

Степенная функция с натуральным показателем

Изучаем, как показатель меняет вид графика.



Степенная функция: от формулы к графику

Степенная функция показывает, как один показатель меняет форму графика, симметрию и поведение при отрицательных значениях.



Зачем изучать степени

1

Связь с графиком

Одна и та же формула при разных показателях даёт разные графики. Это помогает увидеть связь между записью функции и её поведением на координатной плоскости.

3

Опорные признаки

Точки пересечения с осями и значения при $x < 0$ позволяют быстро проверять построение. Эти признаки особенно полезны, когда график нужно распознать без вычислений.

2

Чётность степени

Чётность степени определяет симметрию и знак значений слева от нуля. Именно поэтому графики при чётных и нечётных n выглядят по-разному.

4

Три эталона

Сравнение $n=1,2,3$ показывает, как усложняется форма: от прямой к кривой и далее к S-образному графику. Так легче запомнить семейство функций.

Определение и примеры

Общий вид

Степенная функция натурального показателя записывается как $f(x)=x^n$, где n — число 1, 2, 3 и далее. Такой вид функции изучают прежде всего на целых положительных степенях.

Простые примеры

При $n=1$ получается $f(x)=x$. При $n=2$ имеем $x \cdot x$, а при $n=3$ — $x \cdot x \cdot x$. Каждая следующая степень меняет поведение графика заметнее.

Что не рассматриваем

Для $n=0$ выражение равно 1 при $x \neq 0$, но в этом уроке основное внимание уделяется именно натуральным показателям, начиная с единицы.

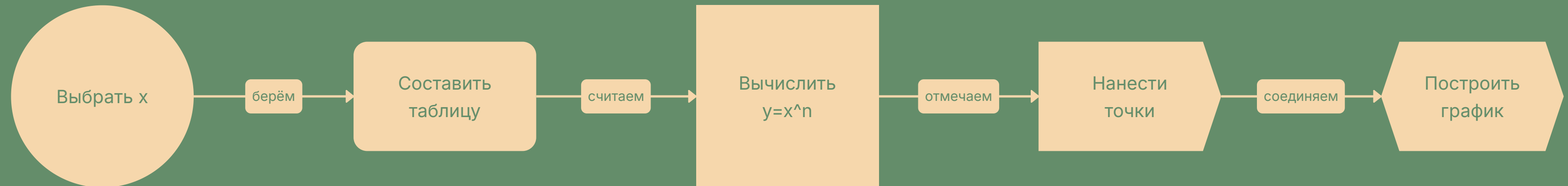
Почему это важно

Изменяя только показатель, можно наблюдать, как одна и та же запись превращается в разные кривые. Это и есть главный смысл темы.

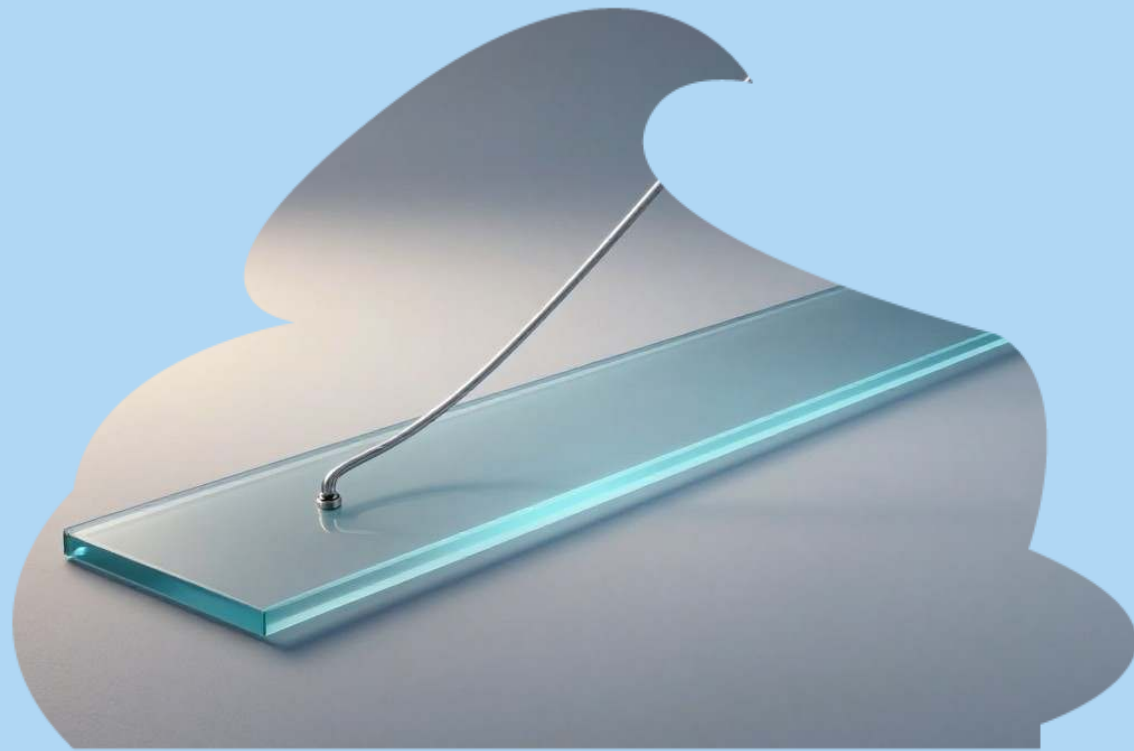


Как строят график по таблице

Построение по нескольким опорным значениям помогает увидеть форму функции без лишних выкладок.



Эталонные случаи: 1, 2, 3



Прямая для $n=1$

При $n=1$ функция становится самой простой: $y=x$. Это прямая линия, которая проходит через начало координат и одинаково поднимается вправо и вниз влево.



Парабола для $n=2$

При $n=2$ график изгибается вверх и образует U-образную форму. Он касается оси Ox в точке $(0,0)$, а по обе стороны от нуля значения остаются положительными.



Кубическая кривая для $n=3$

Чётные и нечётные степени

1

Одинаковые значения

Чётная степень сохраняет одинаковые значения для x и $-x$. Поэтому график можно мысленно сложить пополам по оси Oy , и обе части совпадут.

2

Плюс слева от нуля

У чётных степеней отрицательное число в возведении в степень даёт положительный результат. Например, при $x=-2$ и $n=2$ получается 4, а при $n=4$ — ещё больше положительное число.

3

Сохранение знака

Нечётная степень ведёт себя иначе: знак числа сохраняется. Поэтому слева от нуля график оказывается ниже оси Ox , а справа — выше.

4

Симметрия по началу

Для нечётных n график симметричен относительно начала координат. Это значит, что точке справа от нуля соответствует такая же по форме точка слева, но с противоположным знаком.

Основные свойства графика

Запомним базовые точки и поведение функции $y=x^n$ при натуральном n .

У всех степеней график проходит через начало координат; значение в точке -1 зависит от чётности показателя.

Свойства функции $y=x^n$ при натуральном n

Свойство	Значение
Область определения	все x
$x=0$	0
$x=1$	1
$x=-1$	± 1

Где функция растёт и убывает

Нечётные степени

Если показатель нечётный, график идёт слева направо без разворота. С ростом x значение функции тоже растёт, поэтому такая функция возрастает на всей числовой прямой.

Смотрим на точки

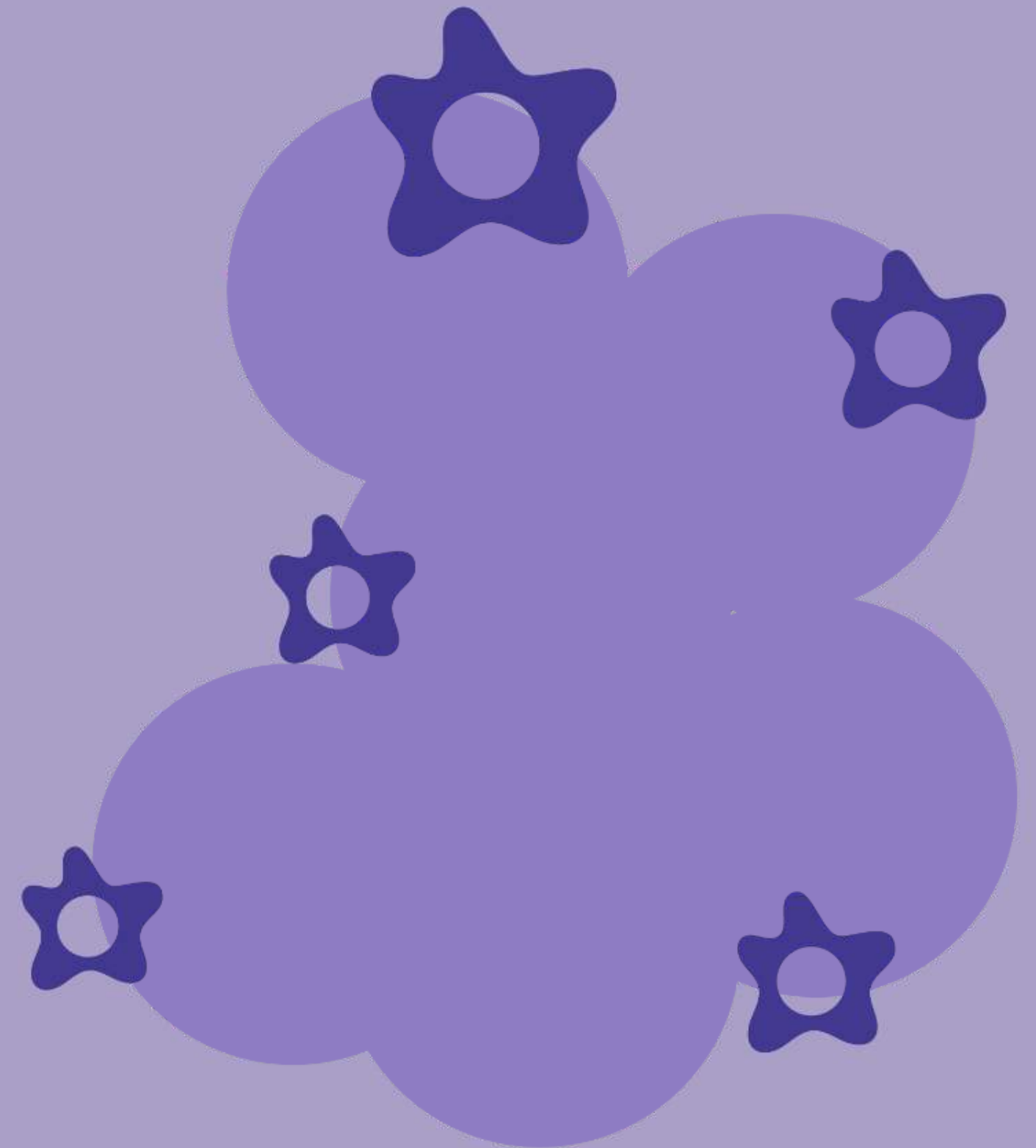
Проверять рост удобно по нескольким точкам: слева от нуля, в нуле и справа от нуля. Так видно, где график идёт вверх, а где — вниз.

Чётные степени

У чётных степеней левая ветвь спускается к нулю, а правая поднимается вверх. В точке $x=0$ находится самое маленькое значение, то есть минимум.

Зачем это нужно

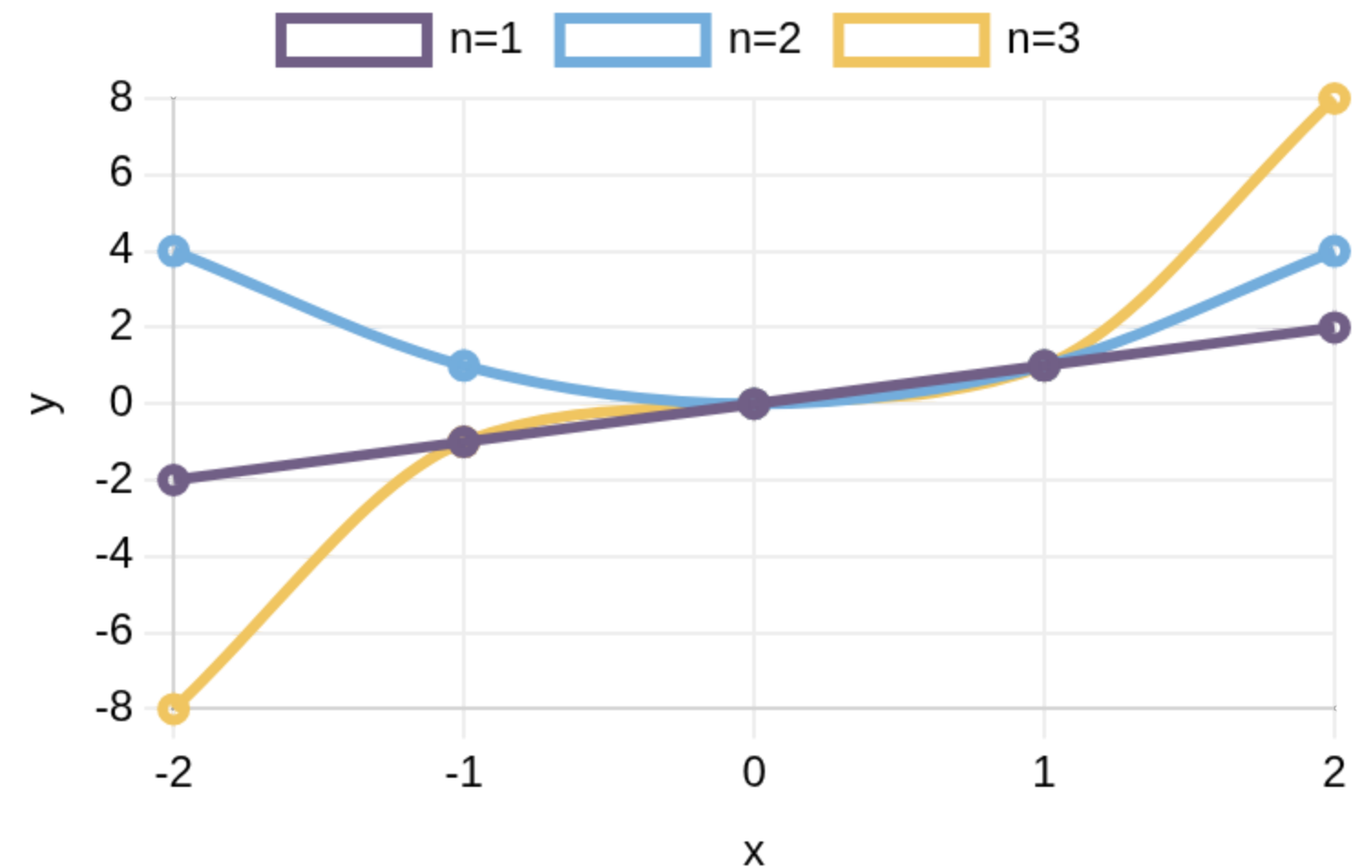
Знание направления роста помогает быстрее строить график и решать задания на сравнение значений. Особенно это важно, когда формула дана без рисунка.



Как меняется график при росте n

Сравним три степени в одних и тех же точках: видно, как возрастает крутизна графика.

Чем больше показатель, тем сильнее различие между областью около нуля и удалёнными точками.



Табличные значения функции $y = x^n$ при $x = -2, -1, 0, 1, 2$

Умножение на коэффициент a

Вертикальное растяжение

Множитель a не меняет сам тип графика, а лишь задаёт, насколько высоко или низко расположены его точки. Чем больше $|a|$, тем сильнее вертикальное растяжение.

Вертикальное сжатие

Если $0 < |a| < 1$, значения y становятся ближе к оси Ox , и график выглядит более «приплюснутым». Форма сохраняется, но все точки смещаются к середине.

Отражение по оси Ox

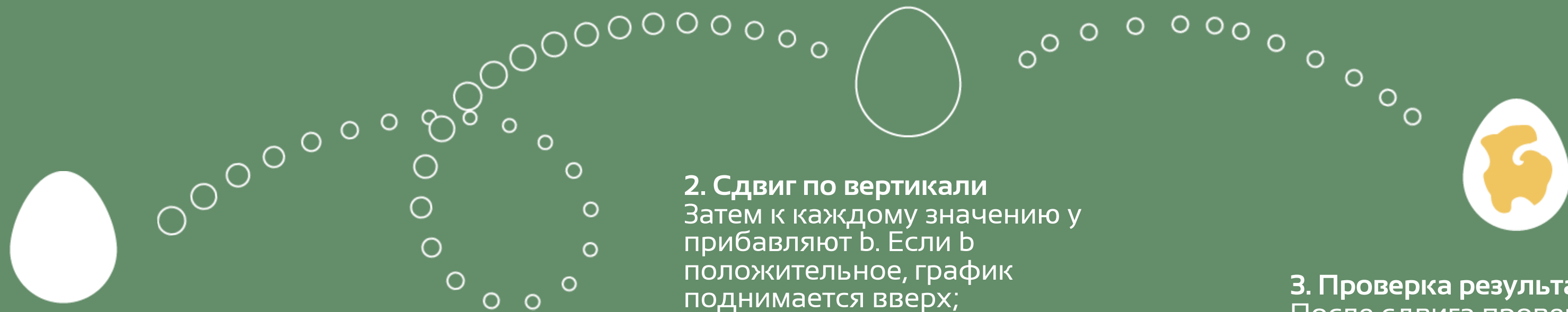
При $a < 0$ все точки отражаются относительно оси Ox . Верхняя часть графика оказывается ниже, а нижняя — выше, при этом чётность степени не меняется.

Что остаётся прежним

При сравнении $y = x^n$ и $y = a \cdot x^n$ удобно смотреть на одну и ту же степень. Меняется только масштаб по вертикали, а не расположение по x .



Сдвиг по вертикали



1. Исходный график

Сначала берут исходный график $y=x^n$ и отмечают его характерные точки. Это помогает увидеть, от какой формы начинается преобразование.

2. Сдвиг по вертикали

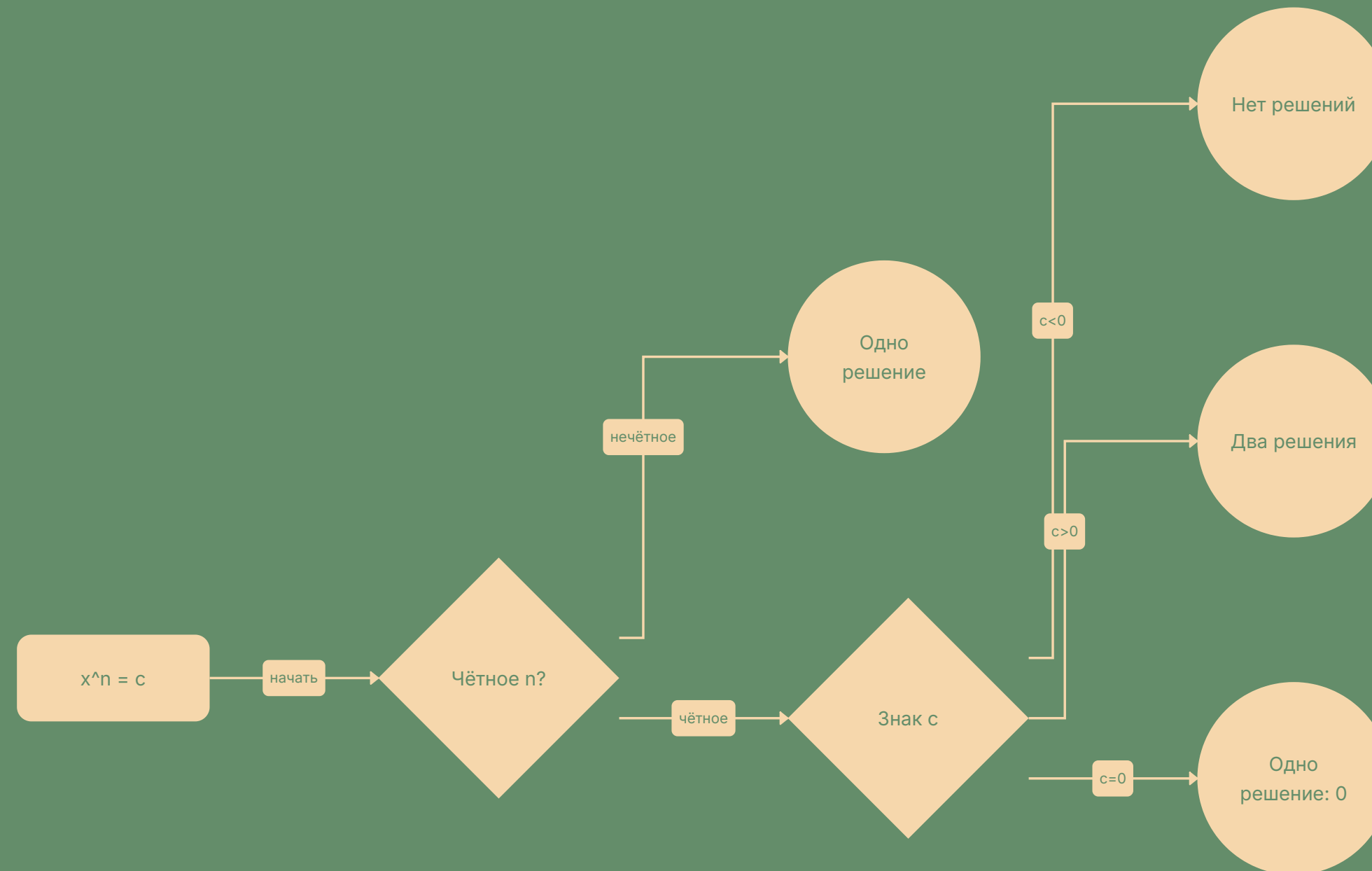
Затем к каждому значению y прибавляют b . Если b положительное, график поднимается вверх; если отрицательное, опускается вниз на то же число.

3. Проверка результата

После сдвига проверяют новые пересечения с осями и положение опорных точек. Симметрия сохраняется, но рисунок графика расположен уже на новом уровне.

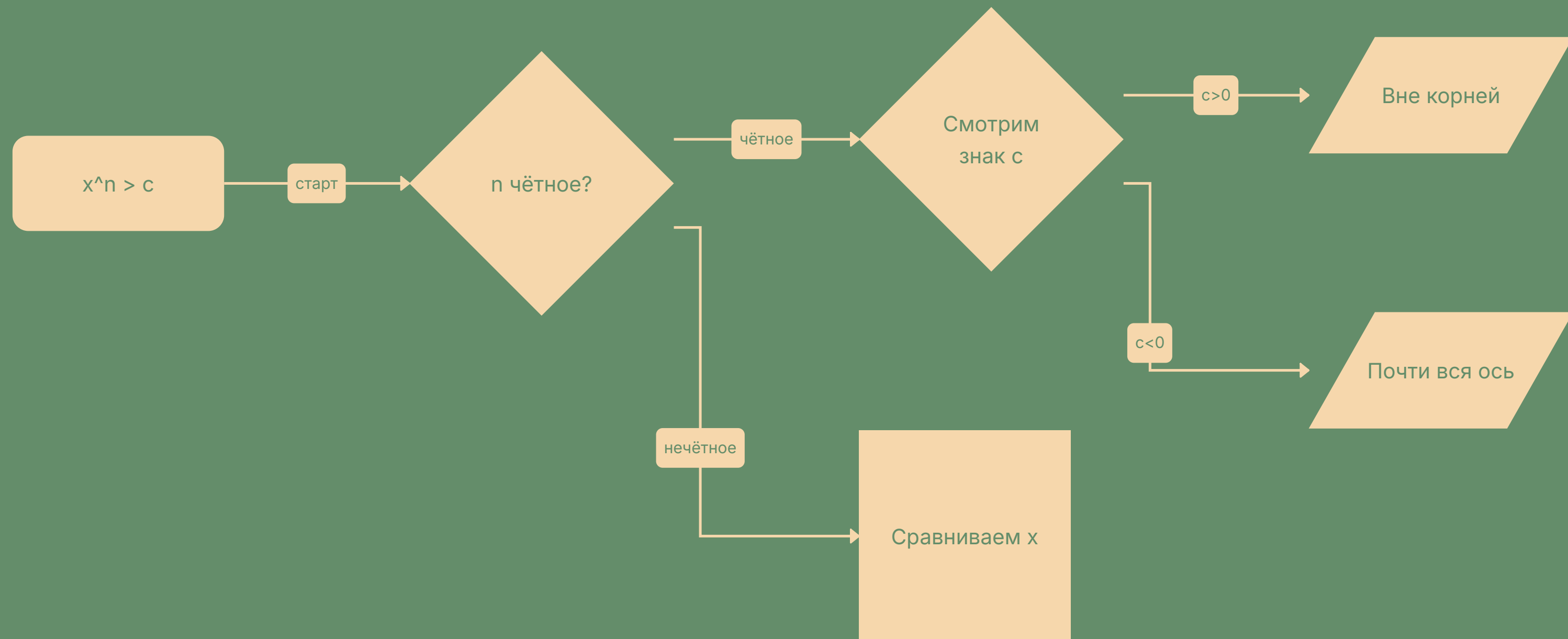
Решаем простые уравнения

Алгоритм решения зависит от чётности показателя и знака правой части.



Неравенства и чётность

Неравенство удобно читать по виду графика и по чётности степени.



Типичные ошибки

Квадрат не бывает отрицательным

Не стоит считать, что квадрат любого числа может быть отрицательным. При любом x значение x^2 не меньше нуля, поэтому знак ответа нужно проверять отдельно.

Пропуск опорных точек

При построении графика важно проверять опорные точки, особенно $x=0$ и $x=-1$. Именно они быстро показывают симметрию, пересечение с осями и правильную форму кривой.

Потеря знака

При нечётной степени знак сохраняется: отрицательное число остаётся отрицательным. Если забыть это свойство, легко ошибиться в знаках и расположении графика.



Сравнение трёх основных графиков

Линейный случай

График $y=x$ — самая простая линия: он проходит через начало координат и одинаково ведёт себя по обе стороны от него. Это отправная точка для сравнения.

Квадратный случай

График $y=x^2$ симметричен относительно оси Oy и имеет минимум в начале координат. Он не уходит ниже оси Ox , поэтому сразу отличается от прямой.

Кубический случай

График $y=x^3$ уже меняет знак при $x<0$ и образует S-образную кривую. Он сохраняет симметрию относительно начала координат и показывает более сложное поведение.



Опорные точки и сравнение

Сравните опорные точки графика степенной функции и сразу увидите, как показатель влияет на поведение кривой. Таблица помогает быстро запомнить основные значения.

Все графики проходят через (0,0) и (1,1); знак в точке -1 зависит от чётности.

Свойства функции $y=x^n$ при натуральном n .

n	(0,0)	(1,1)	(-1)
1	да	да	-1
2	да	да	1
3	да	да	-1

Проверка понимания

Симметрия

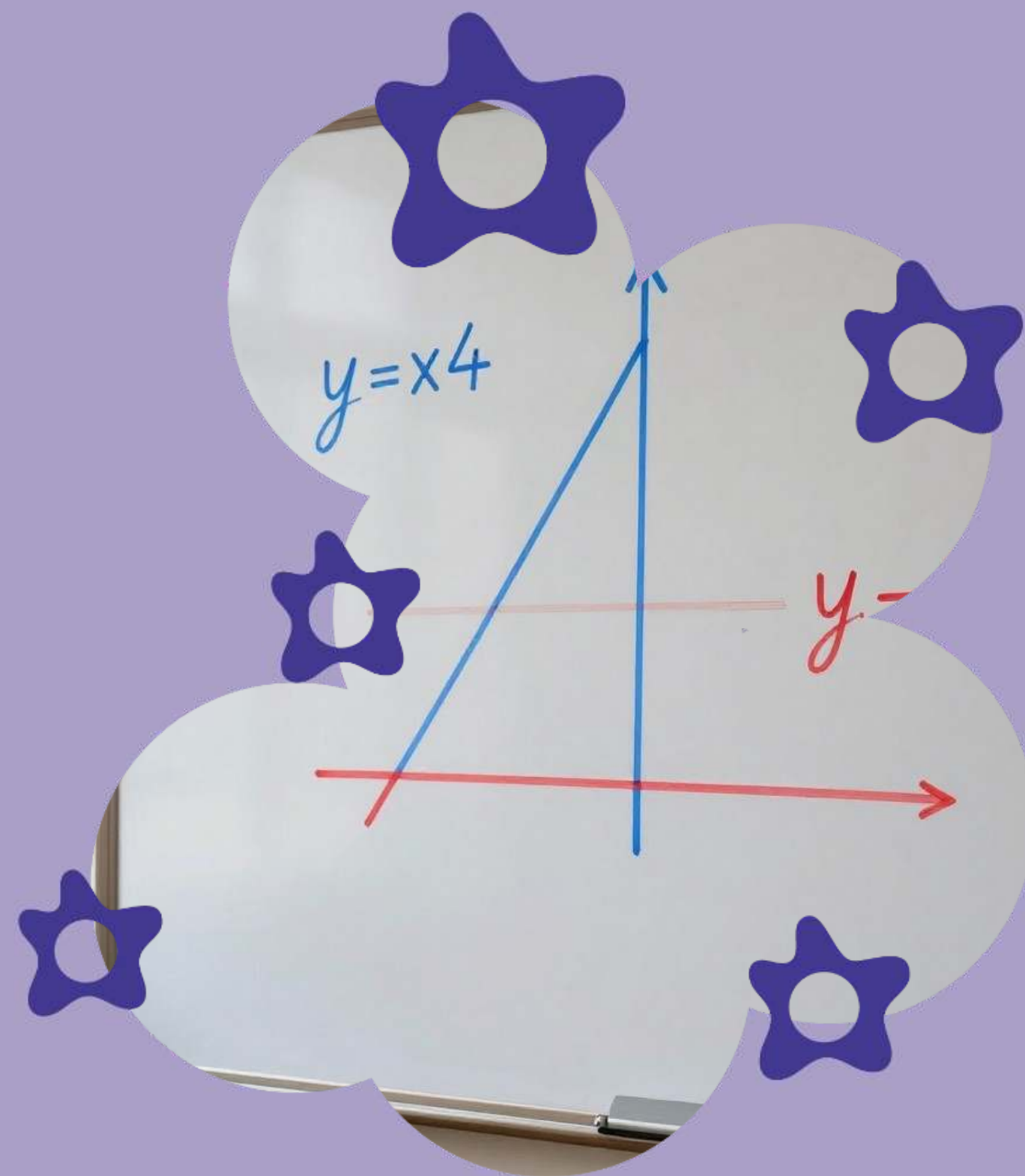
Проверьте, для каких степеней график симметричен относительно оси Oy . Это верно для всех чётных n , потому что значения слева и справа от нуля совпадают.

Отражение и масштаб

Подумайте, что сделает умножение $y=x^3$ на -2 . График отразится относительно оси Ox и станет более крутым, но останется кубическим.

Четвёртая степень

Определите вид графика $y=x^4$: он похож на более «узкую» параболу, чем $y=x^2$, и тоже не опускается ниже оси Ox .



Общий взгляд на семейство функций

1

Определяем форму

Сначала определяют показатель n : именно он задаёт, будет ли график симметричен относительно оси Oy или начала координат. Это основа всего семейства.

2

Меняем масштаб

Затем смотрят на знак и величину коэффициента a . Он не меняет степень, но растягивает, сжимает или отражает график относительно оси Ox .

3

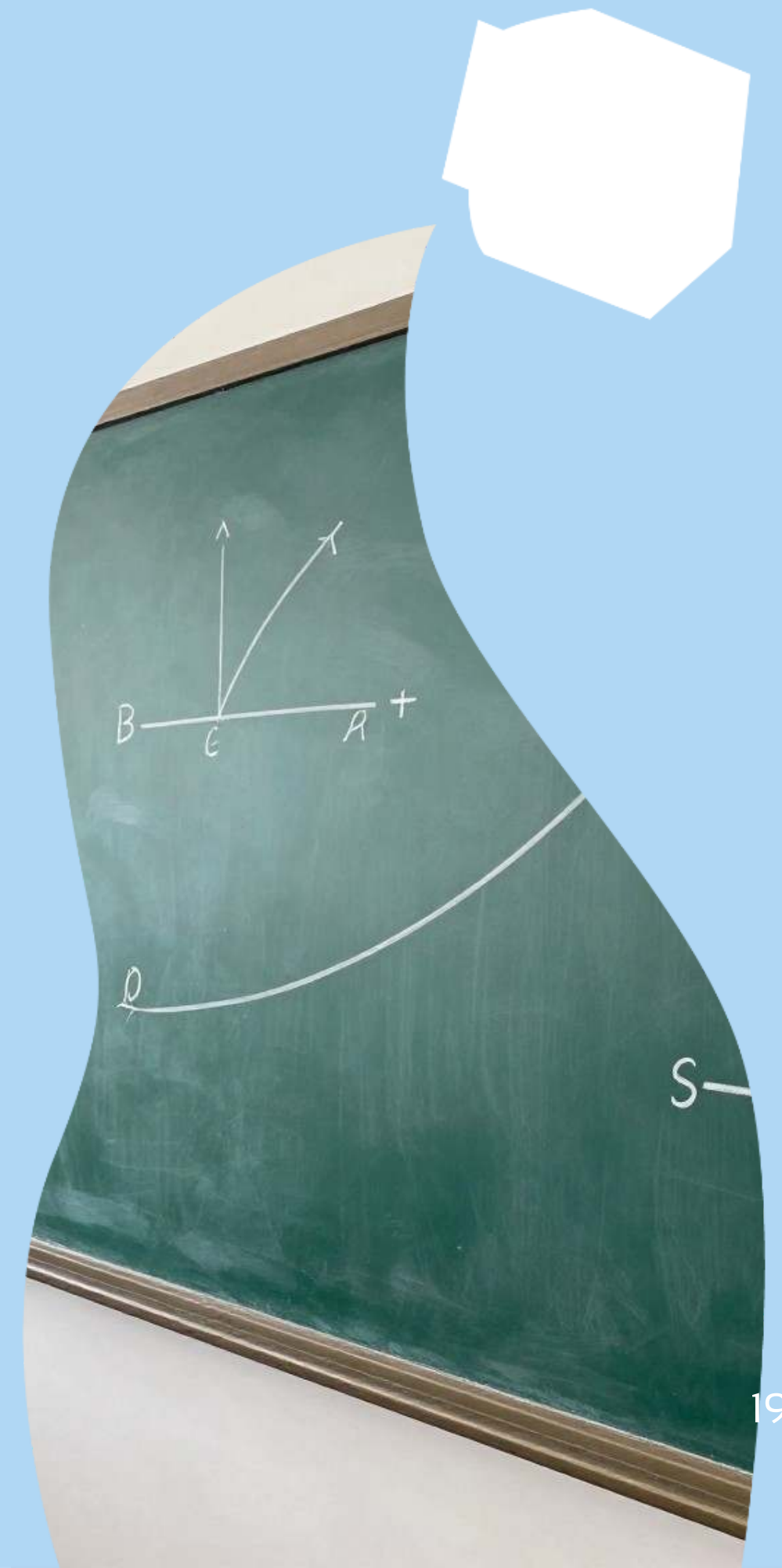
Сдвигаем график

После этого учитывают добавку b . Она сдвигает весь график вверх или вниз, не разрушая его общую форму и симметрию.

4

Сравниваем семейство

В итоге разные формулы дают одно семейство рисунков, узнаваемых по опорным точкам и виду кривой. Это помогает быстро читать и сравнивать графики.



Итоги и что важно запомнить

Теперь вы знаете, как показатель n меняет график: он определяет чётность, симметрию и знак при $x < 0$. Узнавать прямую, параболу и кубическую кривую — значит уверенно читать формулы и решать задания.

