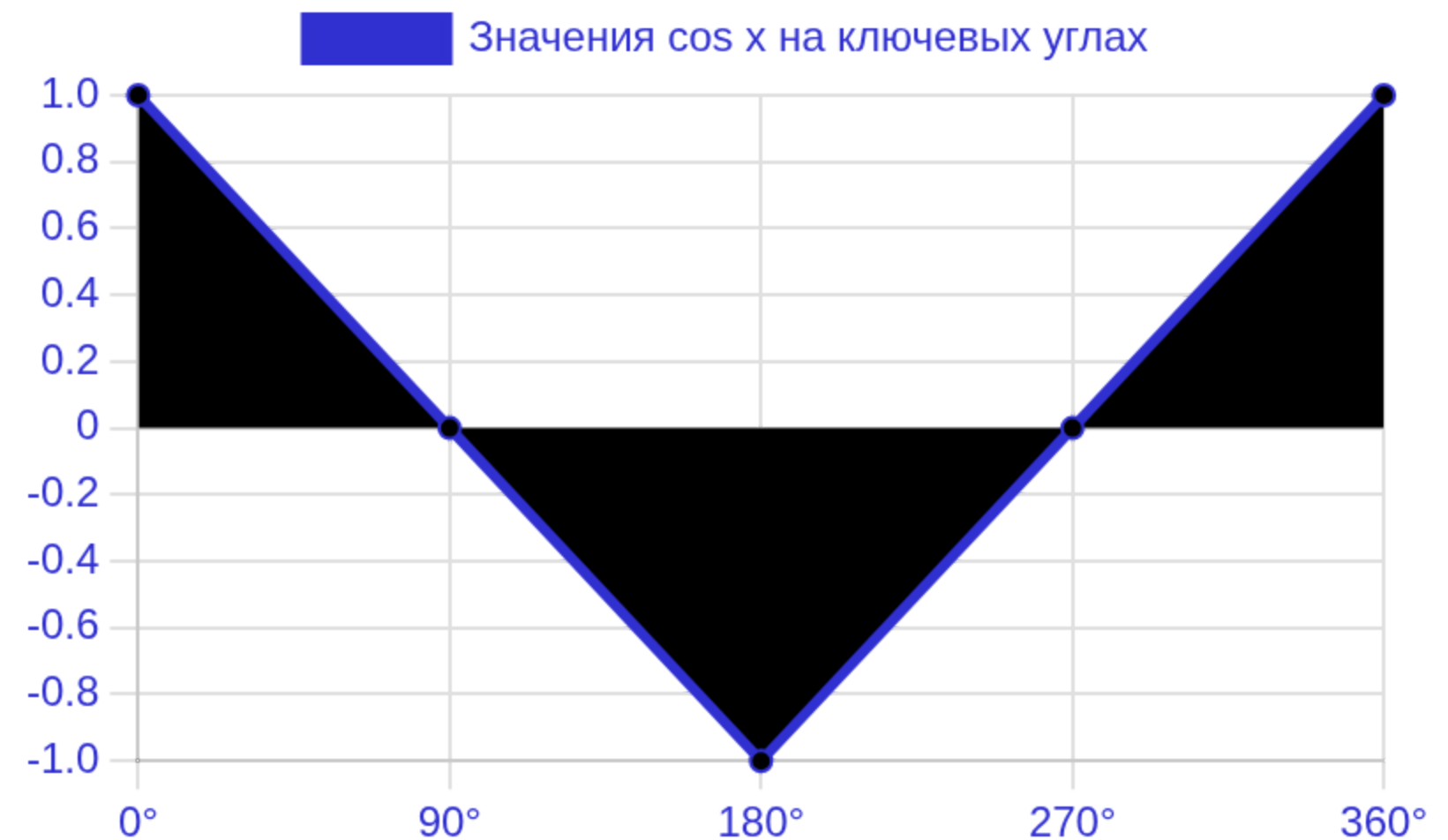
По теореме Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$. Делим обе части на c^2 и получаем $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ — то самое основное тригонометрическое тождество.

Ключевые точки единичной окружности



По оси абсцисс легко увидеть:
косинус равен 1, 0 или -1 в
отмеченных точках.

Когда угол попадает на разные
четверти, $\cos$ и $\sin$ меняют знак,
хотя «геометрический» смысл
координат сохраняется.



✦ Схема значений на единичной окружности, учебный материал по тригонометрии (без внешних данных).

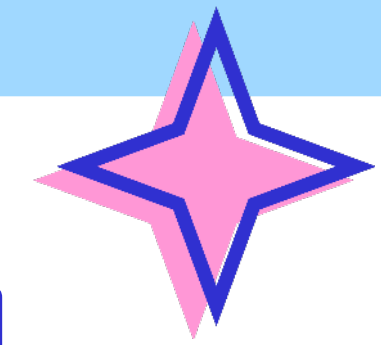


1

Сумма квадратов синуса и косинуса
для любого угла равна этому значению.

Учебные выводы из координат единичной окружности и теоремы
Пифагора.

Тождество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ верно при любых x , где синус и
косинус определены; оно помогает выразить одну
функцию через другую.



Знаки синуса и косинуса по четвертям

Используйте четверть, чтобы поставить правильный знак после приведения угла к острому виду.

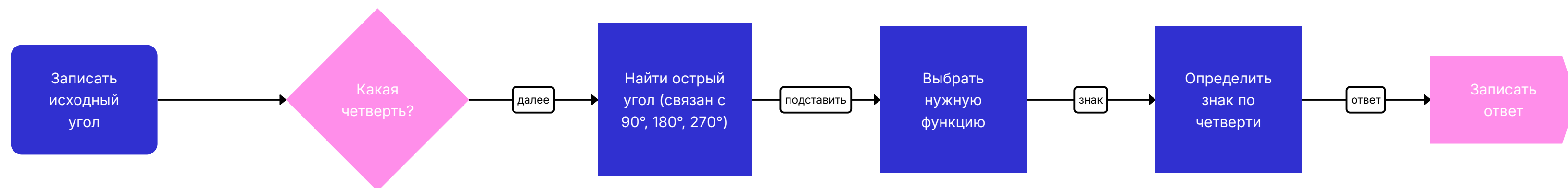
После приведения к острому углу знак $\sin$ и $\cos$ определяют по исходной четверти, а не по самой формуле.

Четверть	$\sin x$	$\cos x$
I	+	+
II	+	-
III	-	-
IV	-	+

✧ Координатная модель на единичной окружности.

Алгоритм применения формул приведения

Пошаговый порядок для углов, отличающихся от 90° , 180° , 270° и 360° .



Формулы приведения для синуса и косинуса



При переходе через 180° синус сохраняет значение по модулю: $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$. А при $\sin(180^\circ + \alpha)$ знак меняется: $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$.

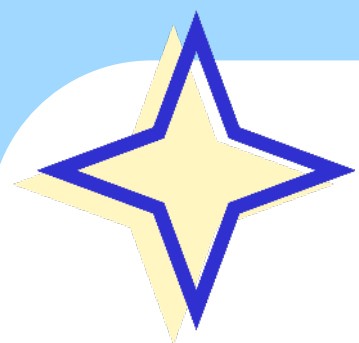


Для косинуса при тех же переходах тоже меняются знаки: $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ и $\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$. Так тождество сочетается с геометрией знаков по четвертям.

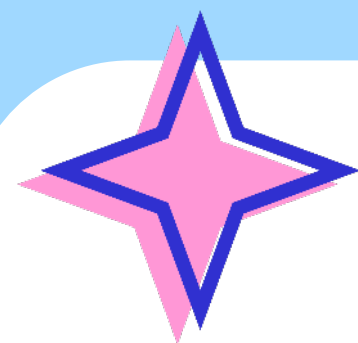


Если угол связан с 90° и 270° , то синус и косинус «обмениваются ролями»: $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$, а $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$. Это упрощает вычисления без калькулятора.

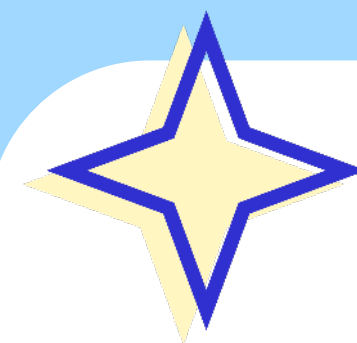
Формулы приведения для тангенса и котангенса



Тангенс и котангенс имеют период 180° , поэтому после прибавления 180° их значения повторяются: $\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$.



При отражении относительно осей меняется знак: $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$. Поэтому особенно важно правильно выбрать «острый» вариант угла.



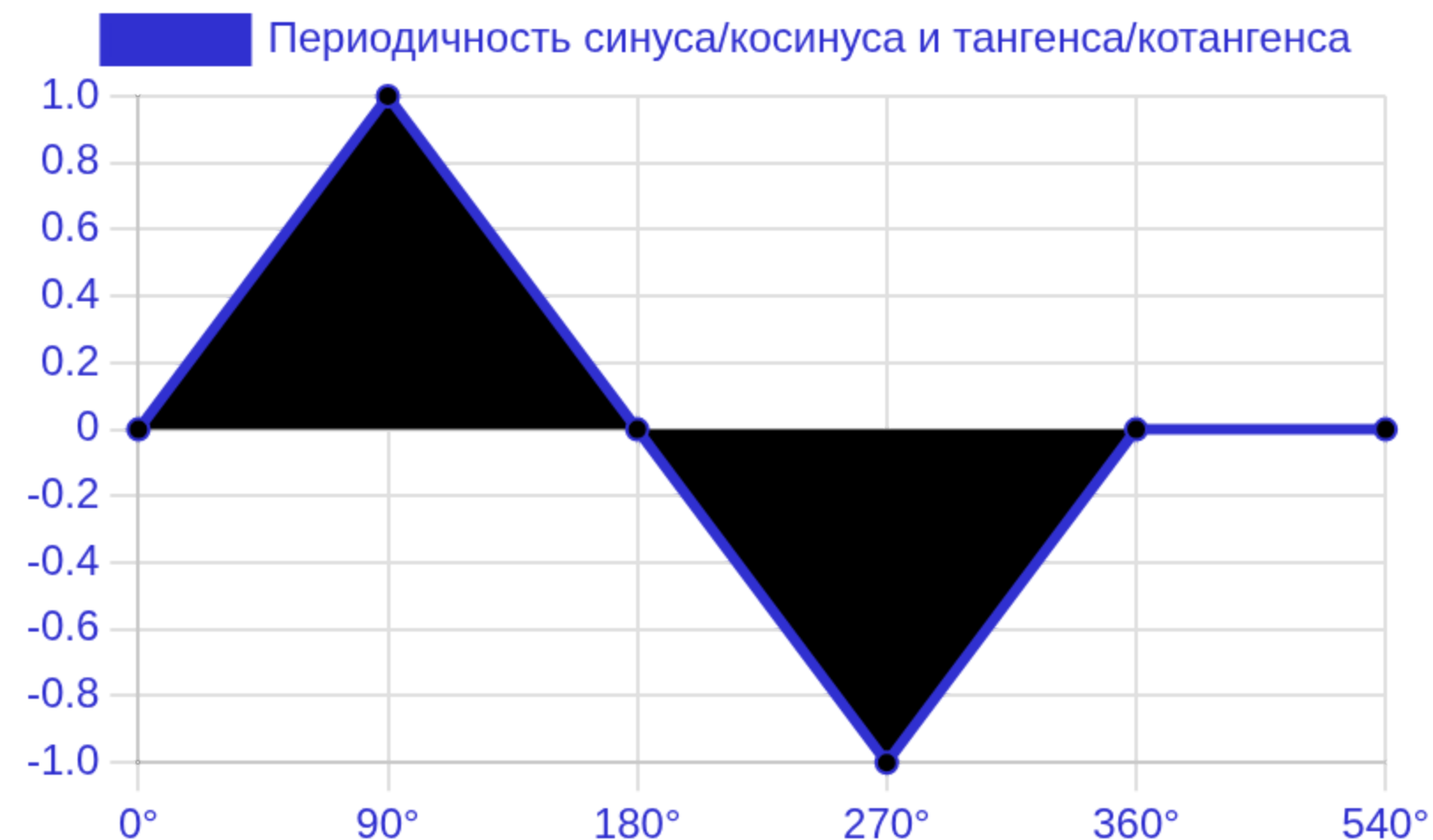
Практически это удобно для углов из II и III четвертей. Сначала приводят угол к форме с острым α , затем применяют знак из четверти и периодичность 180° .

Периодичность тригонометрических функций



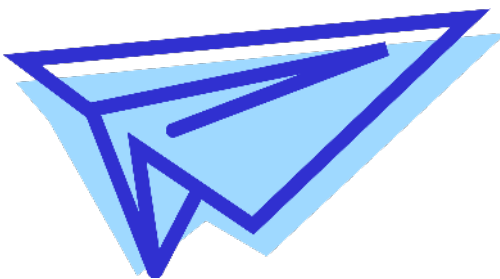
Синус и косинус повторяются через полный оборот 360° : их значения при x и $x+360^\circ$ совпадают. Это удобно для вычислений углов больше 180° .

График показывает: после 360° $\sin$ и $\cos$ возвращаются к тем же значениям, а поведение остальных функций связано с периодом 180° .



✦ Подготовлено автором по школьному курсу геометрии (9 класс), без внешних данных.

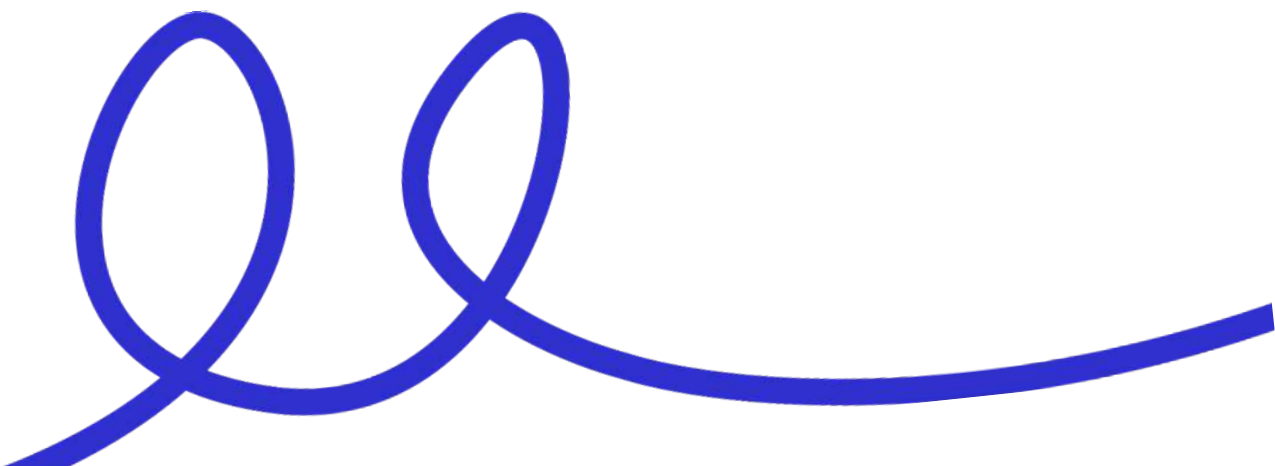
Сравнение преобразований для разных углов



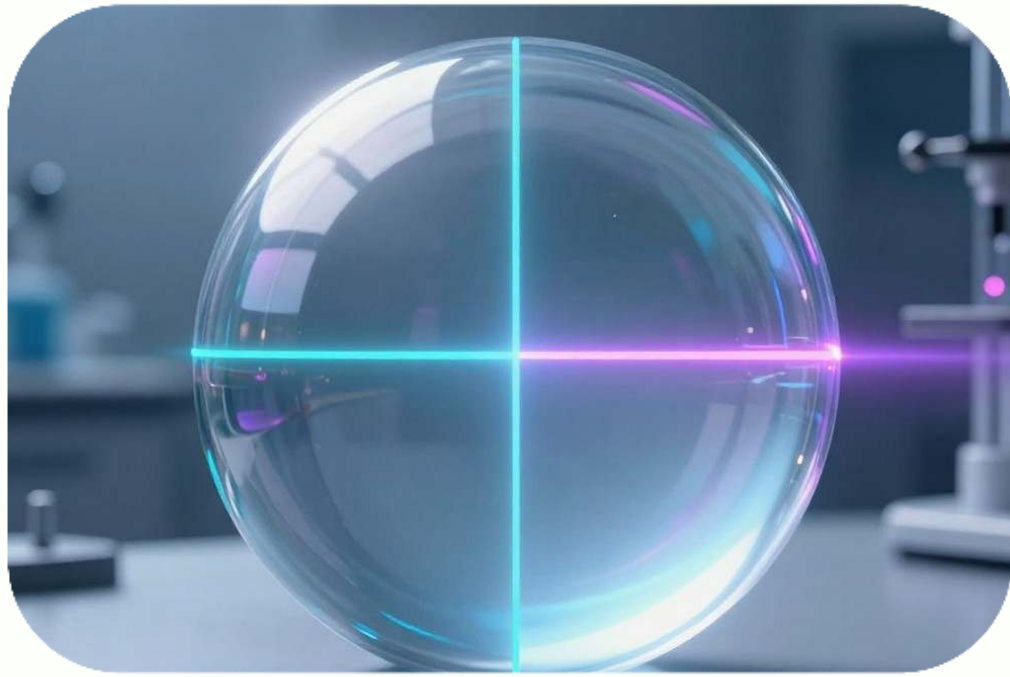
- Как меняются значения функций при поворотах на 90° , 180° , 270° и при полном круге 360° : сравните, что именно меняется — тип функции, знак или значение.
- Разные повороты «отвечают» за разные эффекты: 90° переключает $\sin$ и $\cos$, 180° влияет на знак, а 360° полностью возвращает исходное значение.

Переход	sin	cos	Краткий итог
90°	$\sin \leftrightarrow \cos$	$\cos \leftrightarrow \sin$	Меняется функция
180°	$ \sin $ сохраняется	cos меняет знак	Чаще меняется знак
270°	$\sin \leftrightarrow \cos$ (с четвертью)	$\cos \leftrightarrow \sin$ (с четвертью)	Переход между sin и cos
360°	sin возвращается	cos возвращается	Полное повторение

Обобщение по формулам приведения и периодичности тригонометрических функций (школьный курс).

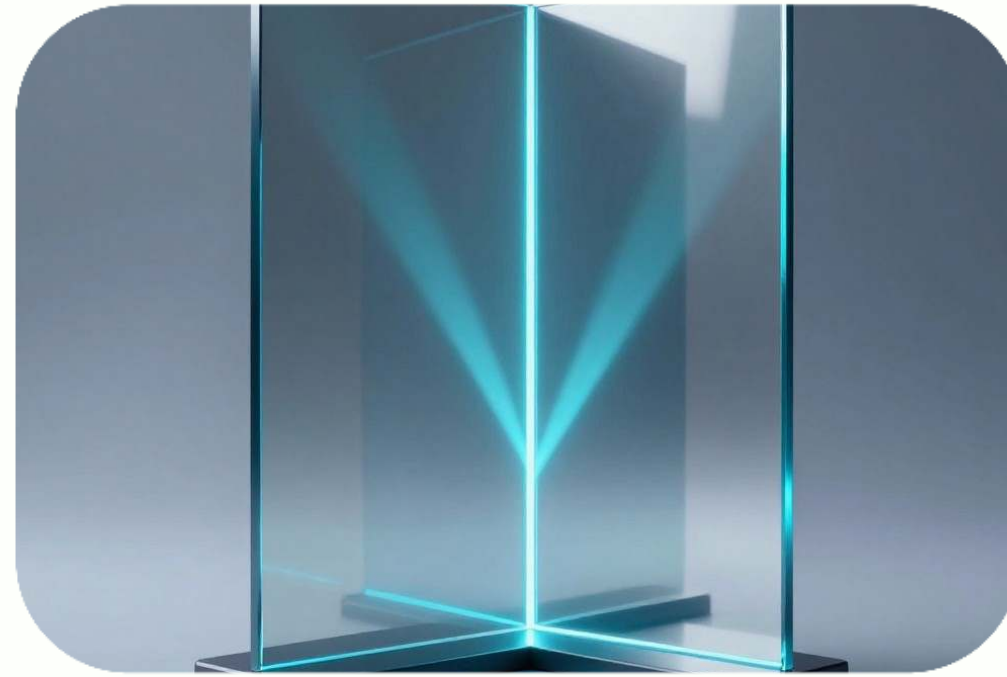


Частые ошибки в решениях: разбор типичных ловушек



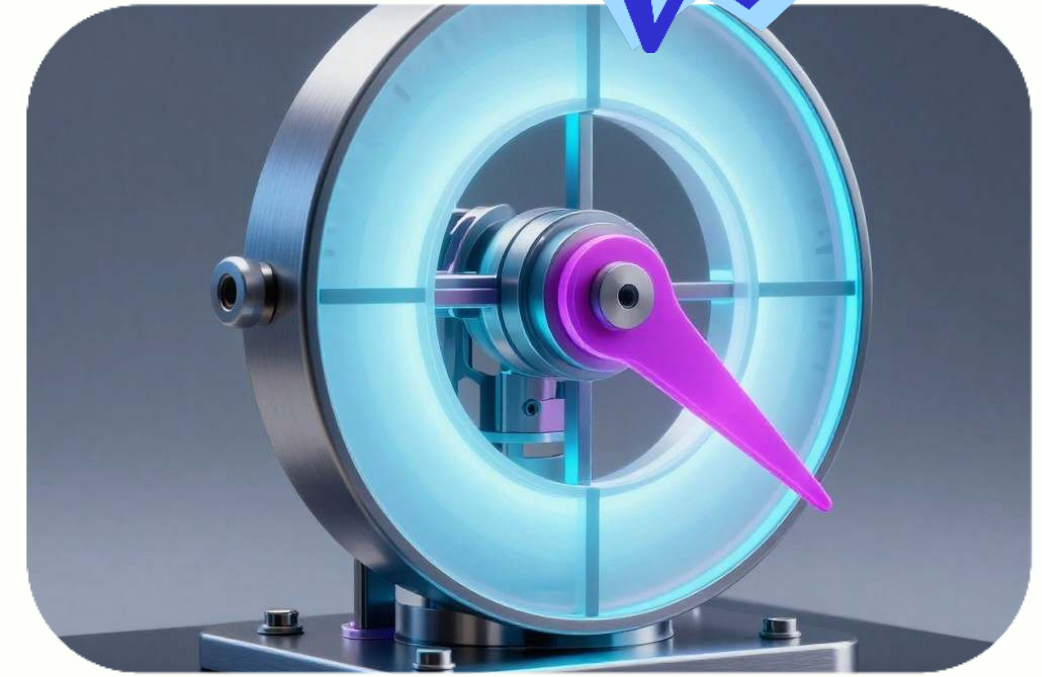
Знак по формуле, а не по четверти

Часто ученик видит выражение вида $\sqrt{1-\sin^2 x}$ и сразу ставит плюс. Но знак зависит от четверти, а не только от «модуля». Для одного и того же угла ответ может отличаться знаком, если неверно определена четверть.



Путают отражения возле 90°

Ошибка возникает, когда смешивают пары преобразований: $\sin(90^\circ - \alpha)$ и $\cos \alpha$, а также $\cos(90^\circ - \alpha)$ и $\sin \alpha$. Визуальная проверка по единичной окружности помогает: при переносе относительно вертикальной оси меняются роли синуса и косинуса.



Забывают период тангенса и котангенса

Многие считают, что tg и ctg повторяются через 360° , но это не так. Их период равен 180° . Из-за этого при вычислениях для углов во II и III четвертях легко получить значение с «лишним» отражением, хотя формулы приведения выбраны верно.

Примеры вычислений по формулам приведения



Выделяем острый угол: $150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$. Тогда $\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = 1/2$. Знак синуса берём по четверти.



Для $\cos 120^\circ$ используем $120^\circ = 180^\circ - 60^\circ$. Получаем $\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -1/2$. Минус появляется из формулы приведения.



Тангенс приводим через 180° : $225^\circ = 180^\circ + 45^\circ$. Значит $\operatorname{tg} 225^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ + 45^\circ) = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$. Период 180° позволяет сократить вычисления.

Котангенс при 330° приводим к острому углу: $330^\circ = 360^\circ - 30^\circ$. Поэтому $\operatorname{ctg} 330^\circ = \operatorname{ctg}(360^\circ - 30^\circ) = -\operatorname{ctg} 30^\circ = -\sqrt{3}$. Знак подтверждаем четвертью.



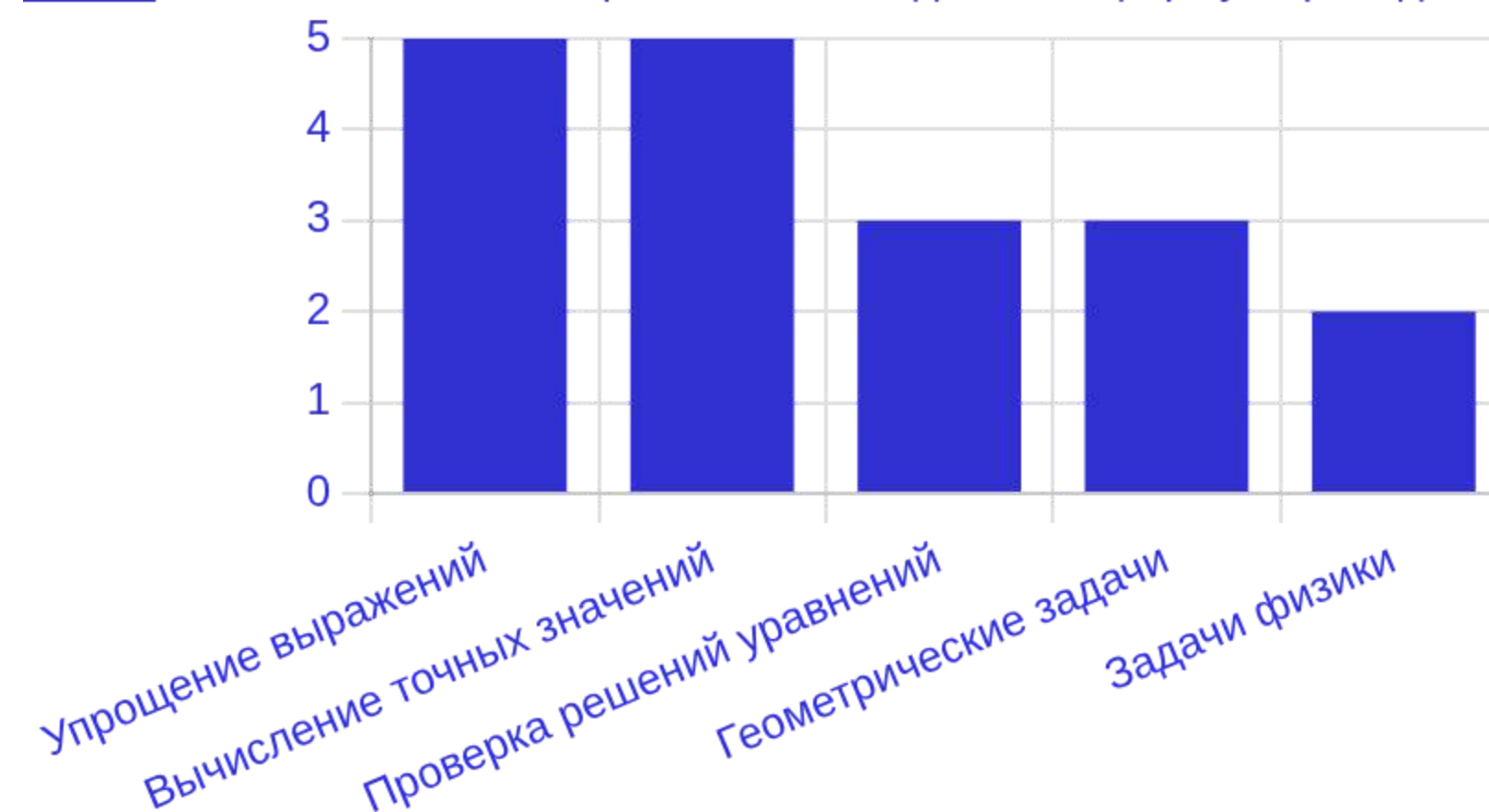
Где применяются тождество и формулы приведения



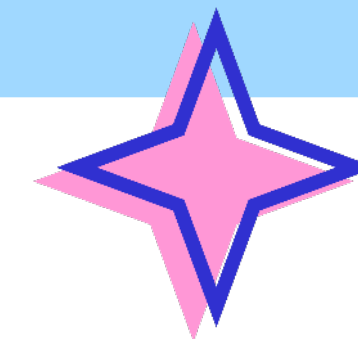
Формула $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ помогает связывать $\sin$ и $\cos$, а приведения — быстро находить значения для углов, которые «получаются» из 30° , 45° , 60° .

Столбцы показывают: чаще всего тема нужна для преобразований и точных вычислений без калькулятора, а остальное — для связи с геометрией и проверок.

■ Основные области применения тождества и формул приведения



✦ Обобщение по типам заданий из школьных учебников и практикумов (без числовых статистических подсчётов).



Мини-проверка знаний по теме

Ответьте на вопросы: тождество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, приведения для $\sin$ и tg , знаки по четвертям и значения на осях единичной окружности.

Задания охватывают ключевые элементы: тождество, приведения для углов, периоды $\operatorname{tg}/\operatorname{ctg}$, знаки по четвертям и значения на основных направлениях осей.

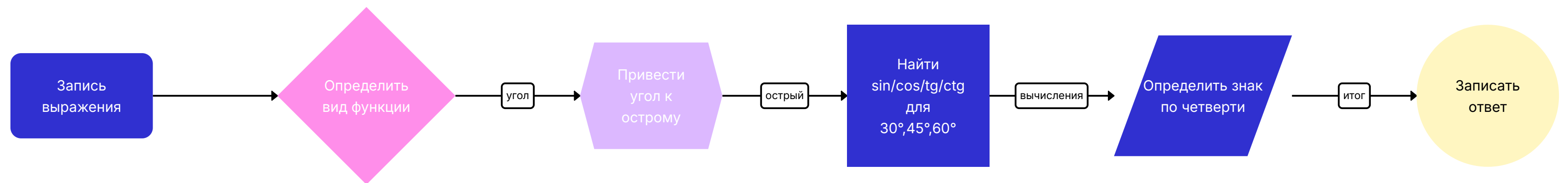
Задание	Что найти
1	$\sin^2 x + \cos^2 x$
2	$\cos(180^\circ - \alpha)$
3	$\operatorname{tg}(360^\circ + \alpha)$
4	знак $\sin$ (III четверть)
5	$\cos 270^\circ$



Составлено по материалам темы «Основное тригонометрическое тождество и формулы приведения» (уровень 9 класса).

Порядок решения тригонометрического выражения

Логика приведения: сначала «распознаём» угол, затем уменьшаем его до острого и только после этого ставим знак по четверти.



Связь темы с геометрическими задачами



Высоты и расстояния в планиметрии

Тригонометрические соотношения помогают находить неизвестные стороны и углы. В таких задачах удобно применять $\sin$ и $\cos$, а тождество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ используют как «связующее» равенство.



Углы в треугольнике

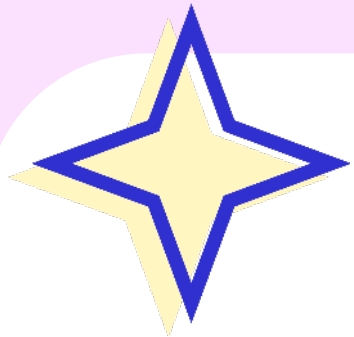
Когда в условии задан треугольник, формулы приведения ускоряют переход от сложных углов к известным. Это особенно полезно, если встречаются развернутые или дополнительные углы и нужно аккуратно учесть знаки.



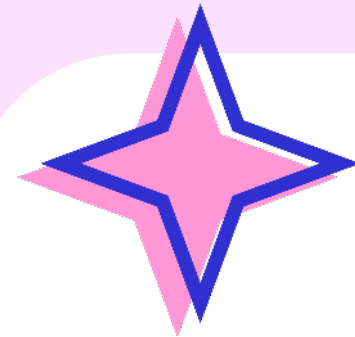
Упрощение вычислений

Во многих решениях требуется подставить значения тригонометрических функций. Формулы приведения уменьшают число вычислений и уменьшают риск ошибок, потому что один «острый» угол подставляется по типовой схеме.

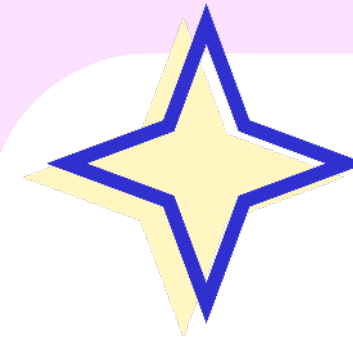
Что необходимо запомнить по теме



Главная формула: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Она справедлива для любого угла x , где определены $\sin x$ и $\cos x$, и помогает связывать две функции между собой.



Формулы приведения работают благодаря симметрии окружности и повторяемости значений. При переходе к 90° , 180° , 270° и 360° меняются либо знак, либо роли $\sin$ и $\cos$, либо оба эффекта.



Для правильного ответа выполните три шага: определить острый угол, выбрать нужную тригонометрическую функцию и поставить знак по четверти. Тогда преобразования становятся надёжными.



Тригонометрия становится понятной и управляемой

Основное тождество связывает $\sin$ и $\cos$ любого угла, а формулы приведения позволяют быстро переходить к вычислениям для углов, связанных с 90° и 180° . Вместе они — база для дальнейших выражений, уравнений и геометрических задач.