



Тригонометрические функции: основа описания углов и периодических процессов

Угол, координаты и колебания в одной математической модели.



Зачем нужна тригонометрия

Она помогает измерять недоступные расстояния, описывать движение и работать с графиками, уравнениями и единичной окружностью. В 10 классе тригонометрия становится языком для точных вычислений и анализа периодических процессов в природе и технике.



Определение синуса и косинуса острого угла

1

Синус угла

В прямоугольном треугольнике синус острого угла показывает, какую часть гипотенузы составляет противолежащий катет. Значение всегда неотрицательно и не превышает единицу.

2

Косинус угла

Косинус выражает отношение прилежащего катета к гипотенузе. Для острого угла он тоже лежит в промежутке от 0 до 1 и дополняет синус в описании угла.

3

Почему это важно

Именно синус и косинус служат исходной точкой для построения остальных тригонометрических функций, вывода формул и перехода к более общим случаям на окружности.

Тангенс и котангенс: производные тригонометрические функции

- **Формулы через синус и косинус**

Тангенс определяется как отношение $\sin \alpha$ к $\cos \alpha$, а котангенс — как отношение $\cos \alpha$ к $\sin \alpha$. Эти записи сразу показывают связь функций между собой.

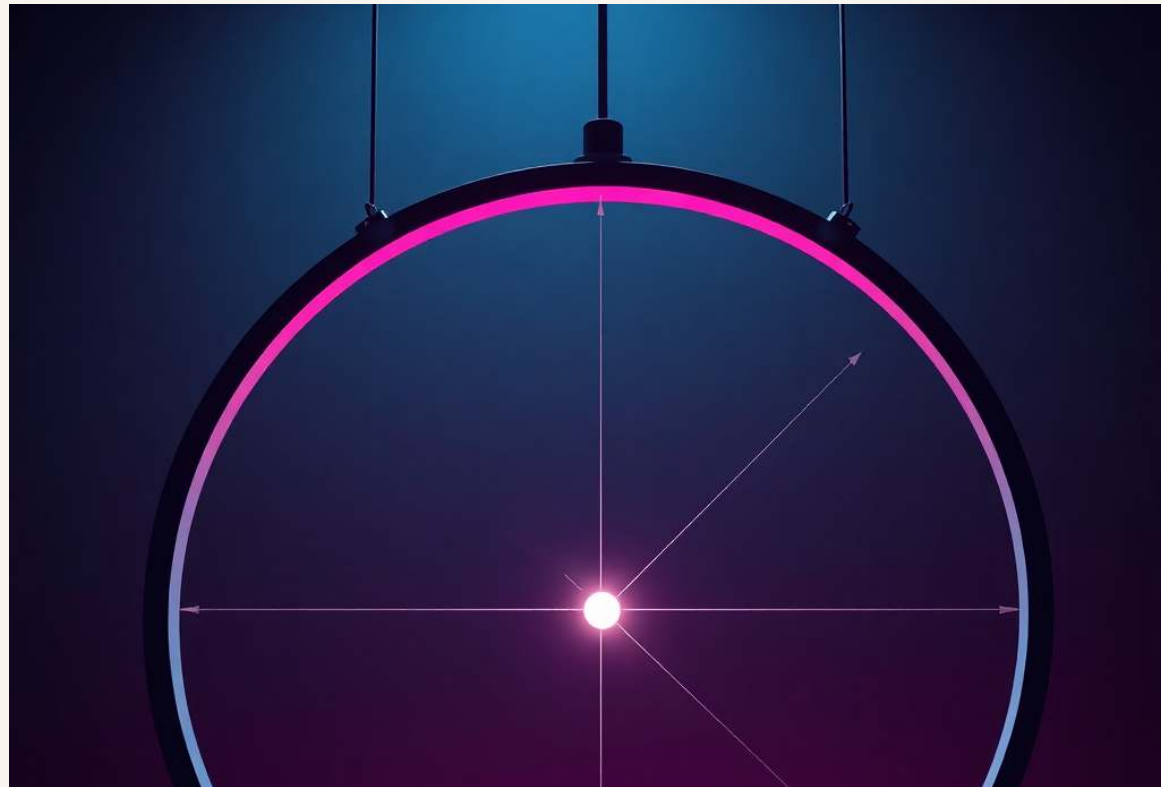
- **Геометрический смысл**

Тангенс равен отношению противолежащего катета к прилежащему, а котангенс — обратному отношению. Поэтому они особенно удобны в задачах на наклон и углы.

- **Область определения**

Если знаменатель равен нулю, функция не существует: $\operatorname{tg} \alpha$ не определён при $\cos \alpha = 0$, а $\operatorname{ctg} \alpha$ — при $\sin \alpha = 0$. Это нужно проверять до вычислений.

Единичная окружность как универсальная модель



Точка, которая задаёт угол

Представьте окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Угол откладывается от положительного направления оси Ox , а положение точки на окружности сразу задаёт две величины: её абсциссу и ординату.



Координаты вместо длины сторон

На единичной окружности координаты точки равны $(\cos \alpha; \sin \alpha)$. Это позволяет находить значения функций не только для острых углов, но и для любых углов, включая больше 90° .



Четыре опорных направления

Повороты на 0° , 90° , 180° и 270° помогают быстро ориентироваться в знаках и значениях. Эти положения становятся опорными точками для построения графиков и решения задач.

Как находить значение тригонометрической функции

Алгоритм для стандартных углов, формул приведения и проверки области определения



Табличные значения основных углов

Опорные значения синуса, косинуса и тангенса для стандартных углов помогают выполнять вычисления без калькулятора и быстро проверять результаты.

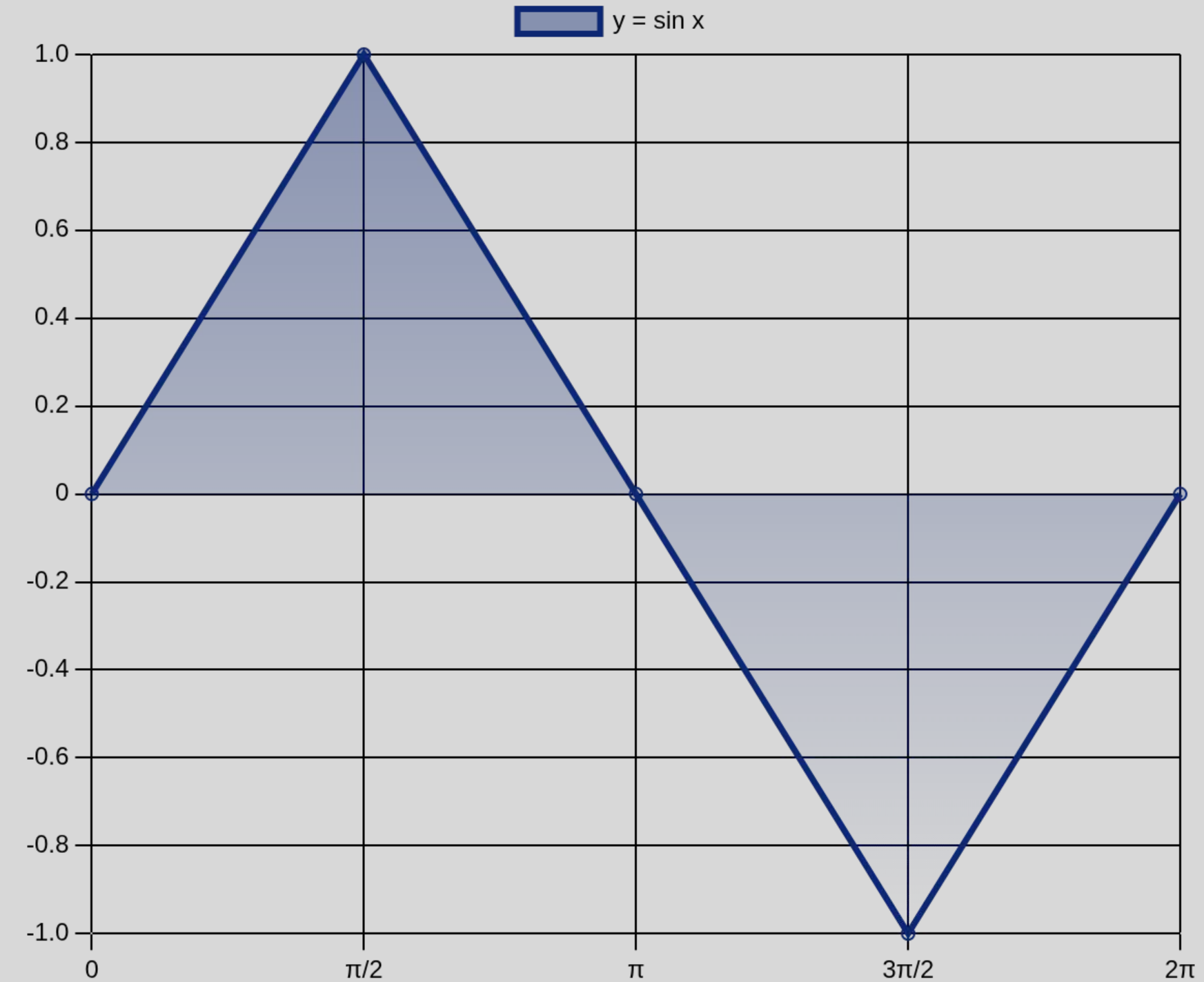
Таблица показывает симметрию и закономерность значений, а также подчёркивает, где тангенс не определён.

Угол	sin	cos	tg
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	не суц.

График функции $y = \sin x$

График начинается в нуле и повторяет одну и ту же волну через каждые 2π .

Синус удобен для описания процессов с плавным подъёмом и спадом, где важны амплитуда и периодичность.

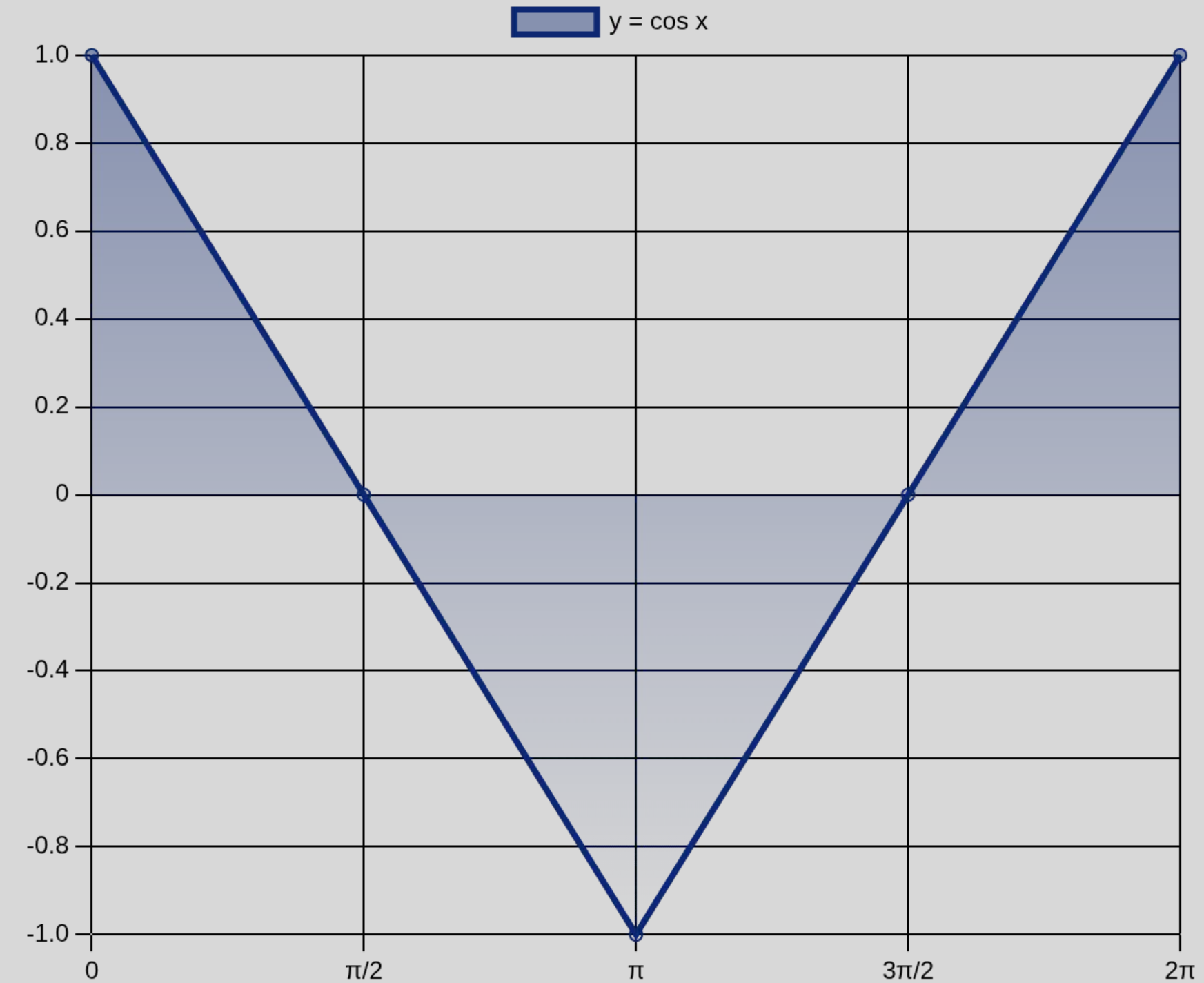


Школьный курс алгебры 10 класса; значения контрольных точек по единичной окружности

График функции $y = \cos x$

Косинус стартует с максимума, поэтому его удобно использовать там, где процесс начинается без задержки.

Чётность графика и его повторяемость через 2π делают косинус особенно наглядным для моделирования колебаний.

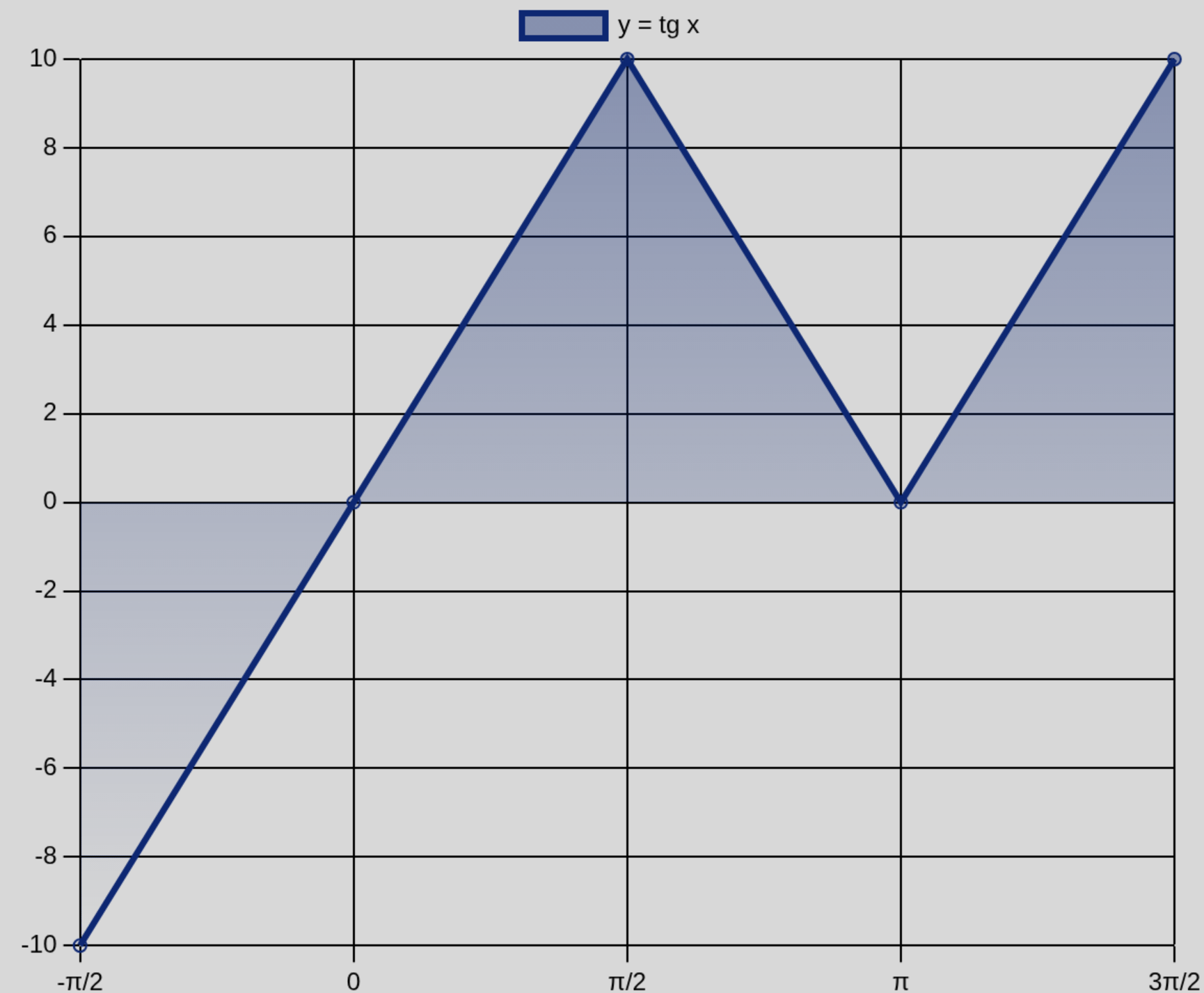


Школьный курс алгебры 10 класса; значения контрольных точек по единичной окружности

График функции $y = \operatorname{tg} x$

На промежутках между асимптотами график быстро растёт и пересекает ось Ox в кратных π .

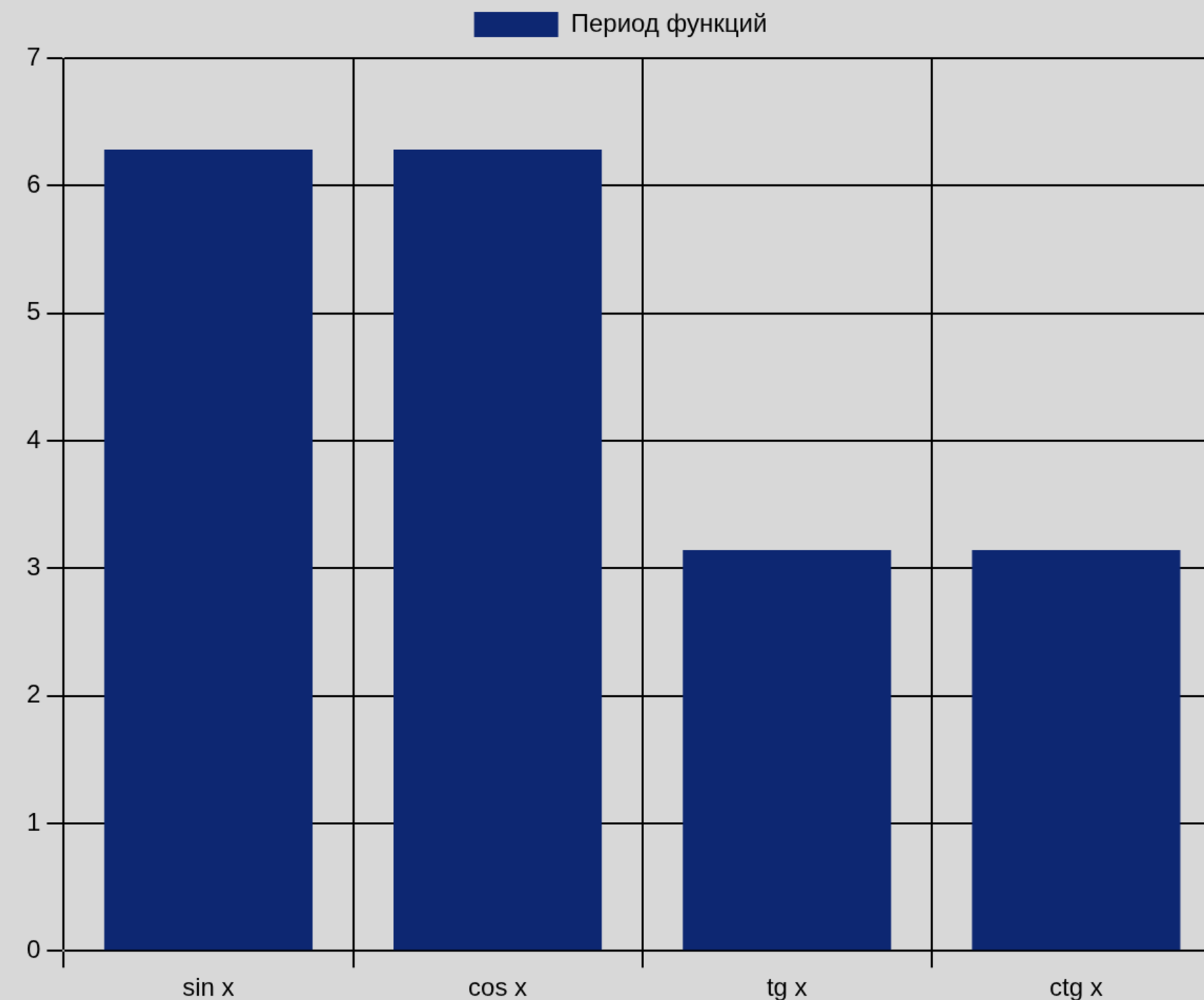
Тангенс показывает резкий характер изменения и требует проверки точек, где функция не определена.



Сравнение основных свойств тригонометрических функций

Синус и косинус удобны для непрерывных моделей, а тангенс и котангенс — для описания угловых зависимостей с разрывами.

Период различает пары функций, а чётность и область определения помогают быстро выбирать нужное выражение в задачах.



Чётность и периодичность тригонометрических функций



Синус как нечётная функция

При замене x на $-x$ синус меняет знак, поэтому его график обладает центральной симметрией относительно начала координат. Это свойство удобно использовать при построении значений для отрицательных углов.



Косинус как чётная функция

Косинус не меняется при переходе от x к $-x$, значит, его график зеркально симметричен относительно оси Oy . Благодаря этому достаточно знать значения только для положительной полуоси.



Период синуса и косинуса

Через 2π значения синуса и косинуса повторяются, поэтому один полный оборот на единичной окружности задаёт весь дальнейший график. Это позволяет быстро продолжать таблицу значений вправо и влево.



Период тангенса и котангенса

Тангенс и котангенс повторяются через π , то есть после половины оборота на окружности. При этом графики содержат разрывы, поэтому при построении важно отмечать точки, где функции не определены.



Практическая польза свойств

Чётность и периодичность сокращают вычисления: вместо прямого подсчёта можно свести угол к опорному значению. В результате задачи решаются быстрее и с меньшим числом вычислительных ошибок.

Основное тригонометрическое тождество

Геометрическая основа

- 01 Точка на единичной окружности имеет координаты, связанные с синусом и косинусом. Так как радиус равен 1, по теореме Пифагора сразу получаем соотношение $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Выражение одной функции через другую

- 02 Из тождества можно выразить $\cos^2\alpha$ через $\sin^2\alpha$ или наоборот. Это помогает находить неизвестное значение, если известна только одна из двух основных тригонометрических величин.

Переход к tg и ctg

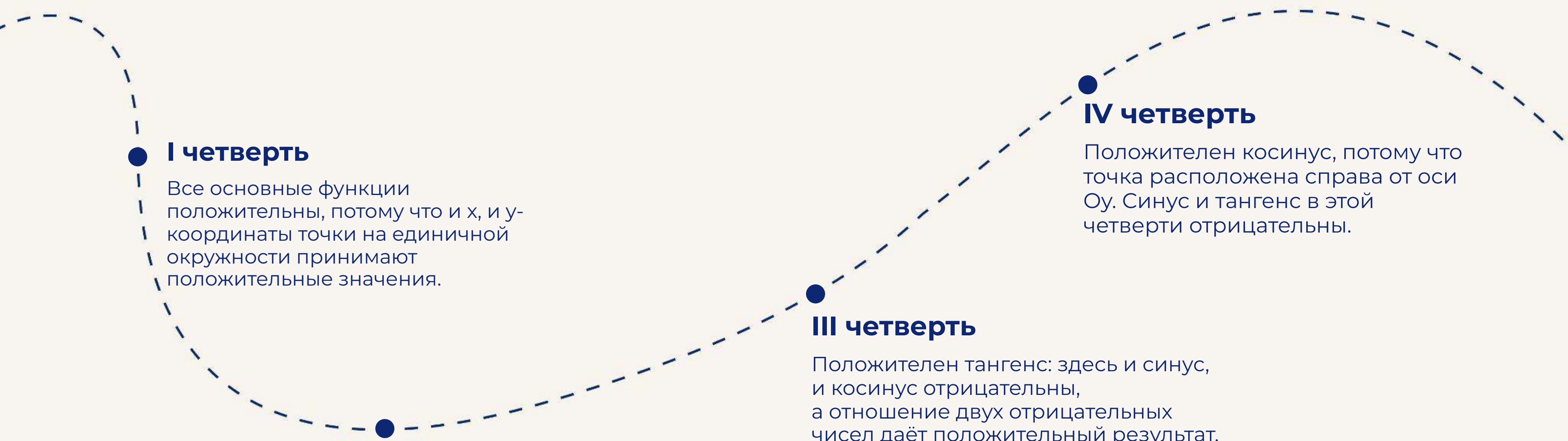
- 03 Разделив равенство на $\cos^2\alpha$ или $\sin^2\alpha$, получают формулы $\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha = \cos \alpha / \sin \alpha$. При этом важно учитывать, что знаменатель не должен обращаться в ноль.

Проверка и преобразования

- 04 Тождество служит надёжным инструментом для упрощения выражений, сокращения дробей и контроля вычислений. Если итоговое равенство нарушается, значит, в преобразованиях допущена ошибка.



Знаки тригонометрических функций по четвертям



I четверть

Все основные функции положительны, потому что и x , и y -координаты точки на единичной окружности принимают положительные значения.

II четверть

Положителен синус, так как ордината точки выше оси Ox . Косинус и тангенс становятся отрицательными.

III четверть

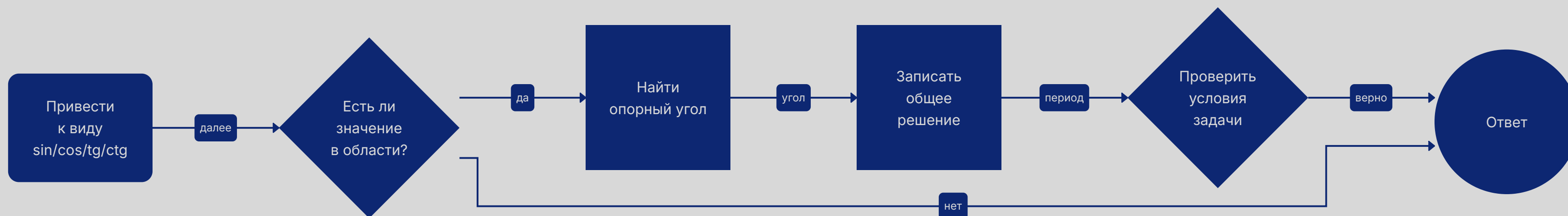
Положителен тангенс: здесь и синус, и косинус отрицательны, а отношение двух отрицательных чисел даёт положительный результат.

IV четверть

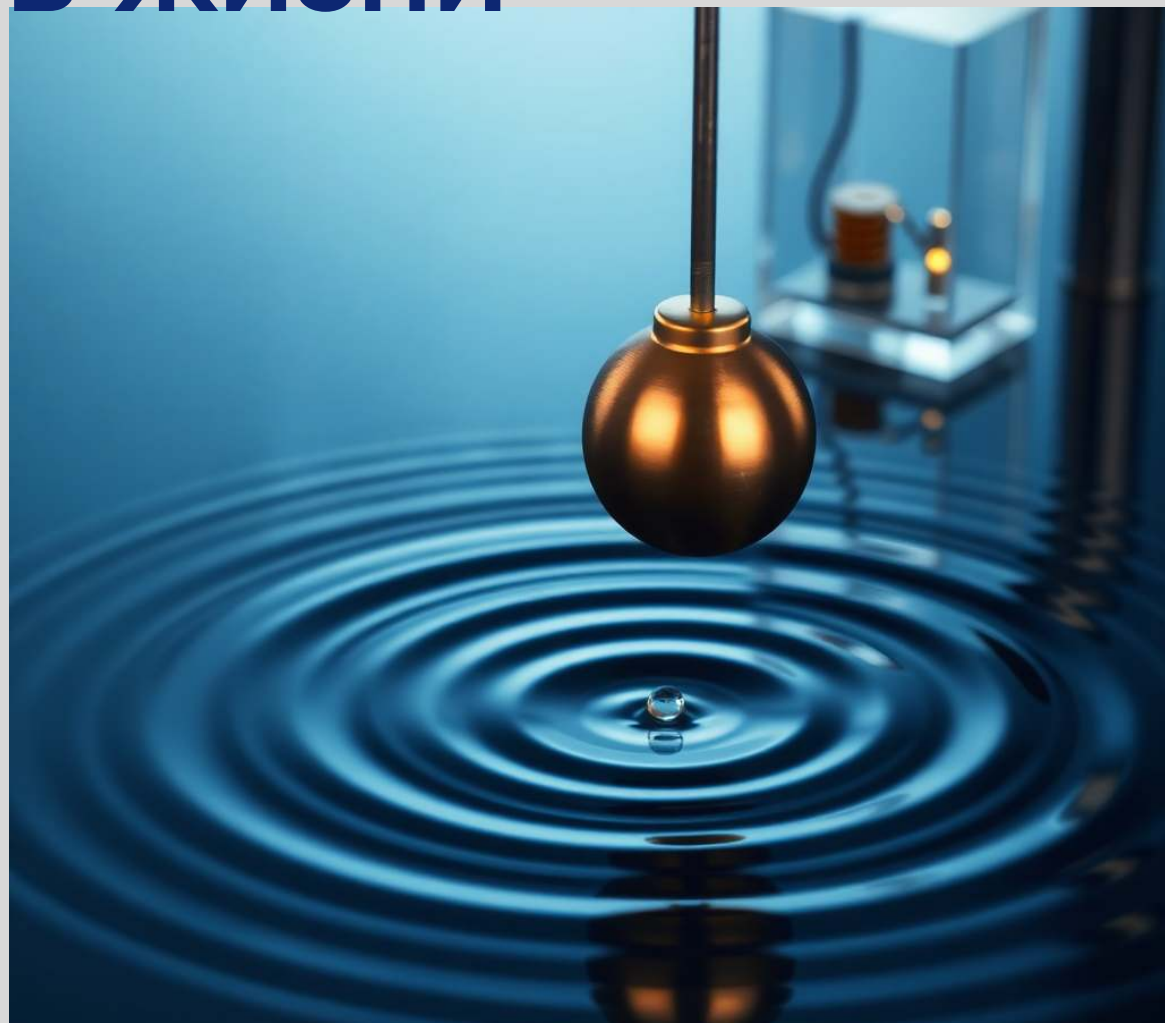
Положителен косинус, потому что точка расположена справа от оси Oy . Синус и тангенс в этой четверти отрицательны.

Алгоритм решения простого тригонометрического уравнения

Последовательность основана на области значений функций, табличных углах и периодичности.



Примеры применения тригонометрических функций В ЖИЗНИ



Маятник и волна: движение, которое можно посчитать

Когда маятник отклоняется от положения равновесия, его смещение меняется плавно и повторяемо, как синус или косинус. Тот же принцип описывает звуковую волну и колебания в электрической цепи, поэтому один график помогает увидеть общую структуру разных процессов.



Наклон, который измеряют через угол

При проектировании крыши, пандуса или дороги инженеру важно знать не только длину, но и угол наклона. Тангенс связывает высоту и горизонтальное расстояние, позволяя перевести геометрию объекта в удобные для расчёта числа.



Высота без прямого измерения

Если подойти к зданию, дереву или горе невозможно, расстояние и высоту определяют по углу наблюдения и измеренной базе. Такой приём широко используется в геодезии и навигации, где тригонометрия заменяет трудоёмкий прямой замер.

Типичные ошибки при изучении темы

Градусы и радианы

Смешение двух единиц измерения приводит к неверному значению угла и, как следствие, к ошибке в знаке или периоде. Перед вычислением нужно проверить, в какой системе задан аргумент.

Неверная четверть

Ошибочный выбор четверти меняет знак ответа, хотя опорный угол найден правильно. Полезно сначала определить положение точки на окружности, а уже затем записывать значение функции.

Забытый период

Иногда берут только одно частное решение и не продолжают его через период функции. В результате ответ оказывается неполным и не отражает все допустимые значения.

tg при $\cos \alpha = 0$

Тангенс нельзя вычислять в точках, где косинус равен нулю: функция там не определена. Игнорирование этой особенности ведёт к формально записанному, но неверному ответу.

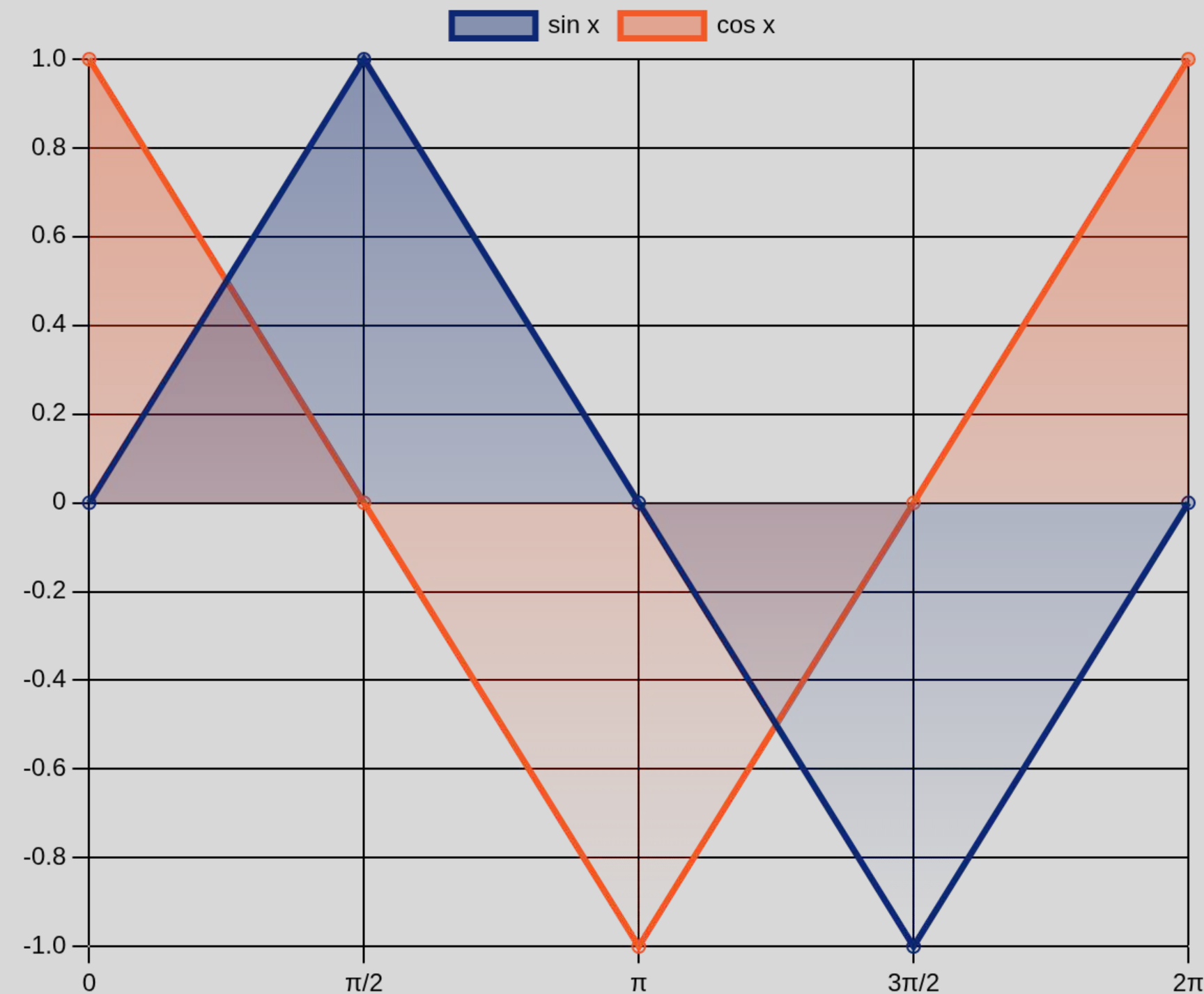
Слепое использование таблицы

Табличные значения подходят только для стандартных углов и их простых преобразований. Если угол не опорный, необходимо сначала привести его к известному виду.

Тригонометрические функции как модель колебаний

Синус и косинус задают одинаковую по форме волну, но с разным начальным состоянием. Это удобно для описания процессов, начинающихся в разных фазах.

Повторяемость, амплитуда и сдвиг делают тригонометрические функции универсальной моделью периодических явлений.



Ключевые формулы и обозначения по теме

Формула	Смысл	Особенность
$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$	основное тождество	для всех α
$\operatorname{tg} \alpha=\sin/\cos$	отношение сторон	$\cos \alpha\neq 0$
$0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$	опорные углы	табличные значения

Сводная таблица объединяет определения, тождества, периоды и опорные значения для быстрых вычислений и проверки ответов.

Все записи работают вместе: они позволяют находить значения, преобразовывать выражения и решать уравнения без лишних вычислений.

Тригонометрия как язык углов и повторяющихся процессов

Тригонометрические функции связывают геометрию, координаты и колебания в единую систему. Освоив их свойства и формулы, можно уверенно строить графики, находить значения и решать задачи прикладного характера.