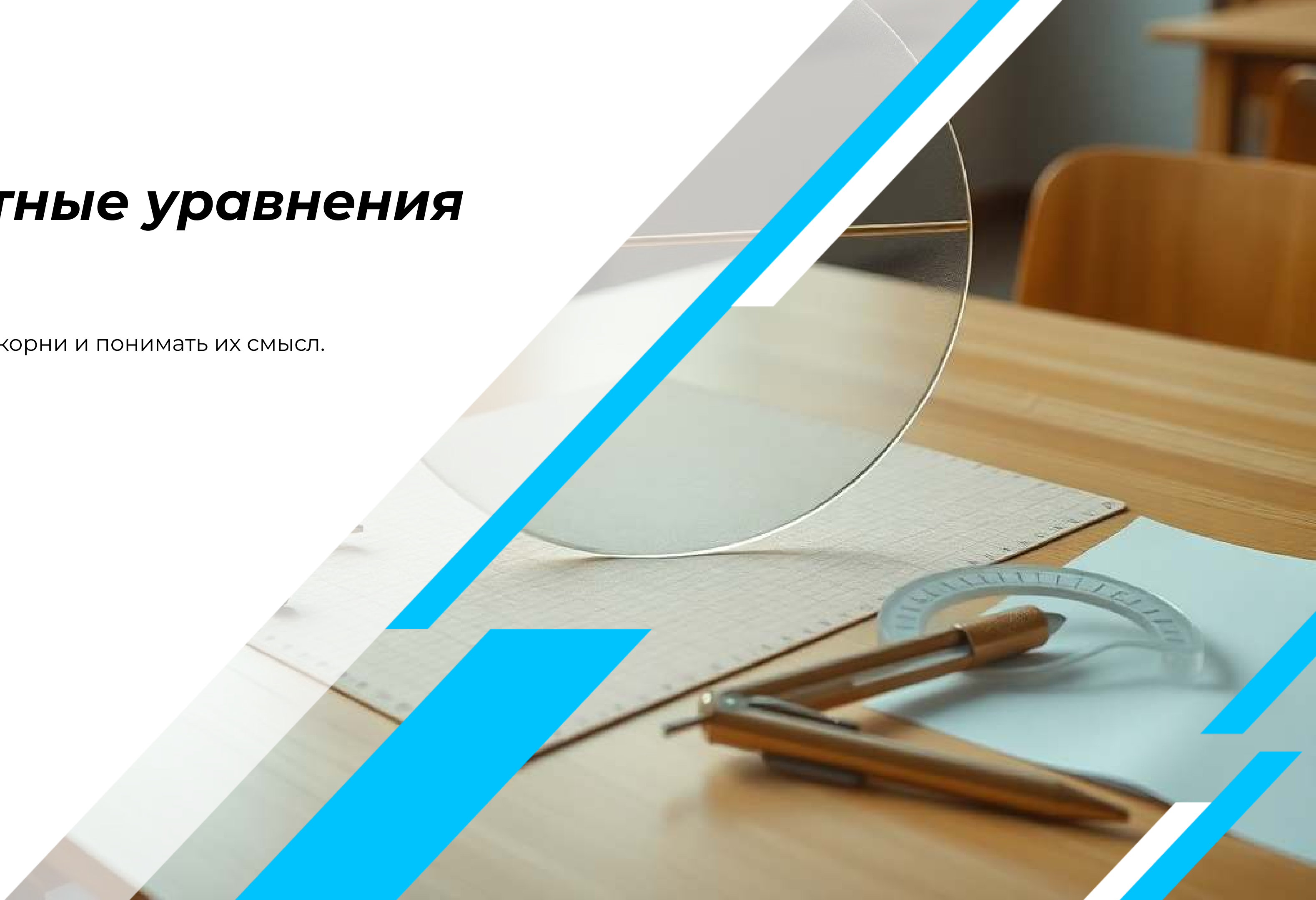


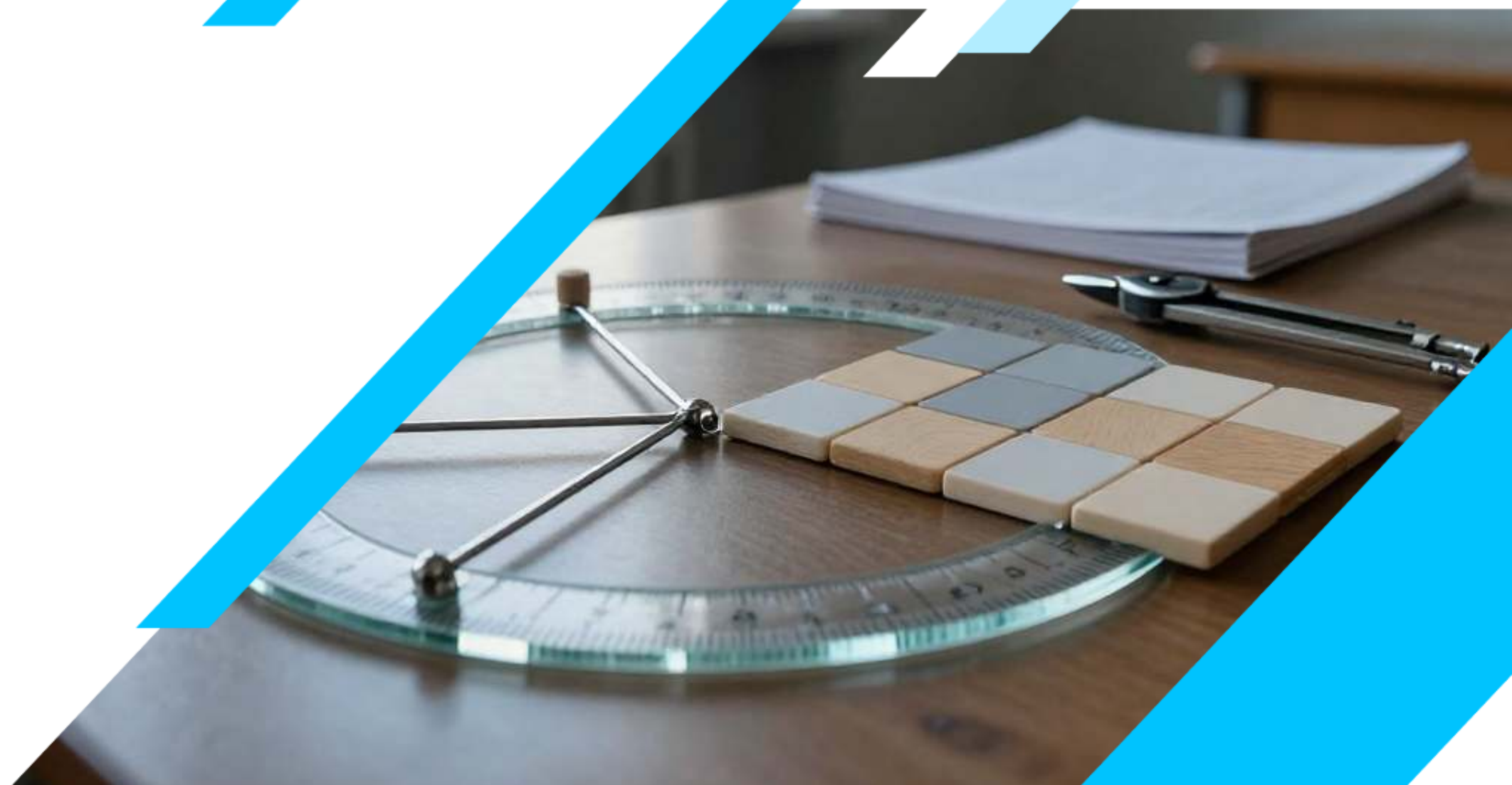
Квадратные уравнения

Научимся находить корни и понимать их смысл.



Зачем нужны квадратные уравнения

Эта тема показывает, как уравнения второй степени помогают решать задачи на числа, движение и геометрию, а ещё учит внимательно работать с формулами и проверкой ответа.



Вид квадратного уравнения и его коэффициенты

1

Стандартная запись

Квадратное уравнение записывают в виде $ax^2 + bx + c = 0$. Именно такая форма помогает сразу увидеть все части выражения и выбрать способ решения.

2

Старший коэффициент

Коэффициент a стоит при x^2 и обязательно не равен нулю. Если $a = 0$, уравнение уже не будет квадратным, а станет более простым по виду.

3

Коэффициенты b и c

Коэффициент b показывает, сколько раз входит x , а c называют свободным членом. Оба числа влияют на то, сколько корней может иметь уравнение и как оно выглядит.

4

Примеры записей

Например, уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$, $2x^2 + 3x - 2 = 0$ и $-x^2 + 4 = 0$ уже можно распознавать как квадратные по их виду.

Как выглядит квадратное уравнение на графике

Парабола

График функции $y = ax^2 + bx + c$ имеет форму параболы. По её расположению можно понять, как ведёт себя квадратное уравнение и сколько у него решений.

Точки пересечения

Если парабола пересекает ось Ox в двух точках, уравнение имеет два действительных корня. Каждая точка пересечения соответствует одному значению x .

Касание оси

Когда парабола касается оси Ox только в одной точке, уравнение имеет один корень. Это означает, что оба найденных значения совпадают.

Отсутствие пересечений

Если график не пересекает ось Ox , действительных корней нет. В этом случае уравнение нельзя решить подбором точек на оси, потому что нужных пересечений не существует.



Основные элементы квадратного уравнения

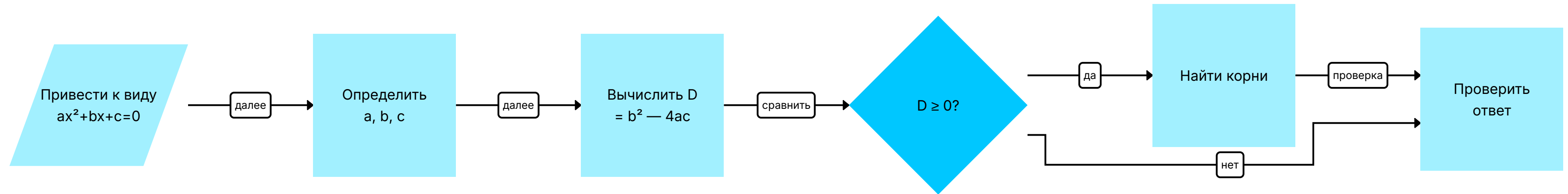
Таблица показывает, как обозначения в уравнении связаны с решением и количеством корней.

Главное значение имеют коэффициенты и дискриминант: они помогают понять форму уравнения и заранее оценить число корней.

Элемент	Обозначение	Роль
Стандартный вид	$ax^2+bx+c=0$	Основа записи
Старший коэффициент	a	Определяет тип
Свободный член	c	Влияет на корни
Дискриминант	D	Показывает число корней

Общий алгоритм решения квадратного уравнения

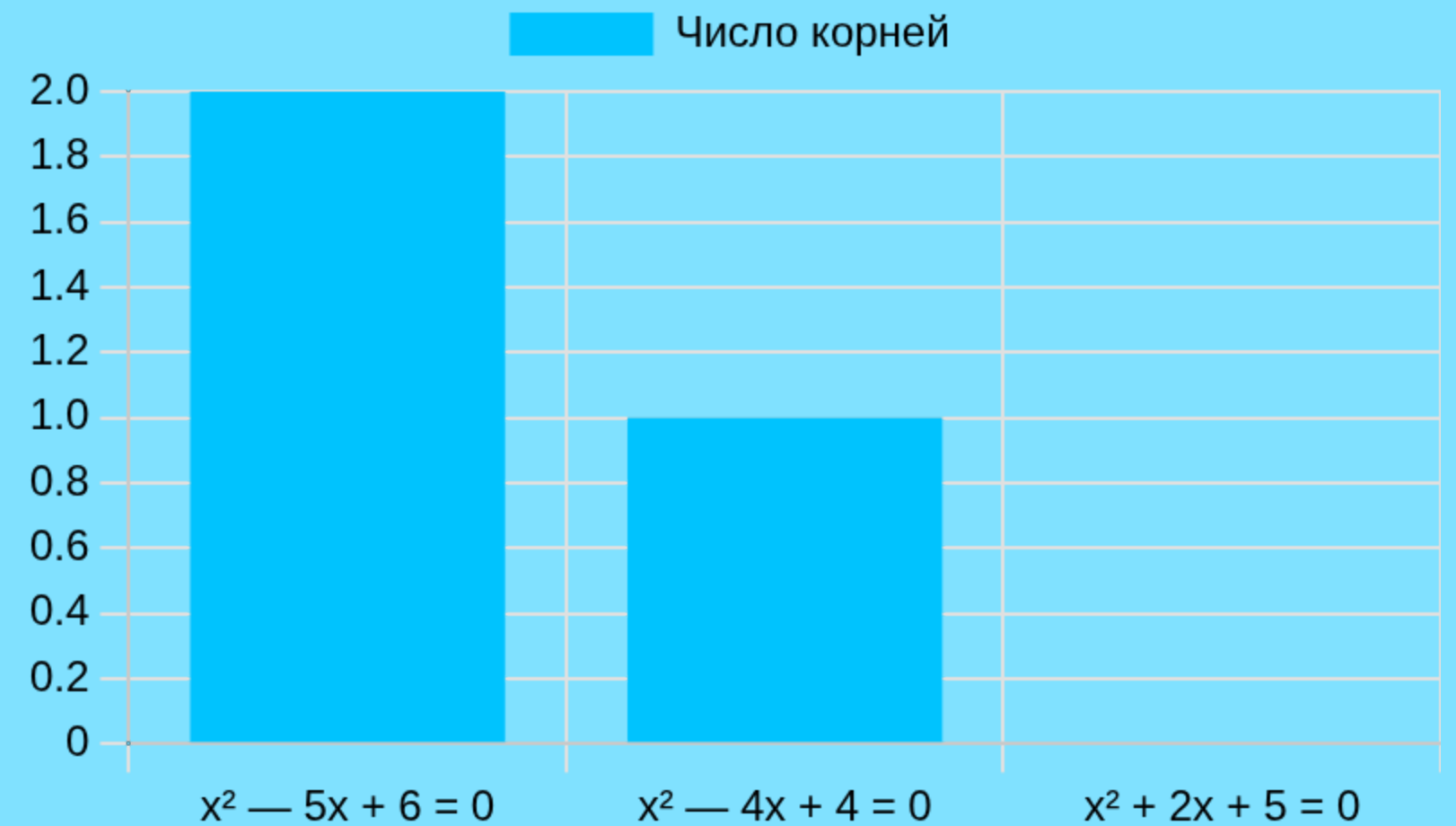
Последовательность действий при работе с уравнением второй степени



Что показывает дискриминант

Три примера показывают, как по одному числу можно быстро понять, сколько действительных корней имеет уравнение.

Дискриминант позволяет заранее определить результат: два корня, один корень или отсутствие действительных решений.



Формула дискриминанта и формулы корней

1

Находим дискриминант

Сначала вычисляют дискриминант по формуле $D = b^2 - 4ac$. Это число помогает понять, есть ли у уравнения действительные корни и сколько их будет.

2

Случай двух корней

Если D больше нуля, используют формулы $x_1 = (-b + \sqrt{D}) / 2a$ и $x_2 = (-b - \sqrt{D}) / 2a$. Тогда уравнение имеет два различных корня.

3

Случай одного корня

Если $D = 0$, получается один корень: $x = -b / 2a$. В таком случае два возможных значения совпадают, поэтому записывают только одно число.

Неполные квадратные уравнения

Когда $c = 0$

Если свободный член равен нулю, уравнение имеет вид $ax^2 + bx = 0$. Его удобно решать вынесением x за скобки, а затем приравниванием каждого множителя к нулю.

Когда $b = 0$

Если отсутствует член с x , получаем вид $ax^2 + c = 0$. Сначала переносят свободный член, а затем находят x из полученного выражения.

Когда $b = 0$ и $c = 0$

В самом простом случае остаётся $ax^2 = 0$. Тогда единственный корень — $x = 0$, потому что только это значение обращает выражение в ноль.

Решение через разложение на множители

1

Ищем разложение

Некоторые уравнения можно представить как произведение двух скобок. Например, $x^2 - 5x + 6 = 0$ удобно записать в виде $(x - 2)(x - 3) = 0$.

2

Приравниваем к нулю

Если произведение равно нулю, то хотя бы один множитель должен быть равен нулю. Поэтому получаем два простых уравнения: $x - 2 = 0$ и $x - 3 = 0$.

3

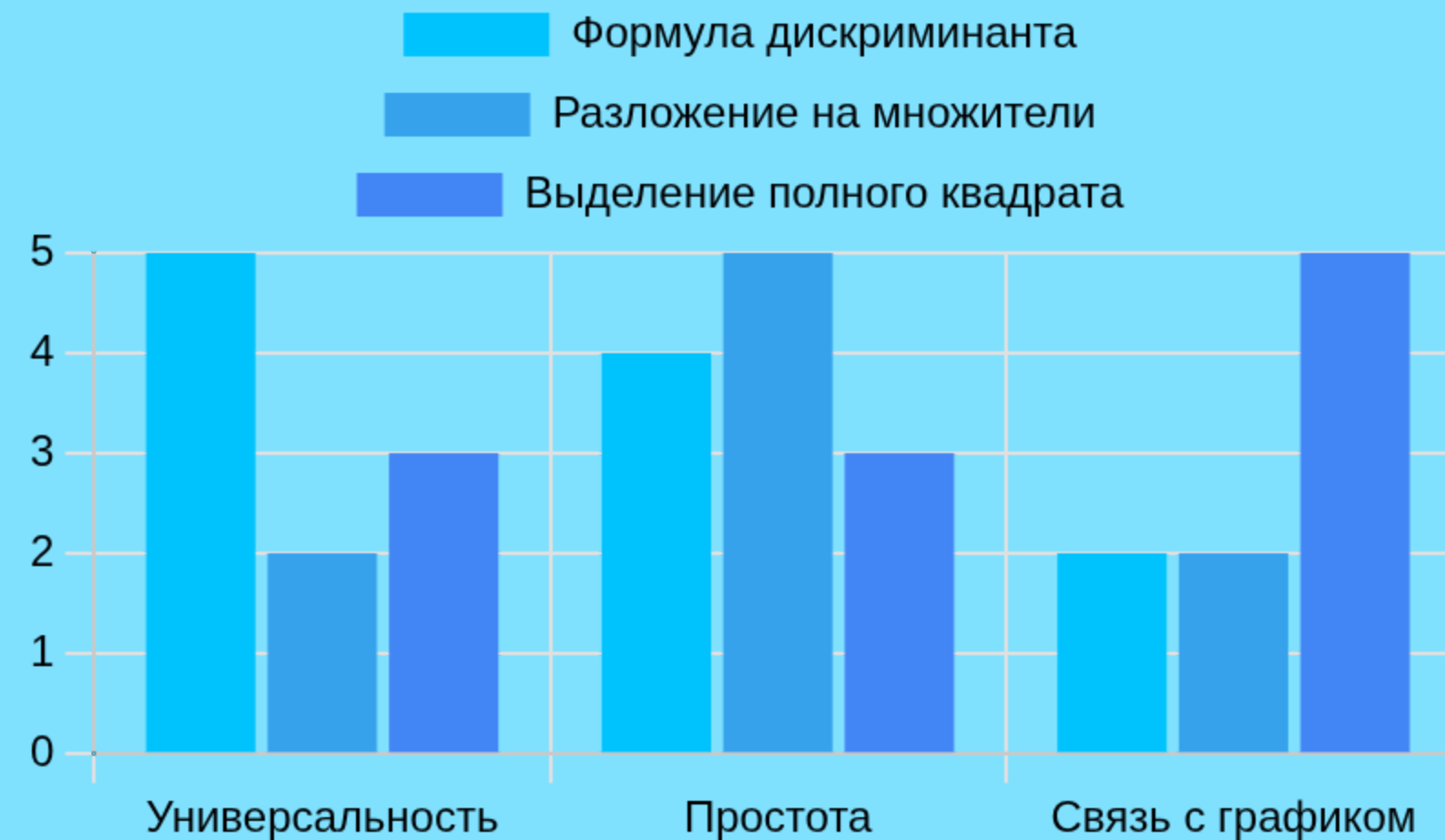
Получаем корни

Из каждого уравнения находим свой корень: $x = 2$ и $x = 3$. Этот способ особенно удобен, когда числа в скобках можно быстро подобрать.

Сравнение способов решения квадратных уравнений

Выбор способа зависит от вида уравнения и цели решения: иногда важен быстрый ответ, иногда — удобное преобразование выражения.

Формула дискриминанта наиболее универсальна, разложение — самое быстрое для простых случаев, а полный квадрат лучше показывает структуру выражения.



Квадратное уравнение и парабола

$y = ax^2 + bx + c$

1

Коэффициент a

Знак коэффициента a определяет направление ветвей параболы: при положительном значении они направлены вверх, при отрицательном — вниз. От него также зависит, насколько «узкой» или «широкой» будет кривая.

2

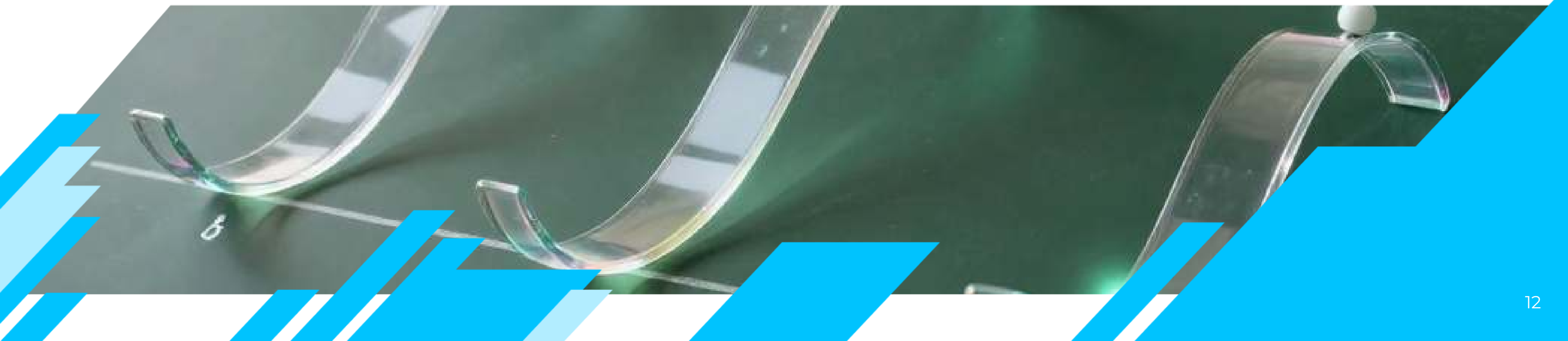
Коэффициенты b и c

Коэффициенты b и c сдвигают параболу на координатной плоскости. Они влияют на положение вершины и точку пересечения графика с осью Oy , но не меняют сам тип кривой.

3

Нули и корни

Точки пересечения графика с осью Ox совпадают с корнями уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Если пересечений нет, действительных корней тоже нет, а ось симметрии помогает увидеть расположение вершины.



Как проверять найденные корни



Подстановка в уравнение

Каждый найденный корень нужно подставить в исходное уравнение и убедиться, что левая часть равна нулю. Это самый надёжный способ проверить правильность ответа после вычислений.



Проверка после преобразований

Особенно важно проверять ответ, если уравнение сначала упрощали, раскрывали скобки или переносили слагаемые. В таких случаях легко допустить ошибку в знаке или в арифметике.



Внимание к дробям и скобкам

При уравнениях с дробями или несколькими скобками подстановка помогает быстро заметить пропущенный множитель, неверное сокращение или ошибку при вычислении числителя и знаменателя.

Типичные квадратные уравнения и их ответы

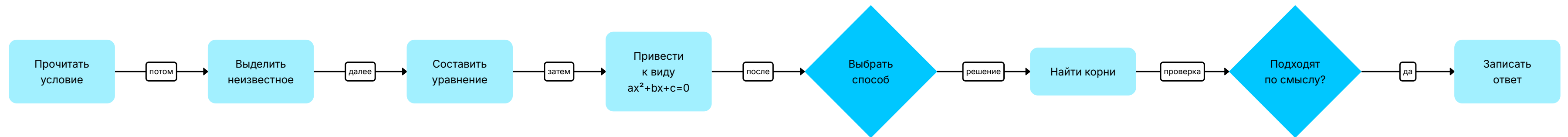
Уравнение	Способ	Корни	Корней
$x^2 - 9 = 0$	разность квадратов	-3, 3	2
$x^2 - 4x = 0$	вынесение x	0, 4	2
$x^2 - 6x + 9 = 0$	полный квадрат	3	1
$2x^2 + 5x + 2 = 0$	дискриминант	-2, $-\frac{1}{2}$	2

В таблице показаны примеры, которые помогают увидеть, как разные формы уравнений приводят к нахождению корней разными способами.

Один и тот же тип уравнения можно решать разными приёмами, но результат всегда один: найти значения x, при которых выражение обращается в ноль.

Как решать задачу с квадратным уравнением

Алгоритм составлен по шагам решения текстовой задачи в курсе алгебры 8 класса.



Типичные ошибки при решении

1

Неверные коэффициенты

Одна из самых частых ошибок — неправильно определить a , b и c после раскрытия скобок или переноса слагаемых. Из-за этого дальше неверно считается дискриминант и получаются неправильные корни.

2

Потерянный минус

Нужно внимательно следить за знаками в формуле дискриминанта и в формулах корней. Пропущенный минус часто меняет ответ полностью, хотя вычисления выглядят почти верно.

3

Лишний корень

Если дискриминант равен нулю, уравнение имеет только один корень. Ошибка возникает, когда по привычке записывают два разных ответа, хотя они совпадают.

4

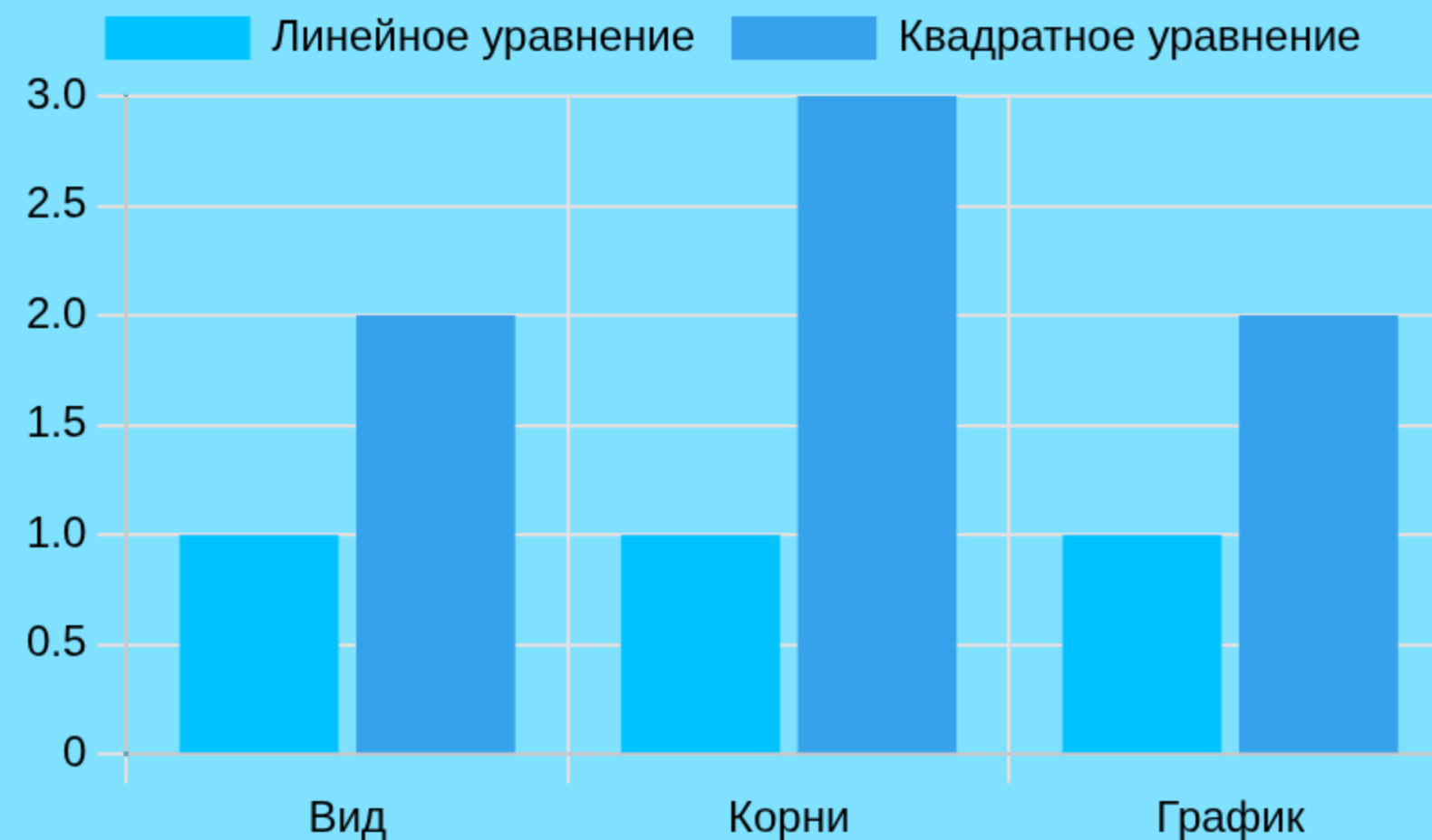
Нет проверки по условию

После нахождения корней важно убедиться, что они подходят к текстовой задаче. Иногда математический ответ верный, но по смыслу задачи он не может быть принят.

Сравнение квадратного и линейного уравнения

Линейные и квадратные уравнения по-разному описывают зависимость между величинами, поэтому требуют разных приёмов решения и разных графиков.

Квадратное уравнение сложнее линейного: оно может иметь несколько вариантов ответа и показывает переход к более богатым моделям.



Где применяются квадратные уравнения

Геометрические задачи

Квадратные уравнения помогают находить стороны прямоугольника, если известны площадь и периметр. Также они встречаются в задачах на площадь фигур и построение геометрических моделей.

Движение и числа

Их используют в задачах на движение, когда время или расстояние выражаются через квадратное соотношение. Ещё они появляются в заданиях про числа с заданной суммой и произведением.

Графики и функции

При изучении функций квадратные уравнения связывают алгебру с графиком параболы. Это помогает понимать, как уравнение отражается на форме графика и где расположены его нули.

Связь темы с другими разделами алгебры

Формулы сокращённого умножения

Квадратные уравнения часто решают через преобразование выражений с помощью формул сокращённого умножения. Эти приёмы помогают быстро замечать удобную форму для разложения на множители.

Функции и графики

Тема напрямую связана с функцией $y = ax^2 + bx + c$. Через график легче увидеть число корней, положение вершины и влияние коэффициентов на форму параболы.

Подготовка к новым темам

Работа с квадратными уравнениями развивает умение преобразовывать выражения и выбирать способ решения. Эти навыки понадобятся при изучении квадратных неравенств, систем уравнений и задач с параметрами.

Главное о квадратных уравнениях

Квадратные уравнения учат видеть структуру выражения, выбирать удобный способ решения и проверять ответ. Дискриминант, разложение на множители и связь с параболой делают тему важной и полезной.