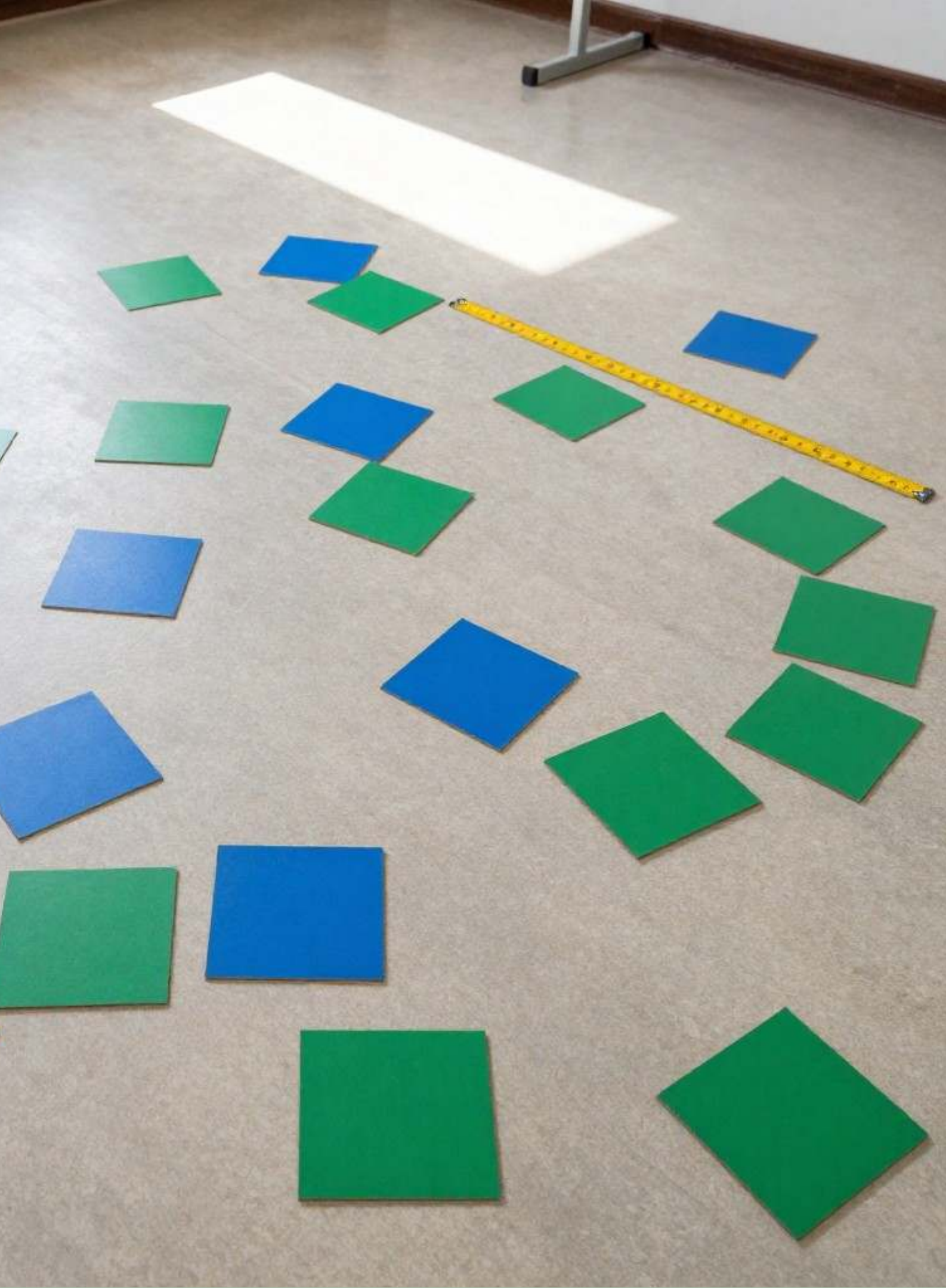


Площади в доказательствах

Площади помогают доказывать, а не только измерять фигуры.



Что умеет площадь

Площадь в геометрии показывает не только размер, но и связи между фигурами. Через равные площади, разбиение и перекладывание можно находить пропорции и доказывать утверждения короче.

Площадь как язык сравнения фигур

■ Сравнение без счёта

Площадь сравнивает фигуры через количество квадратных единиц, а не только через внешний вид. Это особенно удобно, когда чертёж сложный и прямой подсчёт занимает слишком много времени.

■ Основание и высота

Для треугольников, параллелограммов и трапеций важны основание и высота. Если одна из величин совпадает, площади начинают зависеть от другой, и сравнение становится очень быстрым.

■ Равные площади

Равенство площадей часто важнее самого числа. Оно позволяет доказывать, что части фигуры связаны между собой, даже если их формы заметно отличаются друг от друга.

■ Упрощение чертежа

Разбиение и перекладывание помогают превратить одну сложную фигуру в несколько знакомых. Тогда задачу можно решить через сумму простых площадей и короткие пропорции.

Три базовые формулы площади

01 Треугольник

Для треугольника площадь равна половине произведения основания на высоту. Поэтому одинаковая высота сразу переводит сравнение площадей в сравнение оснований.

02 Параллелограмм

У параллелограмма площадь равна произведению основания на высоту. Если высота общая, достаточно посмотреть на длину основания, чтобы сравнить фигуры без лишних вычислений.

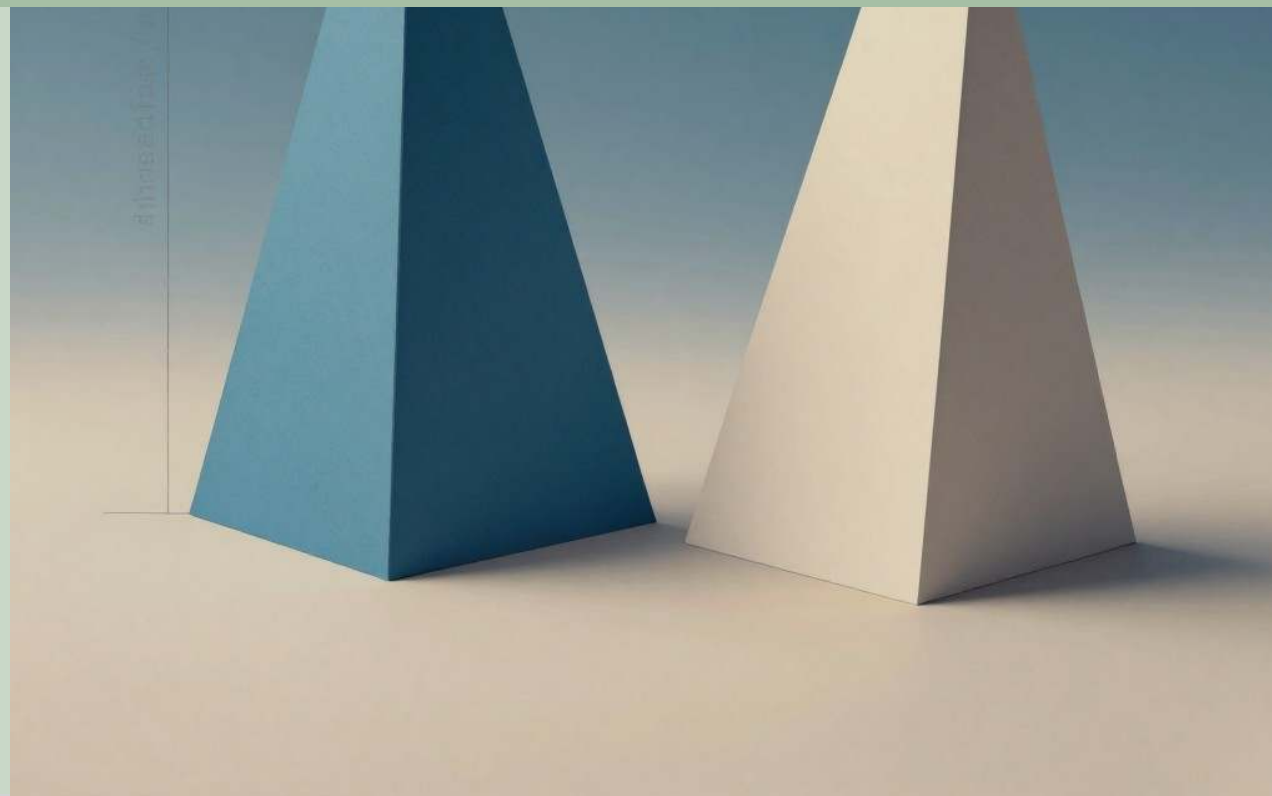
03 Трапеция

У трапеции площадь находится как половина суммы оснований, умноженная на высоту. Когда высота одна и та же, разницу площадей задают только основания.

Как разбирать сложную фигуру

Разрезать на знакомое

Фигура из нескольких частей сначала кажется сложной, но её можно мысленно разрезать на знакомые элементы. Треугольники, прямоугольники и трапеции дают понятные куски, для которых легко применить известные формулы.



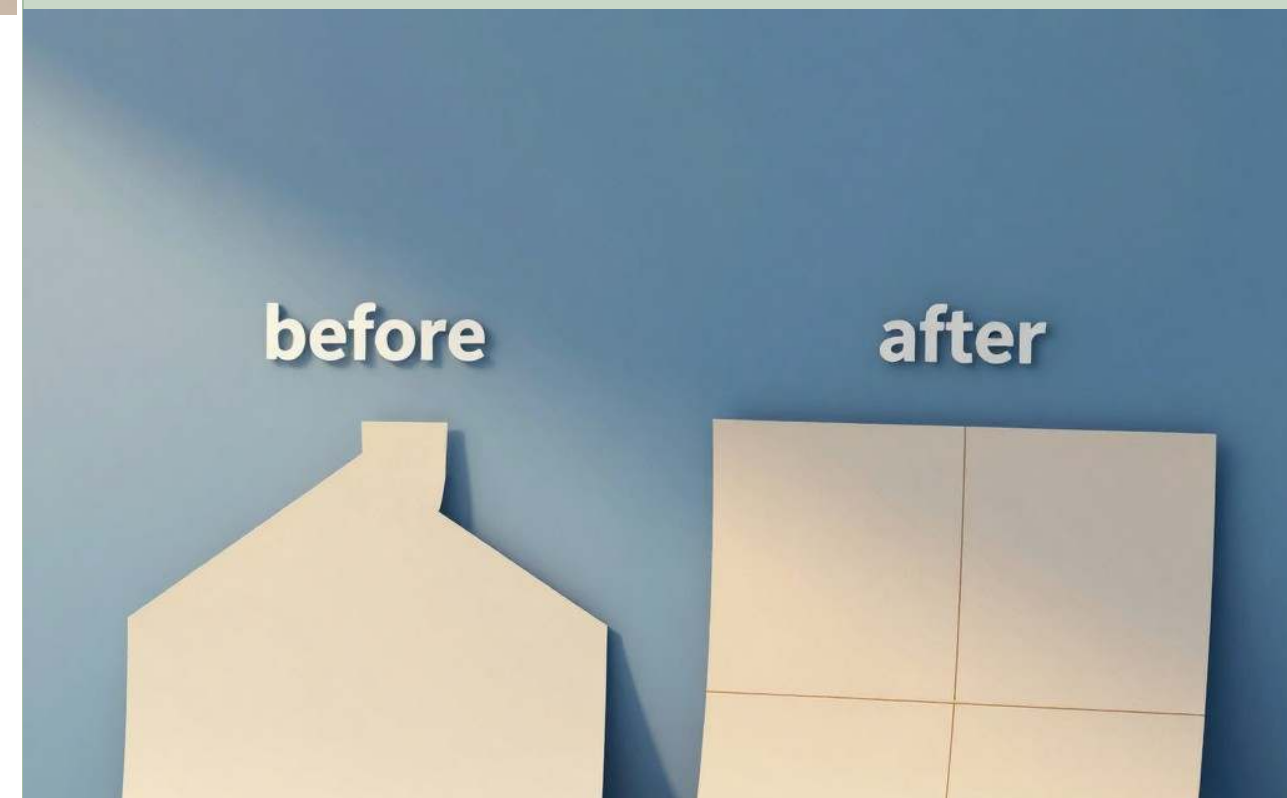
Сохранить смысл чертежа

Перекладывание особенно полезно в задачах на доказательство. Когда части не деформируются и не накладываются друг на друга, площадь сохраняется, а новая схема делает скрытые равенства заметнее.



Сразу увидеть пропорцию

Если две части имеют общую высоту или одинаковое основание, их площади сравниваются почти сразу. Такой приём часто позволяет найти отношение сторон, не вычисляя площадь всей фигуры целиком.



Перекладывание без изменения площади

Сохранение площади

Если фигуру можно мысленно разрезать на части и переставить их без растяжения, сумма площадей не меняется. Это позволяет сравнивать разные чертежи как один и тот же набор частей.

Перенос без искажений

Одинаковые треугольники и полосы можно переносить в другое место, не меняя их размеров. После такого перекладывания становятся видны равные площади и совпадающие элементы.

Удобная новая форма

Иногда новая фигура выглядит проще исходной, хотя состоит из тех же деталей. Тогда задача превращается в сравнение знакомых частей, а не в длинный подсчёт каждого участка.

Главные приёмы сравнения



Общая высота

Если у двух треугольников общая высота, их площади относятся как основания. Этот приём часто используют, когда на чертеже есть параллельные прямые и один и тот же верхний угол.



Общее основание

Если у треугольников общее основание, сравнивают высоты. Тогда площади отличаются ровно настолько, насколько различаются расстояния до основания, что удобно в задачах на доказательство.



Связь с подобием

Когда появляются равные углы или параллельные стороны, треугольники нередко оказываются похожими. Тогда сравнение площадей помогает быстро получить пропорции сторон и отрезков.

Равновеликие фигуры

01 Что значит равновеликость

Равновеликие фигуры имеют одинаковую площадь, даже если выглядят совсем по-разному. На чертеже это удобно показывать одинаковой штриховкой или одинаковыми отметками.

02 Как их узнают

Чтобы доказать равенство площадей, часто достаточно найти общую высоту или общее основание. Тогда сравнение сводится к равенству соответствующих оснований или высот.

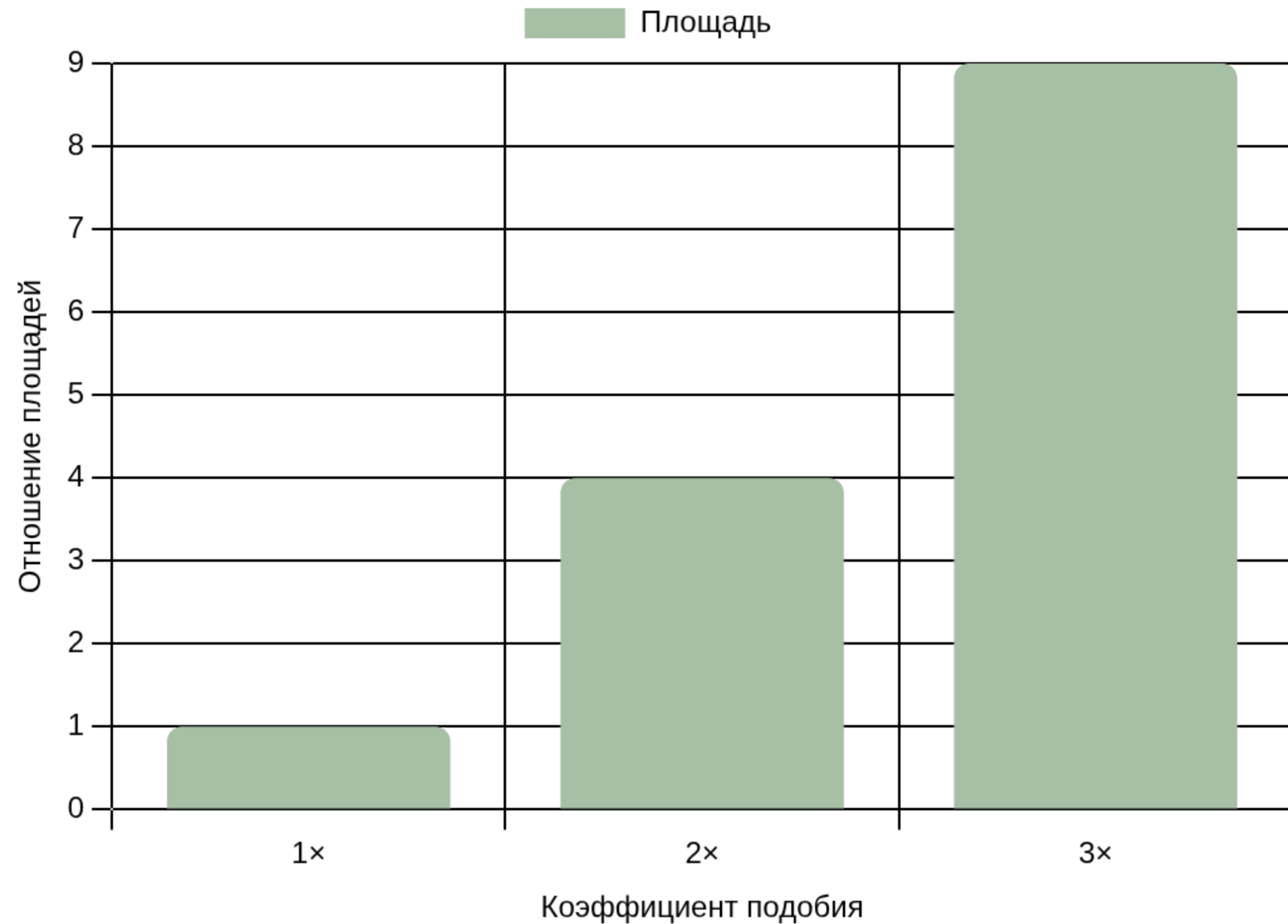
03 Зачем это нужно

Равновеликие треугольники особенно полезны в доказательствах. Они позволяют заменять одну фигуру другой, не меняя площади всей конструкции и не усложняя рассуждение.

Подобие и площадь

Для подобных треугольников площадь растёт не линейно, а по квадрату коэффициента подобия. Это помогает быстро оценить, как меняется фигура при увеличении.

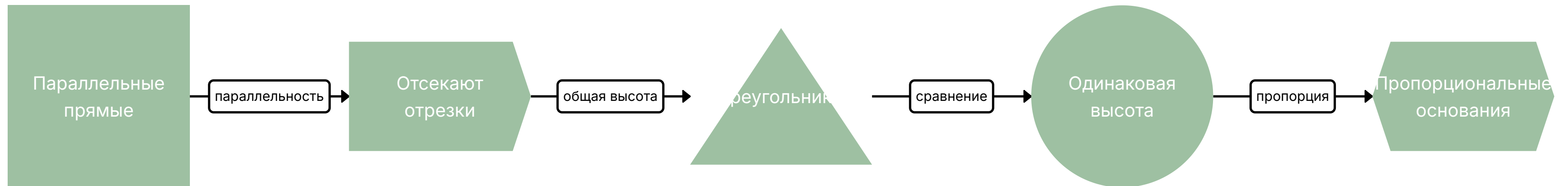
Удвоение стороны даёт площадь в 4 раза больше, а утроение — в 9 раз больше. Квадратичная зависимость делает подобие особенно наглядным.

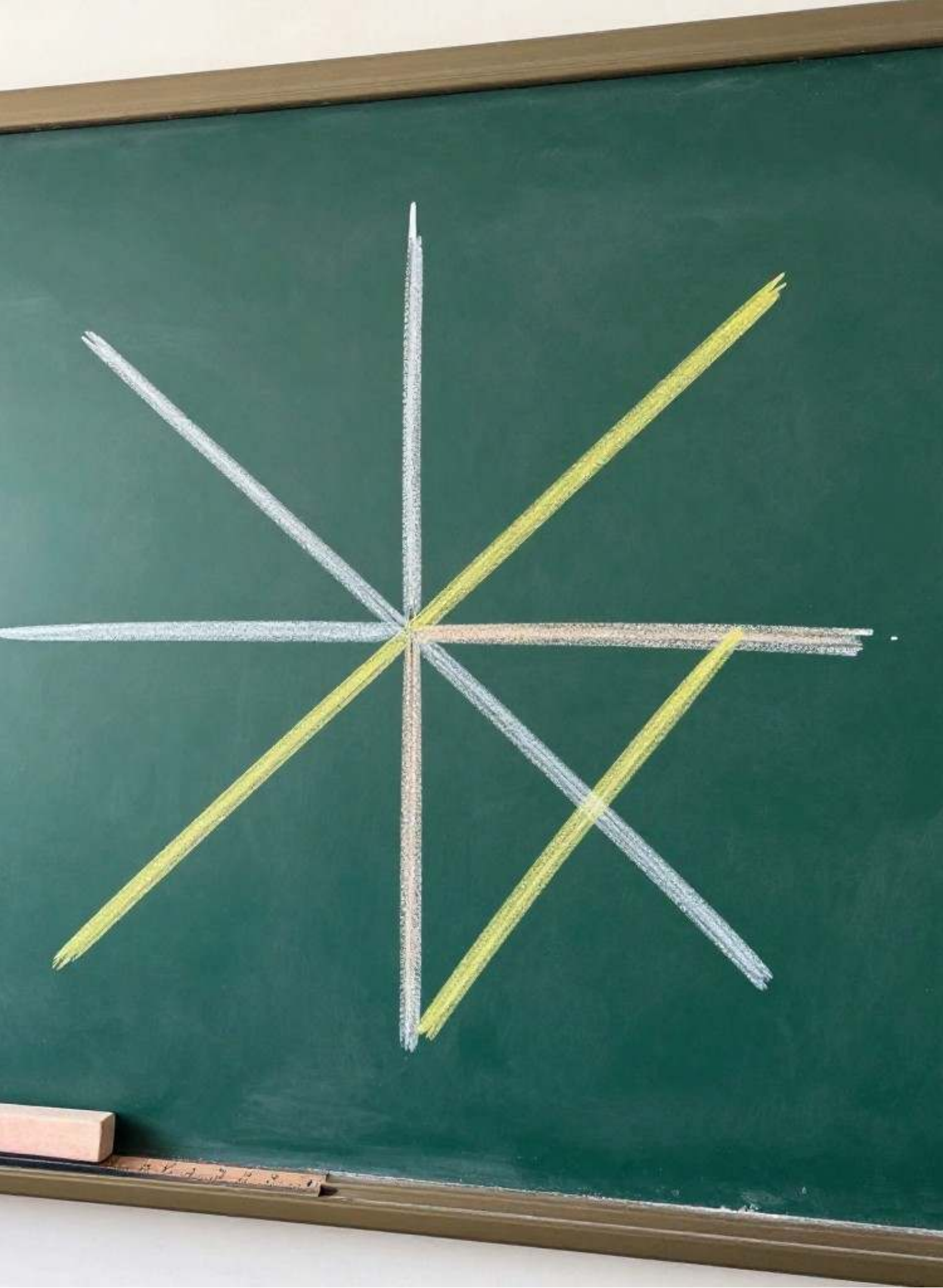


Теорема о площадях подобных фигур

От параллельных прямых к пропорциям

Переход от параллельности к равновеликим треугольникам и отношениям отрезков





Пифагор через разбиение квадратов

Сборка квадрата

Если у двух прямоугольных треугольников одинаковые катеты, то их можно мысленно собрать в большой квадрат. Тогда сравнение площадей сразу превращает задачу Пифагора в равенство между частями одной фигуры.

Одна площадь — два выражения

Ключ в том, что внешняя и внутренняя области выражаются через одни и те же элементы чертежа. Не нужно отдельно вычислять все участки: достаточно увидеть, какие части дополняют друг друга до квадрата.

Доказательство через рисунок

Такой подход особенно полезен в задачах, где требуется доказательство, а не только ответ. Разбиение на равные треугольники делает связь между сторонами наглядной и избавляет от лишних преобразований.

1:1

Именно так удобно
увидеть равенство
площадей
при разбиении
биссектрисой.

Площадь двух частей
треугольника можно сравнить
без длинных вычислений,
если использовать одну и ту же
высоту: тогда решает только
основание.

Как одна линия меняет фигуру

Медиана делит пополам

Медиана не просто соединяет вершину с серединой стороны: она делит треугольник на два участка, которые выглядят по-разному, но имеют одинаковую площадь. Общая высота и равные основания делают это почти мгновенно видно на чертеже.

Диагональ и симметрия

В параллелограмме диагональ работает как аккуратный разрез по уже готовой симметрии. Два треугольника по разные стороны диагонали имеют равные площади, потому что у них равные основания и одна высота, опущенная между параллельными сторонами.



Как быстро заметить нужный прием

1. Найти опору

Сначала ищут общий элемент: высоту, основание или параллельные стороны. Если он есть, площадь можно сравнивать сразу, не переходя к полному вычислению.

3. Дойти до пропорции

После этого проверяют, не скрыта ли в чертеже симметрия или подобие. Часто именно они дают ответ быстрее, чем формула с длинными подстановками.

2. Выделить сравнение

Затем фигуру мысленно делят на знакомые части или сопоставляют с равновеликими треугольниками. Это помогает получить отношение сторон и площадей в несколько строк.



Медиана: сравнение площадей

Сравним два треугольника, полученные медианой. У них общая высота, а основания равны, потому что медиана делит сторону пополам.

При равных основаниях и общей высоте площади одинаковы, значит медиана делит треугольник на две равные части.

Элемент	Первый	Второй
Основание	$a/2$	$a/2$
Высота	h	h

Свойство медианы и формула площади треугольника.

Биссектриса: сравнение площадей

Треугольник	Площадь	Основание
1	S_1	x
2	S_2	y

Рассмотрим два треугольника по разные стороны биссектрисы. У них общая высота к одной стороне, поэтому отношение площадей сводится к отношению оснований.

Так как биссектриса делит угол пополам, основания оказываются пропорциональны прилежащим сторонам, а значит и площади относятся так же.

Свойство биссектрисы угла в треугольнике.



Базовые задачи на сравнение

В этих задачах важнее увидеть прием, чем подставить числа. Все три случая решаются через сравнение площадей, а не через громоздкий счет.

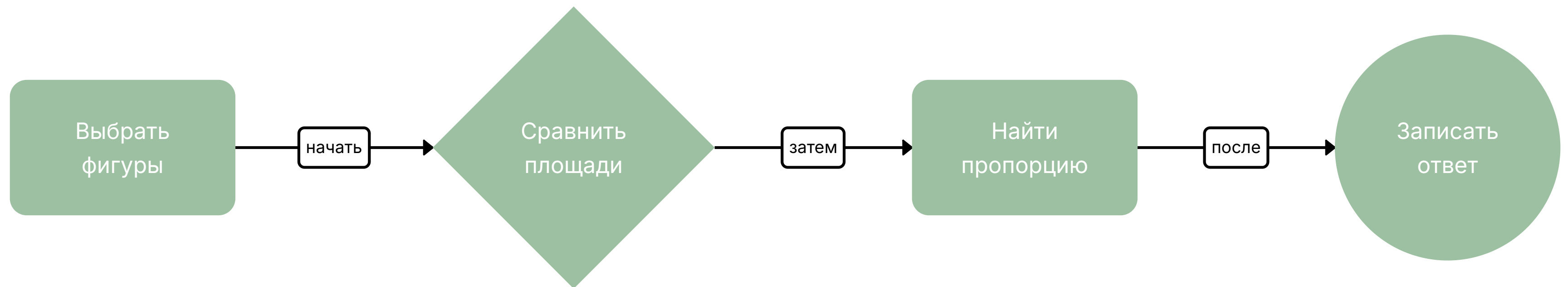
Один и тот же чертеж можно читать по-разному: через подобие, через равные высоты или через формулу трапеции.

Задача	Прием	Что найти
Подобные треугольники	квадрат коэффициента	отношение площадей
Одна база	общая высота	равенство площадей
Трапеция	формула площади	высота

Типовые школьные задачи на площади.

Логика решения через площади

От выбора равновеликих частей к нужному отношению



Проверь себя по главным идеям

01 Первый признак

Если у двух треугольников одинаковая высота и равные основания, их площади совпадают. Такой признак часто используют в доказательствах и на чертежах с медианой или параллельными прямыми.

02 Второй признак

При увеличении всех сторон в два раза площадь подобной фигуры возрастает в четыре раза. Это важно помнить, потому что площадь растет быстрее, чем длина.

03 Третий признак

В разбиении квадрата на части удобно искать равенство площадей и складывать их. Именно это помогает получить формулу Пифагора без лишних преобразований.

Площади помогают видеть структуру

Если задача кажется сложной, сначала ищите равновеликие части и общие высоты, затем проверяйте подобие и симметрию. Площадь часто превращает длинное решение в короткое и понятное.