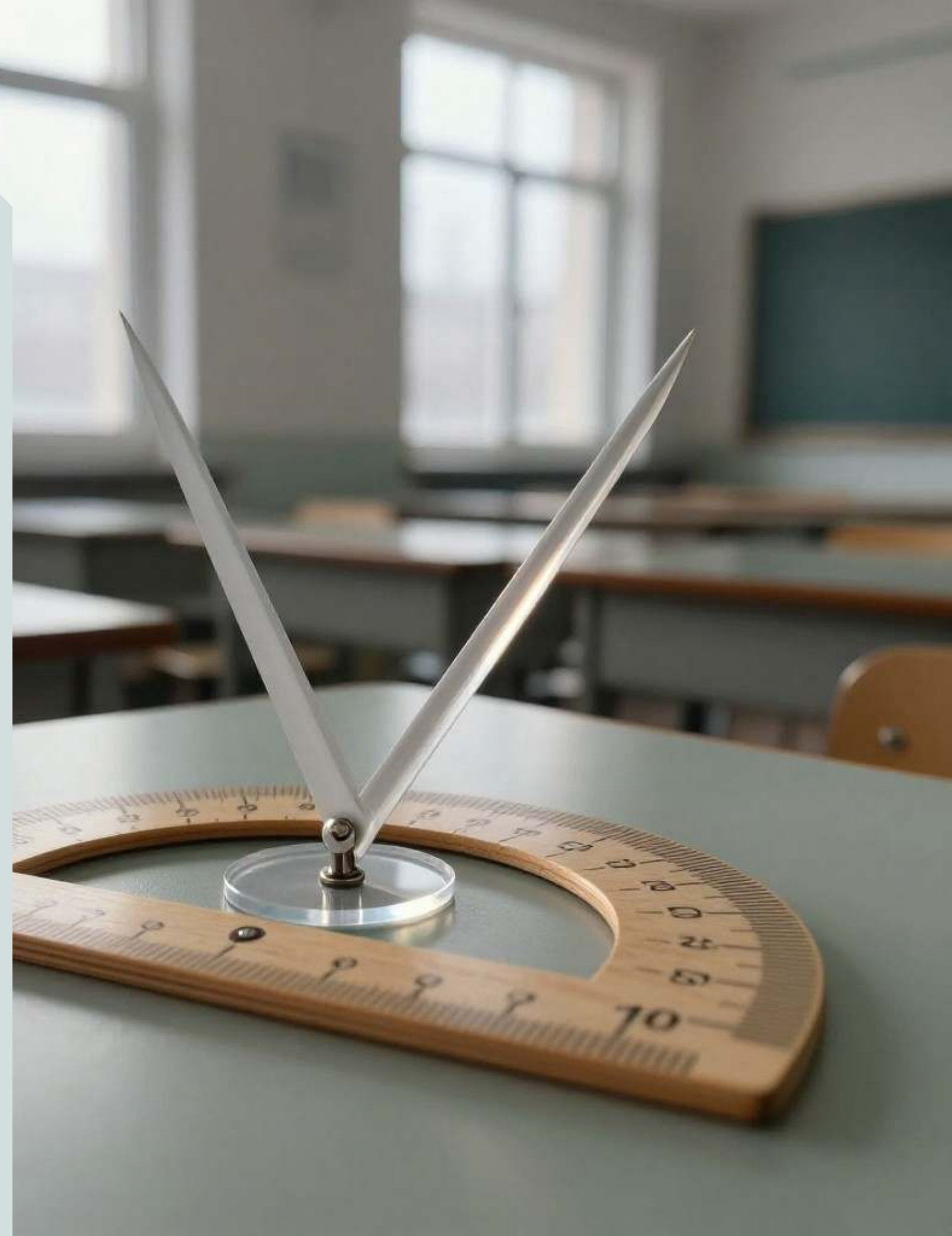
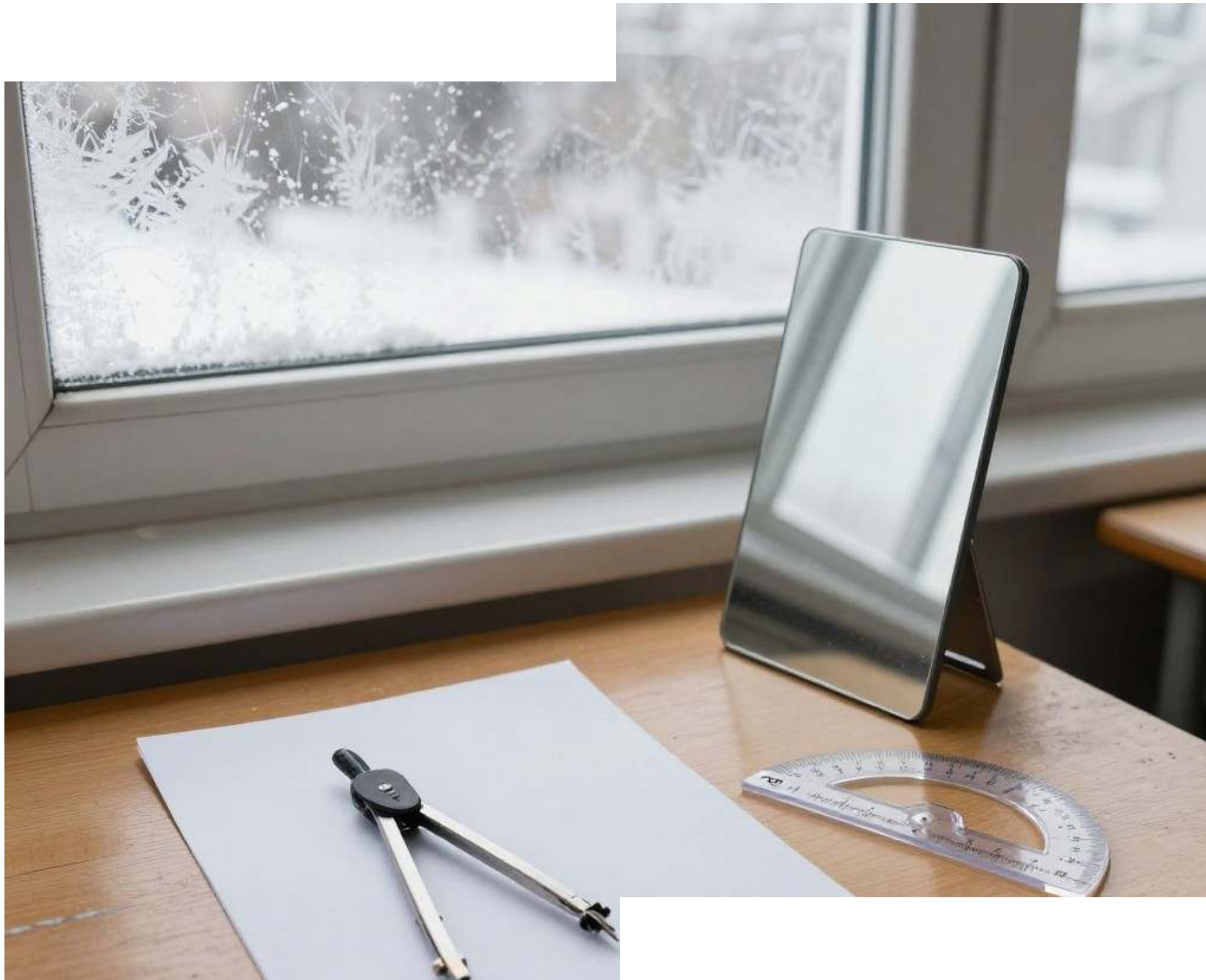


Обратные тригонометрические функции в курсе геометрии 11 класса

Обратные функции возвращают угол по известному значению синуса, косинуса, тангенса или котангенса.



Почему без обратных функций в 11 классе не обойтись



Тригонометрия периодична: одному числу соответствует много углов, поэтому обратная функция выбирает главный ответ. В 11 классе это нужно в задачах на треугольники, координаты, наклоны прямых, углы между векторами и элементы окружности.

Определение обратных тригонометрических функций

Функция $\arcsin x$ — это угол, синус которого равен x . Она «отвечает» на вопрос: какой угол даёт заданное значение синуса, если угол выбирается однозначно.

Функция $\arccos x$ определяется аналогично: это угол, косинус которого равен x . В обоих случаях важно не только равенство, но и то, что угол понимается как главный.

Функции $\arctan x$ и $\operatorname{arccot} x$ возвращают угол по тангенсу и котангенсу соответственно. Чтобы ответ был единственным, каждая из них использует свой главный промежуток значений.

Идея одна: обратная функция — это не бесконечное множество подходящих углов, а выбранный главный угол, согласованный с определением.

Области определения и области значений основных функций

Ключевое ограничение обратных тригонометрических функций — выбор допустимых значений угла, чтобы функция стала однозначной.

Ограничение области значений фиксирует главный угол и устраняет неоднозначность, возникающую из-за периодичности исходных функций.

Функция	Область определения	Область значений
$\arcsin x$	$[-1; 1]$	$[-\pi/2; \pi/2]$
$\arccos x$	$[-1; 1]$	$[0; \pi]$
$\arctan x$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\pi/2; \pi/2)$
$\operatorname{arccot} x$	$(-\infty; +\infty)$	$(0; \pi]$

Зачем нужны главные промежутки

01

Одна и та же тригонометрическая величина встречается у множества углов: например, $\sin 30^\circ = \sin 150^\circ = 1/2$, а $\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{tg} 225^\circ = 1$. Поэтому обратная функция без правил не была бы однозначной.

02

Чтобы получить единственный ответ, выбирают главный промежуток значений угла. Для $\arcsin$ и $\arctan$ он симметричен относительно нуля, а для $\arccos$ и arccot — лежит в неотрицательной части.

03

Именно выбранный промежуток определяет, какой угол считать «корректным» результатом. В задачах это помогает быстро переводить числовое отношение сторон или координат в конкретный угол.

Главные значения обратных функций на числовой прямой

Разные функции «занимают» разные отрезки по оси углов: поэтому при одном и том же x результат будет разным в зависимости от вида обратной функции.

Границы $-\pi/2$, 0 , $\pi/2$ и π визуально показывают, что главный промежуток гарантирует единственность найденного угла.

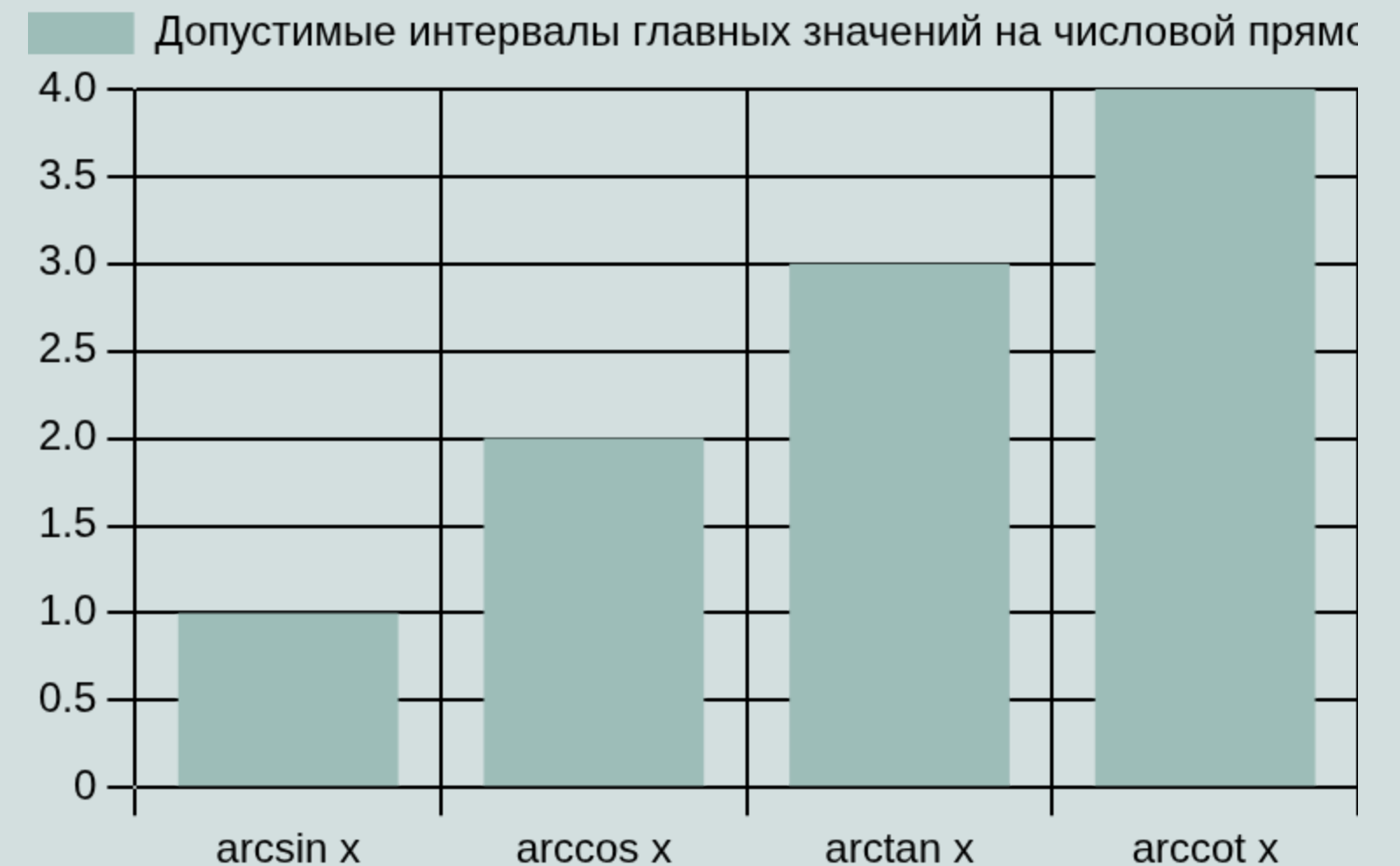


График $y = \arcsin x$

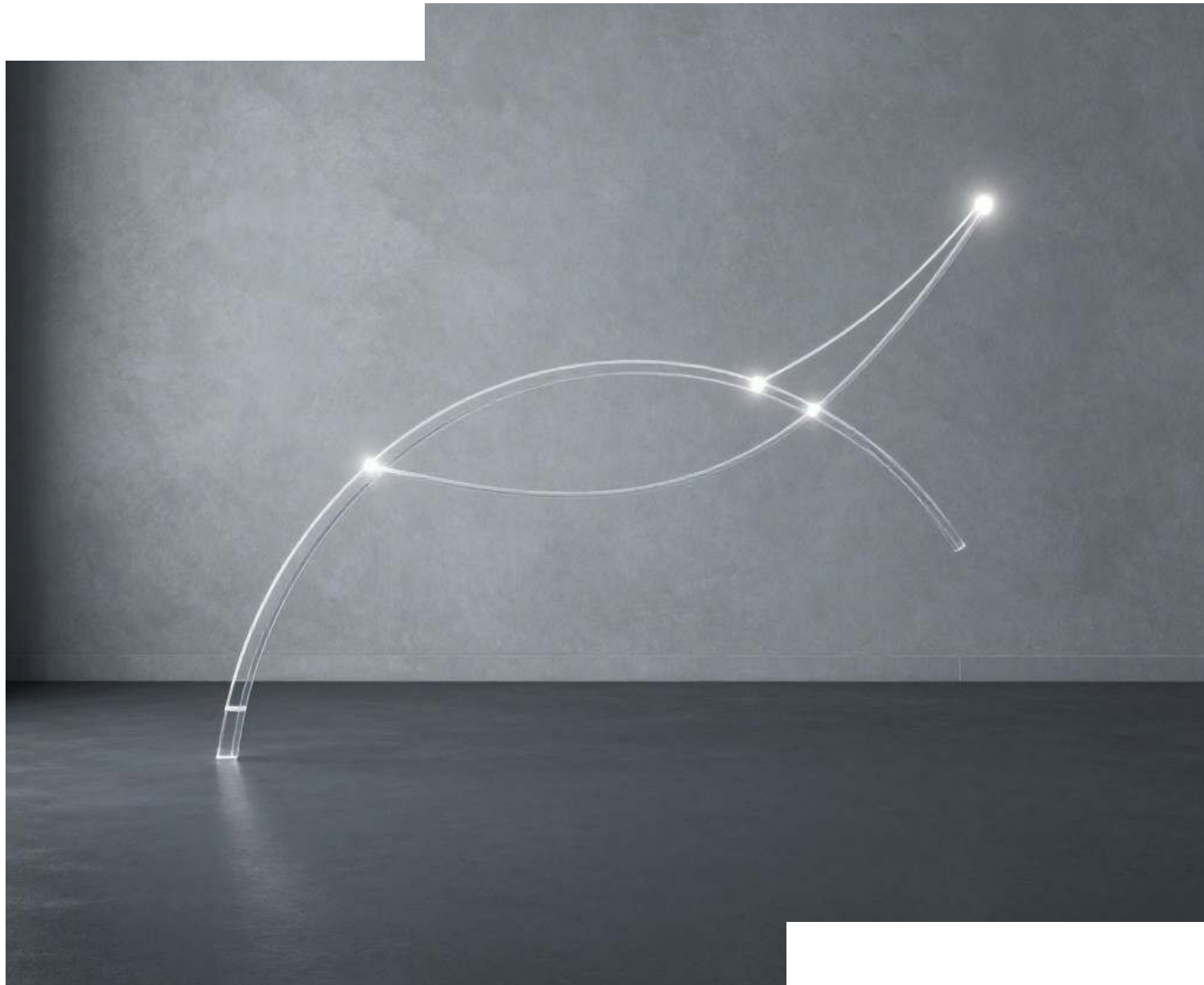


График $y = \arcsin x$ определён на отрезке $[-1; 1]$ и возрастает: большему x соответствует больший главный угол. Он проходит через точки $(-1, -\pi/2)$, $(0, 0)$ и $(1, \pi/2)$, что напрямую отражает определение функции.

Функция непрерывна на всей своей области определения и является нечётной: при смене знака x меняется знак y . Такая симметрия относительно начала координат помогает быстро ориентироваться в знаке угла при решении задач.

График $y = \arccos x$

01

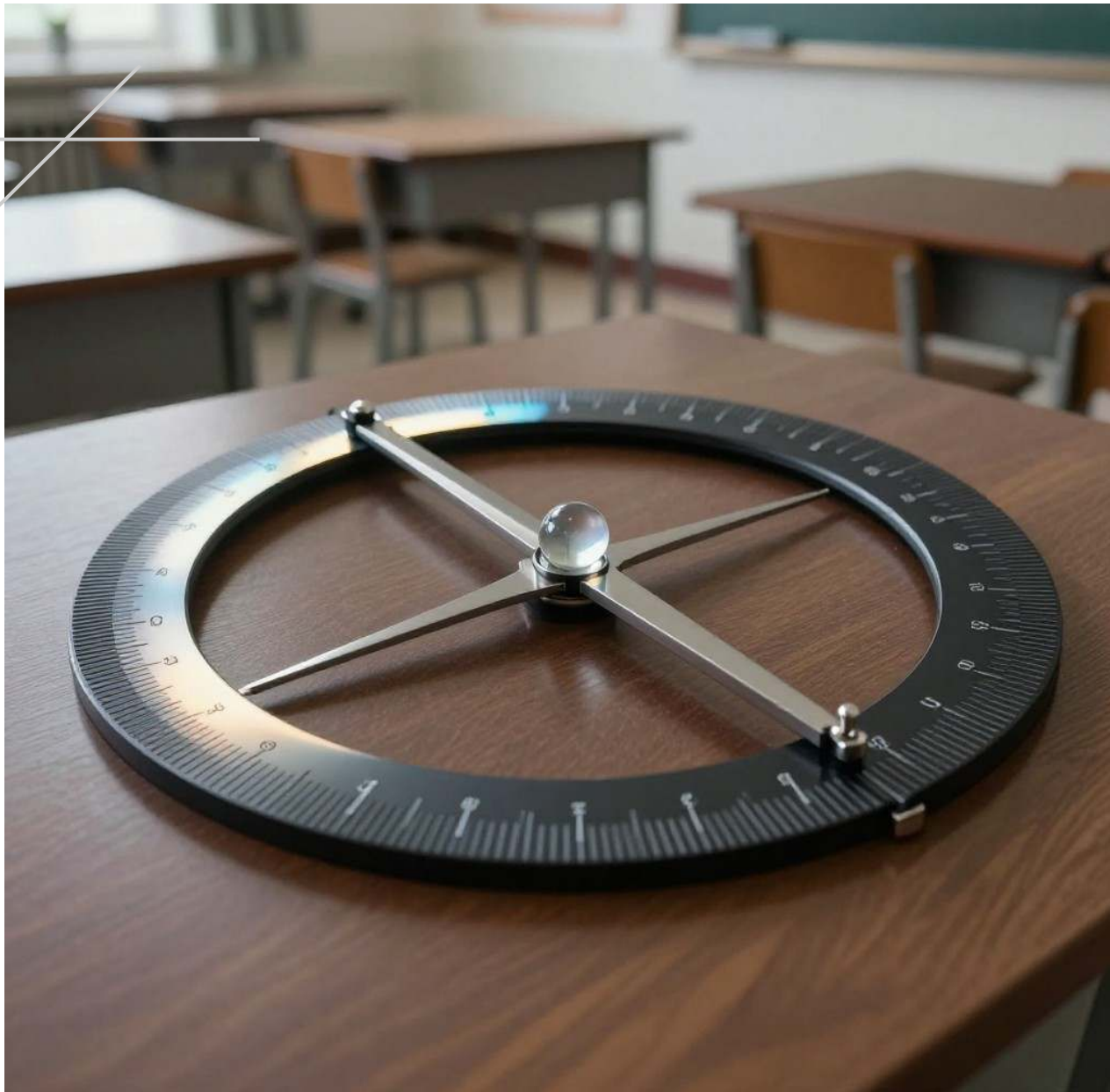


График $y = \arccos x$ задаётся на $[-1; 1]$ и убывает: при увеличении x главный угол уменьшается. Он проходит через $(-1, \pi)$, $(0, \pi/2)$ и $(1, 0)$, поэтому значения всегда остаются в промежутке $[0; \pi]$.

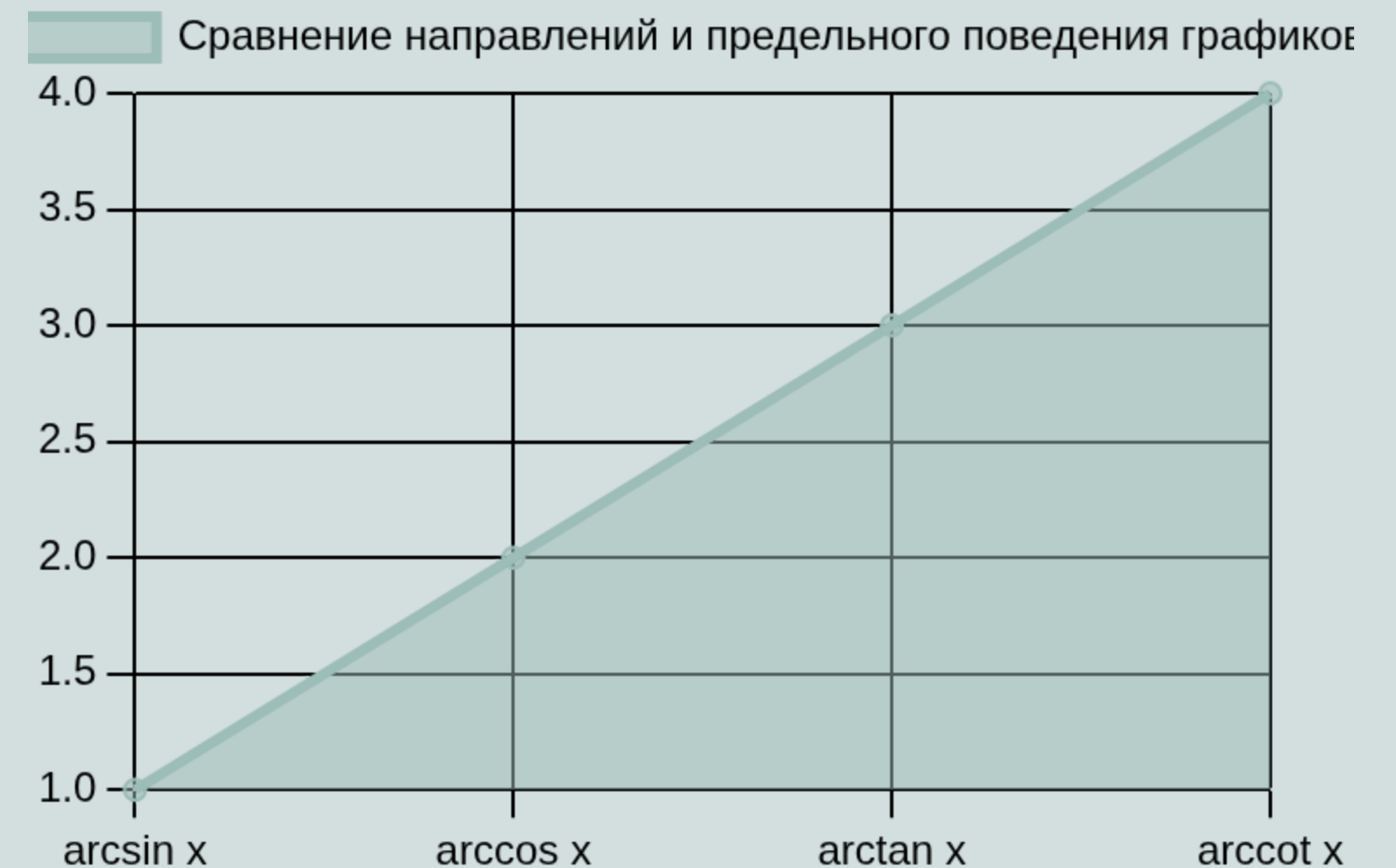
02

Поскольку график убывающий, по нему удобно понимать соответствие между координатой точки (x, y) и главным углом. Переход от π к 0 подчёркивает, как знак и величина косинуса «раскладываются» по допустимым углам.

Сравнение графиков обратных тригонометрических функций

$\arcsin x$ и $\arccos x$ имеют ограниченную область определения $[-1; 1]$, а $\arctan x$ и $\operatorname{arccot} x$ существуют для всех действительных x и «выходят» к предельным значениям.

По одному полю видно: $\arcsin$ и $\arctan$ возрастают, $\arccos$ и arccot убывают, а также различается набор предельных значений при удалении x к бесконечности.



Основные связи между обратными функциями

01

Для x из $[-1; 1]$ выполняется тождество $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$.
Смысл в том, что синус и косинус дополняют друг друга до прямого угла.

02

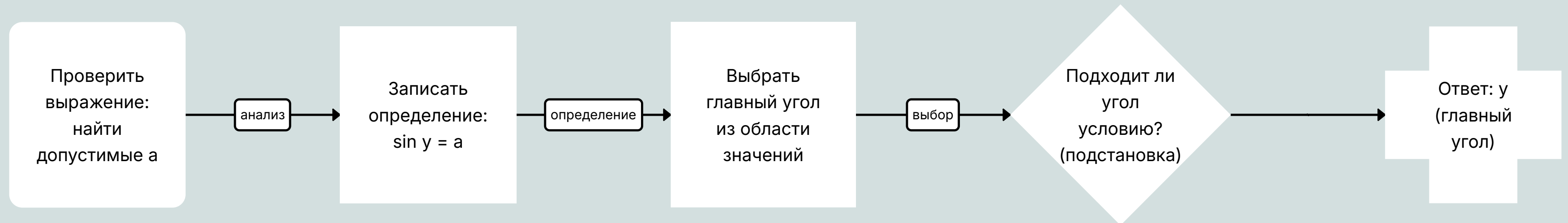
При стандартной договорённости для $\arctan x$ и $\operatorname{arccot} x$ справедливо равенство $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \pi/2$. То есть тангенс и котангенс дают углы, связанные с одним и тем же «дополнением» до $\pi/2$.

03

Эти связи удобны при преобразованиях выражений и при проверке ответа: найденный угол должен согласовываться с парной обратной функцией.

Алгоритм решения простого уравнения с обратной функцией

Пошаговая схема для случаев $\sin y = a$, $\cos y = a$, $\operatorname{tg} y = a$ или $\operatorname{ctg} y = a$



Точные значения для опорных углов

01

$\arcsin 1/2 = \pi/6$, потому что $\sin(\pi/6) = 1/2$ — главное значение попадает в промежуток $[-\pi/2; \pi/2]$. Этот факт часто используют, когда от углов переходят к числам и обратно.

02

$\arccos 1/2 = \pi/3$, так как $\cos(\pi/3) = 1/2$ и $\arccos$ выбирает угол из $[0; \pi]$. Здесь удобно помнить, что для равных значений синуса и косинуса характерны “особые” треугольники.

03

$\arctan 1 = \pi/4$, поскольку $\operatorname{tg}(\pi/4) = 1$, а $\arctan$ возвращает угол из $(-\pi/2; \pi/2)$. Соответственно $\operatorname{arccot} 1 = \pi/4$, так как $\operatorname{ctg}(\pi/4)=1$ и arccot выбирает из $(0; \pi)$.

04

Для школьных задач особенно важны углы 30° , 45° и 60° , потому что они часто появляются в равнобедренных, прямоугольных и равносторонних треугольниках, где отношения сторон выражаются “красивыми” числами.

Таблица опорных значений

x	arcsin x	arccos x	arctan x
-1	-π/2	π	—
-1/2	-π/6	2π/3	—
0	0	π/2	0
1/2	π/6	π/3	π/4?
1	π/2	0	π/4

Таблица систематизирует значения обратных функций для ключевых x и позволяет находить углы без вычислений десятичных приближений.

Опорные значения дают быстрый переход между отношением сторон и искомым углом; ограничения областей значений обеспечивают единственность ответа.

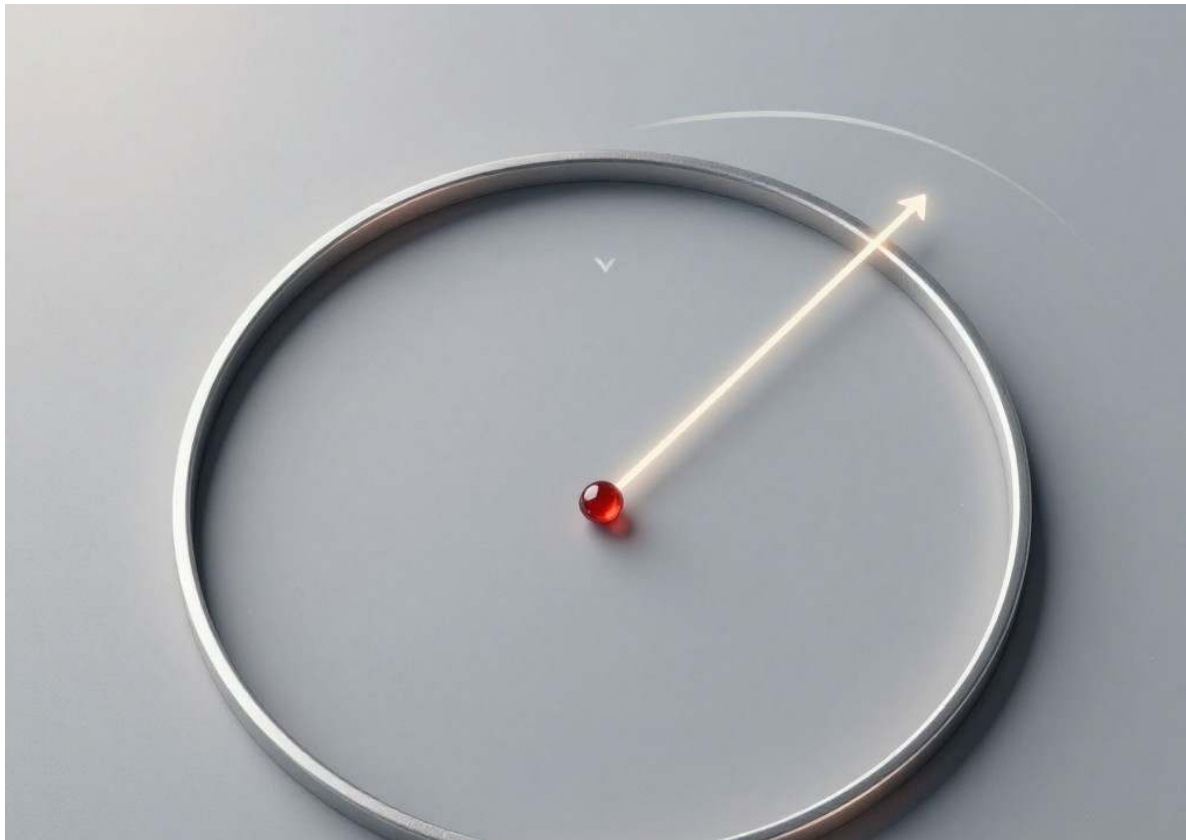
Свойства функций: монотонность, непрерывность, производные

$\arcsin x$ и $\arctan x$ возрастают на всей области определения: чем больше аргумент, тем больше главный угол. Это помогает уверенно сопоставлять знак и величину выражения при решении уравнений.

Функция $\arccos x$ убывает на отрезке $[-1;1]$, поэтому одному и тому же “направлению изменения” соответствует противоположный эффект относительно $\arcsin$. Дополнительно $\arccos$ и $\arctan$ ограничивают выбор главного угла.

Все четыре обратные функции непрерывны на своих областях определения. Их производные имеют вид $1/\sqrt{1-x^2}$, $-1/\sqrt{1-x^2}$, $1/(1+x^2)$ и $-1/(1+x^2)$, что показывает, как меняется скорость изменения углов.

Геометрический смысл на единичной окружности



01

Угол как “геометрический ответ”

На единичной окружности каждой точке соответствует координата x (абсцисса) и ордината y . Когда задано значение $\sin$ или $\cos$, угол определяется как положение радиуса: например, при $x = 1/2$ угол $\pi/6$ дает нужную проекцию по высоте.



02

Проекции превращаются в тригонометрические отношения

Если известно отношение сторон или координат, обратная функция превращает это число в главный угол. Представьте точку, для которой тангенс равен заданному значению: угол находится по положению радиуса и его касательной проекции.



03

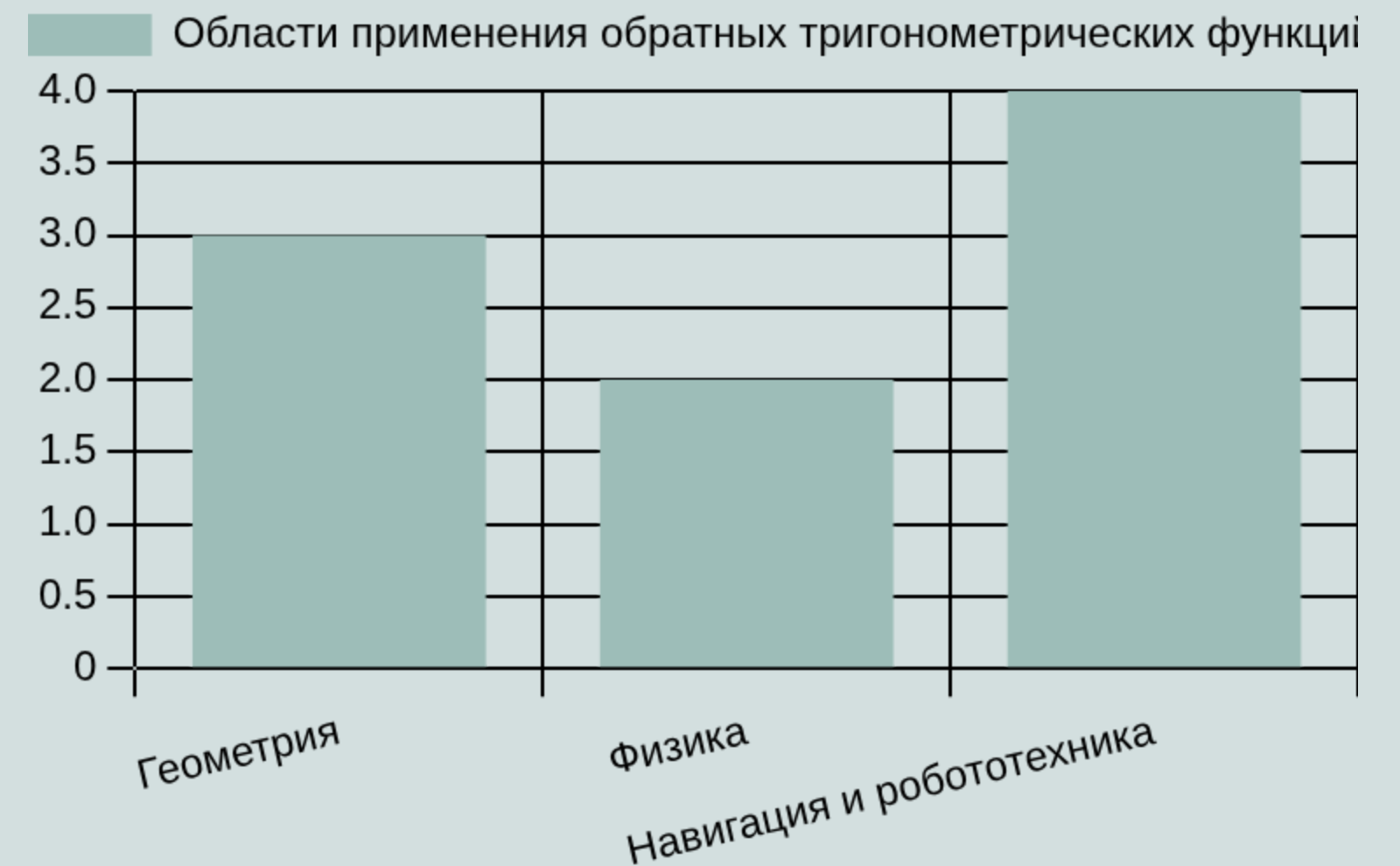
Набор “особых” углов на окружности

Углы $\pi/6$, $\pi/4$ и $\pi/3$ удобно видеть как опорные точки: им соответствуют простые значения синуса, косинуса и тангенса. Именно поэтому наглядная окружность помогает проверять ответы и уменьшать количество ошибок при вычислениях.

Где используются обратные тригонометрические функции

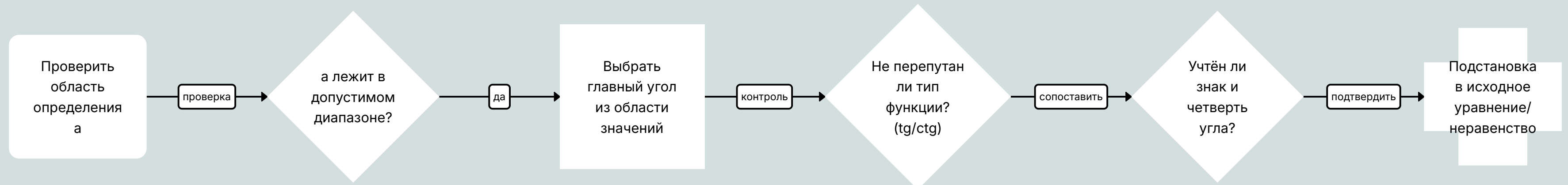
В реальных задачах угол часто является “скрытой” переменной: его восстанавливают по измеренным отношениям, задающим направление или форму траектории.

Связь между измерениями и ориентацией объекта показывает универсальность обратных функций: они переводят числа в геометрический смысл — угол.



Типичные ошибки при работе с обратными функциями

Схема самопроверки при переходе от числа к главному углу



Связь с тригонометрическими уравнениями и неравенствами

Обратные тригонометрические функции появляются, когда уравнение преобразуют к виду $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$ или $\operatorname{ctg} x = a$. Тогда задача сводится к нахождению главного угла.



После вычисления главного угла учитывают периодичность тригонометрических функций, чтобы получить все решения. Это особенно полезно, когда по исходному выражению видно несколько углов.



В неравенствах обратные функции помогают перейти от числового отношения к оценке угла. Важно помнить монотонность соответствующей функции, чтобы корректно выполнить переход знаков.



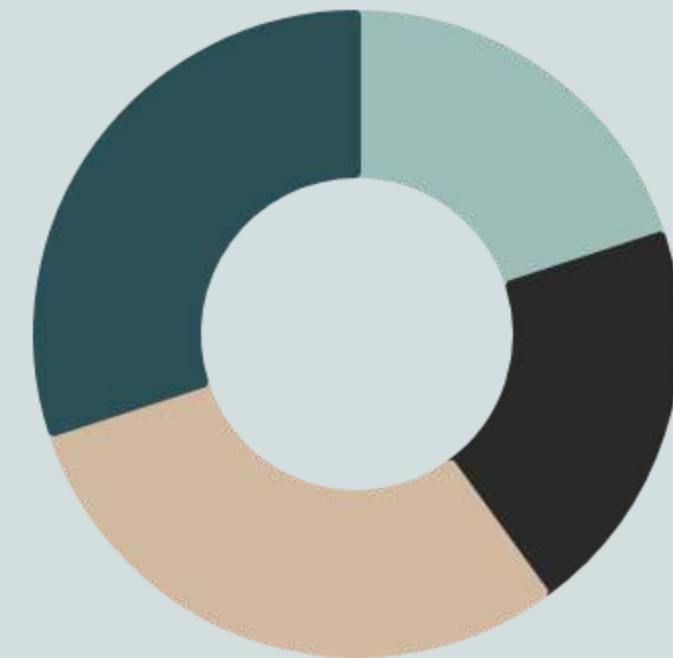
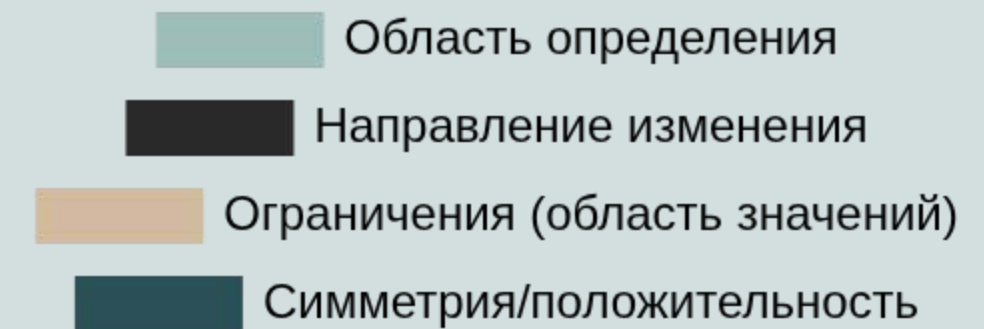
В результате тема приобретает прикладную “проходимость” для усложнённых заданий 11 класса: решение становится системным, а не интуитивным.



Краткое сравнение четырех функций

Чтобы быстро ориентироваться, полезно мысленно держать два “семейства”: $\arcsin/\arctan$ возвращают углы вокруг нуля, $\arccos/\operatorname{arccot}$ — в положительных промежутках.

Диаграмма подчеркивает: различия между функциями задаются не только областью определения, но и выбором главного угла, что определяет единственность результата.



Главный смысл темы: перевод чисел в углы

Обратные тригонометрические функции находят главный угол по известному значению $\sin$, $\cos$, $\tg$ или ctg . Единственность ответа обеспечивается ограничением области значений, а опорные значения и графики помогают проверять решения.