

# Вычисление интегралов: основная идея и школьные способы

От первообразной к площади: интеграл  
без лишней сложности.



# Интегралы как продолжение темы производной

Тема интегралов показывает обратную сторону производной: одна функция описывает изменение, другая — восстановление. Именно поэтому 11 класс связывает формулы, графики и реальные накопления величин во времени.



Это показывает, что неопределённый интеграл задаёт не одну функцию, а целое семейство решений с одинаковой производной.



первообразных имеет одна и та же функция, если прибавлять произвольную постоянную  $C$ .

Определение первообразной и неопределённого интеграла из школьного курса математического анализа

# Основная связь: производная и интеграл



## Обратимость операций

Если известна производная функции, то интеграл позволяет восстановить исходную зависимость с точностью до постоянной. Это делает две операции взаимодополняющими в анализе.

## Степенная формула

Для степенных функций при  $n \neq -1$  действует удобное правило: показатель увеличивается на единицу, а затем результат делится на новый показатель. Это базовый шаблон вычислений.

## Смысл восстановления

Интегрирование отвечает на вопрос, какая функция имела заданную скорость изменения. Поэтому график производной помогает мысленно перейти к первообразной и понять характер исходной кривой.

## Роль изображения

Схема на слайде показывает именно этот переход: от заданного изменения к функции, которая его породила. Такой визуальный пример особенно полезен при первом знакомстве с темой.

# Основные интегралы, которые нужно знать



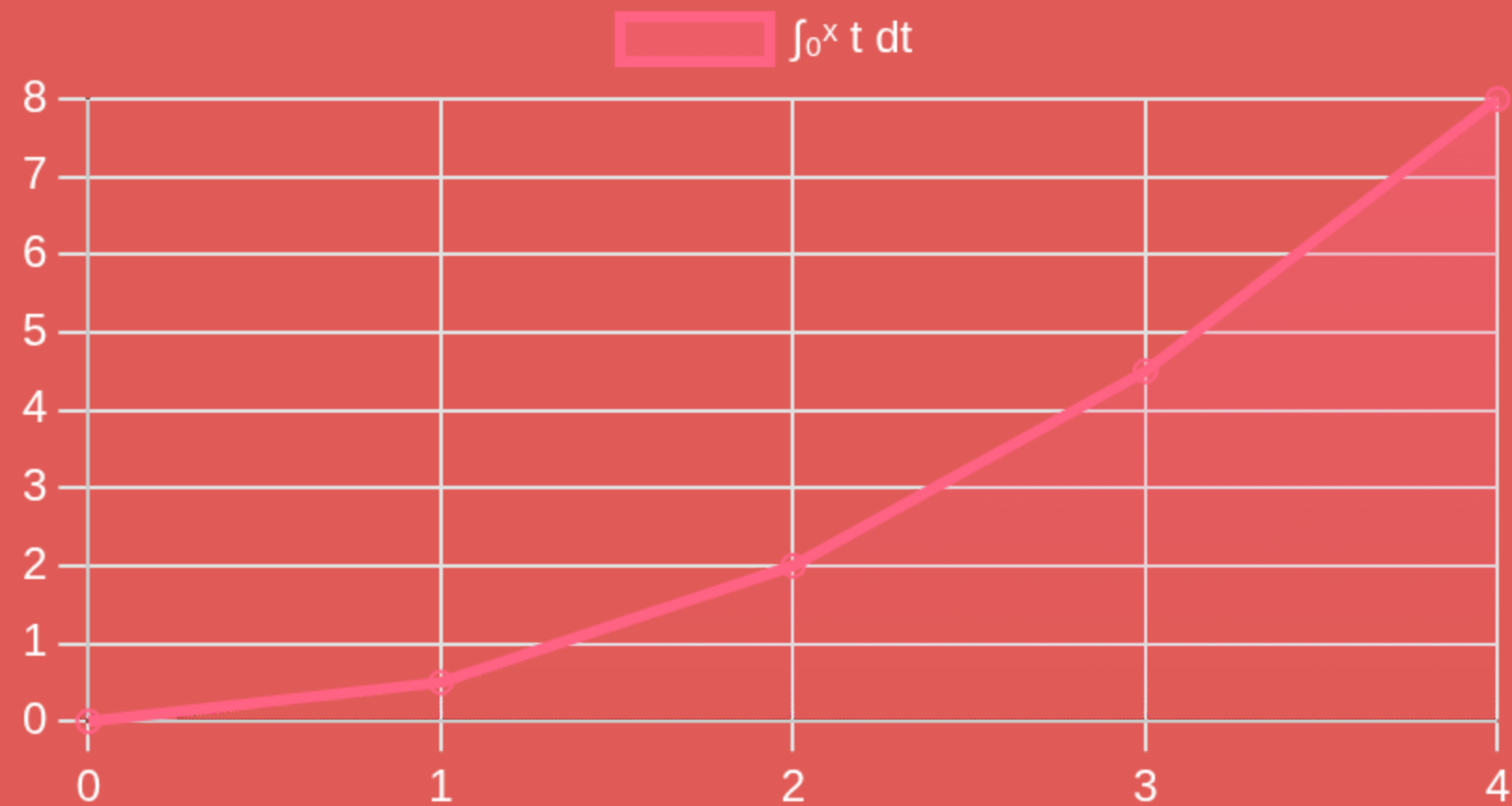
Набор формул, который используется как основа для большинства школьных вычислений.

Таблица показывает, что большинство задач сводится к распознаванию знакомой формы и аккуратному учёту постоянной C.

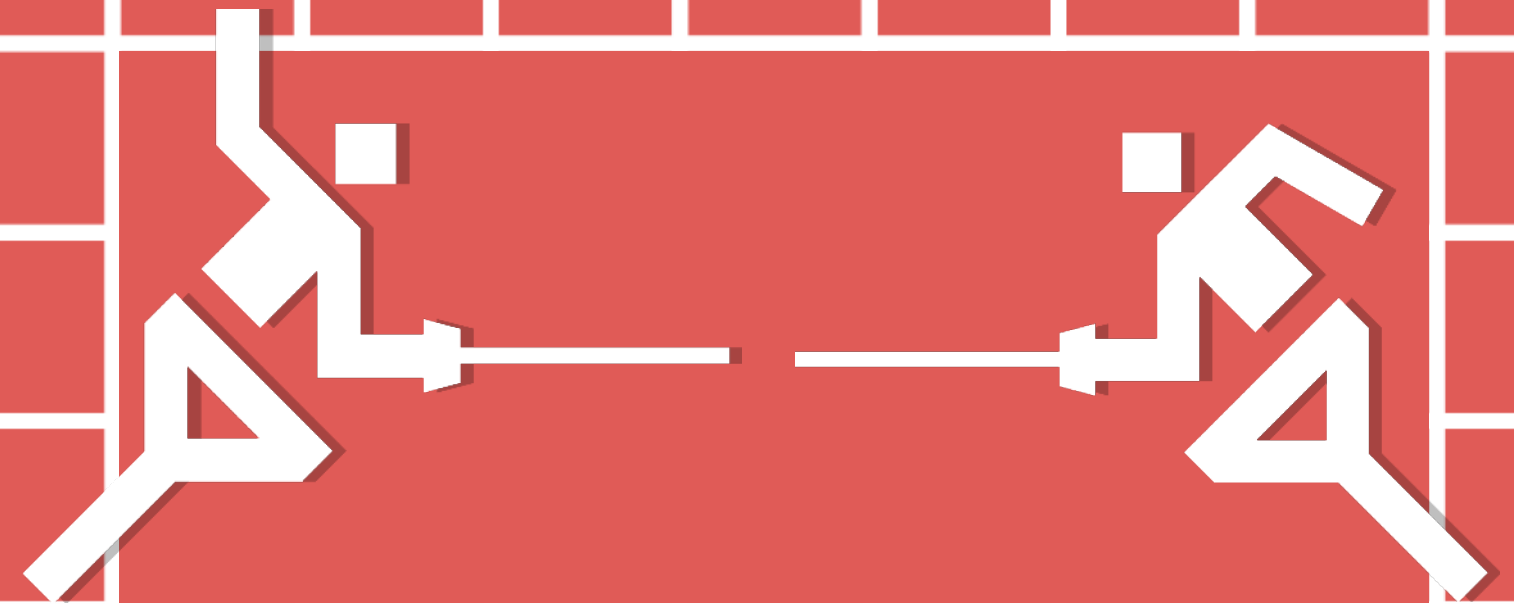
| Формула                 | Результат                   |
|-------------------------|-----------------------------|
| $\int 1 dx$             | $x+C$                       |
| $\int x dx$             | $x^2/2+C$                   |
| $\int e^{\lambda x} dx$ | $e^{\lambda x}/\lambda + C$ |
| $\int \sin x dx$        | $-\cos x + C$               |

Стандартные табличные интегралы школьного курса

# Как накапливается площадь под графиком



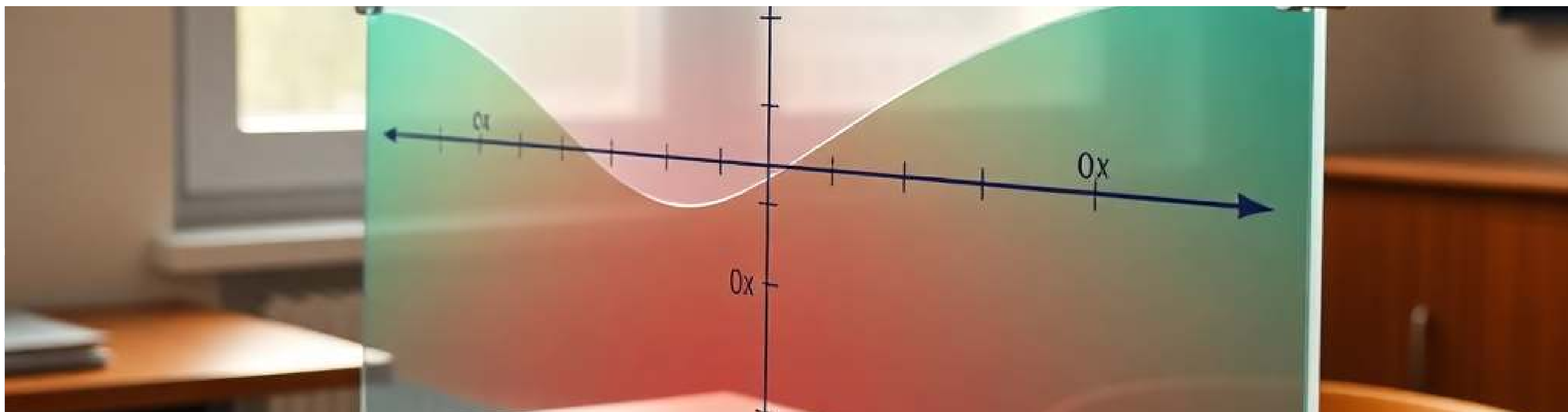
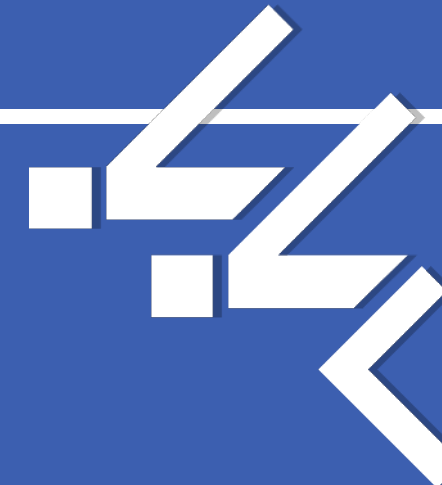
Учебная иллюстрация на основе функции  $f(x)=x$ ,  $[0; 4]$



Значение растёт неравномерно:  
чем больше  $x$ , тем быстрее  
увеличивается накопленная  
площадь.

Для возрастающей функции  
прирост интеграла ускоряется,  
поэтому важны не только границы  
отрезка, но и форма графика.

# Определённый интеграл и его геометрический смысл



## Ориентированная площадь

Определённый интеграл измеряет не просто площадь, а её алгебраическую сумму. Участки выше оси  $Ox$  дают положительный вклад, а участки ниже — отрицательный.

## Зависимость от границ

Меняя пределы интегрирования, мы меняем рассматриваемый участок графика. Поэтому одно и то же выражение может давать разные численные значения на разных промежутках.

## Поведение функции

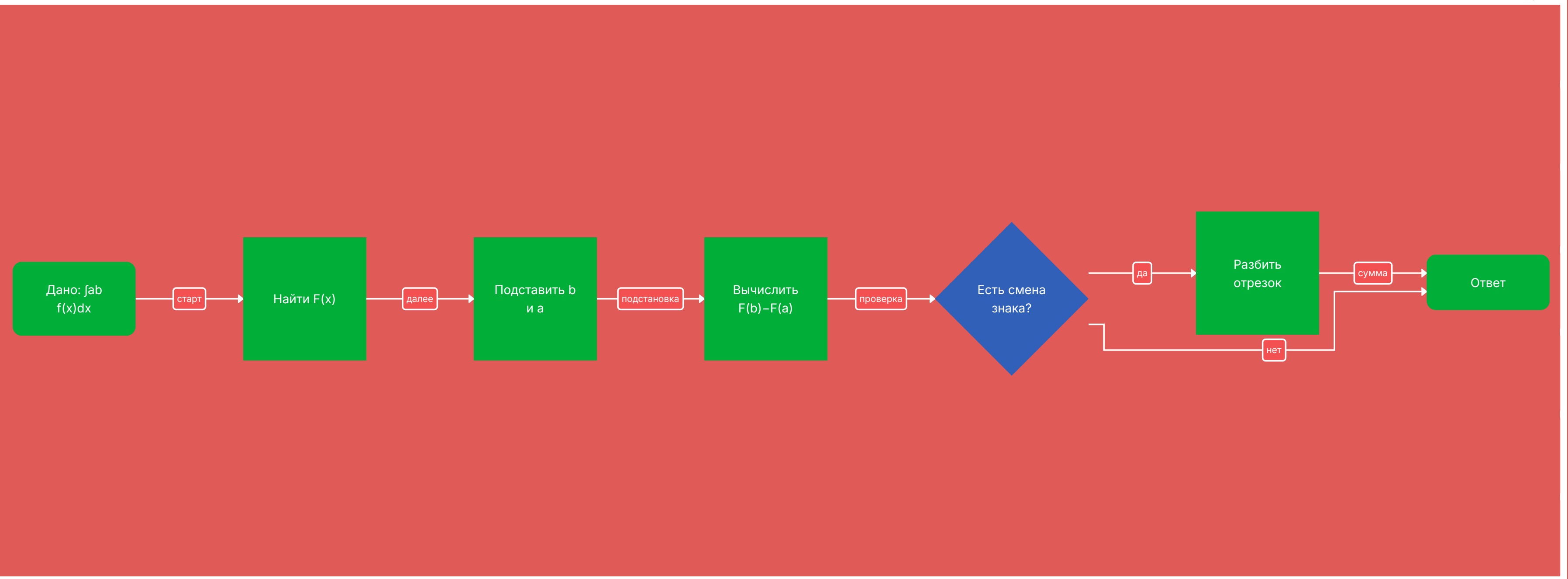
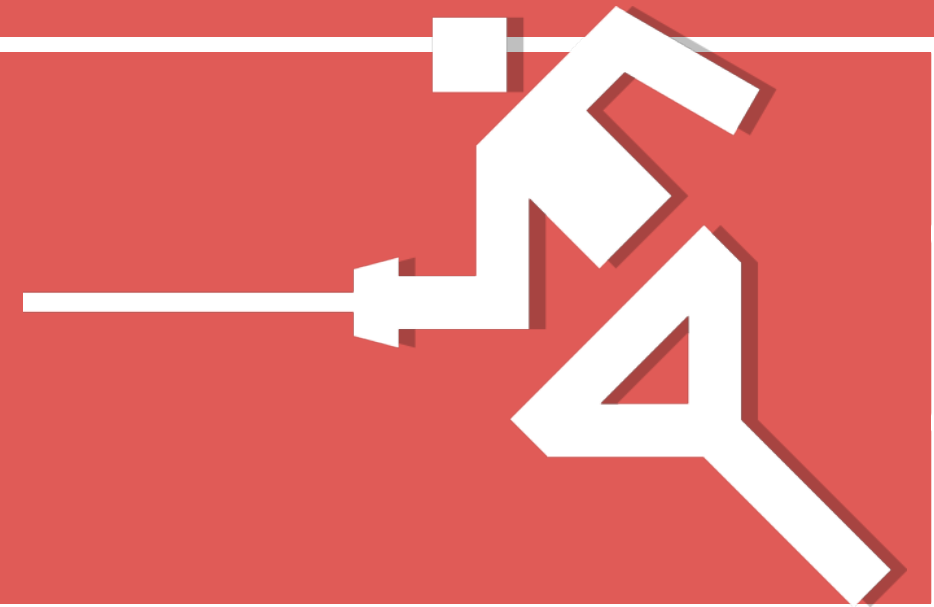
Результат определяется не одной точкой, а всей кривой на отрезке. Даже при одинаковой длине промежутка интеграл может заметно отличаться из-за разной формы графика.

## Геометрическая интерпретация

Такой подход помогает переводить алгебраическую запись в наглядный образ. Интеграл становится способом измерять накопление площади между графиком и осью координат.

# Алгоритм вычисления определённого интеграла

Последовательность действий для школьных задач с определённым интегралом.



# Свойство линейности интеграла

1

## Разложение суммы

Интеграл можно распределять по слагаемым, поэтому сложное выражение не нужно вычислять целиком. Сначала выделяют простые части, а затем находят их интегралы по отдельности.

2

## Вынесение множителя

Постоянный коэффициент можно вынести за знак интеграла. Это особенно удобно в задачах с многочленами и линейными комбинациями стандартных функций, где коэффициенты мешают лишь внешне.

3

## Практическая польза

Линейность экономит время и снижает риск ошибки: вместо одной громоздкой записи получается несколько коротких вычислений, которые легче проверить и объединить в общий ответ.

# Метод подстановки: замена переменной

## Выбрать замену

1

Сначала замечают внутреннюю функцию, которая повторяется в выражении. Затем вводят новую переменную  $u = g(x)$ , чтобы сделать запись короче и приблизить её к табличной форме.

## Перейти к $du$

2

После дифференцирования находят связь между  $dx$  и  $du$ , полностью переписывают интеграл в новых обозначениях и упрощают вычисление до стандартного вида.

## Вернуться к $x$

3

Когда ответ найден, выполняют обратную замену и возвращаются к исходной переменной. Этот шаг обязателен, иначе результат останется в промежуточной форме и потеряет смысл.



# Главные идеи формулы



## Разделить выражение

Сначала выбирают множитель  $u$ , который удобно дифференцировать, и  $dv$ , который легко интегрировать. Такой выбор делает произведение проще и переводит исходный интеграл к более короткой записи.



## Получить новую форму

После вычисления  $v$  формула  $\int u dv = uv - \int v du$  превращает сложное произведение в более простое. Вторая часть обычно содержит интеграл, который уже решается стандартными способами.



## Удобные примеры

Метод особенно полезен для выражений  $x \cdot e^x$ ,  $x \cdot \sin x$ ,  $x \cdot \cos x$  и  $\ln x$ . В таких задачах одна часть становится проще после дифференцирования, а другая не вызывает трудностей при интегрировании.



## Проверить результат

После вычисления важно аккуратно раскрыть скобки, не потерять знак минус и при необходимости добавить постоянную  $C$ . Это помогает избежать ошибок в ответе и правильно оформить решение.



# Частые ошибки и как их избежать



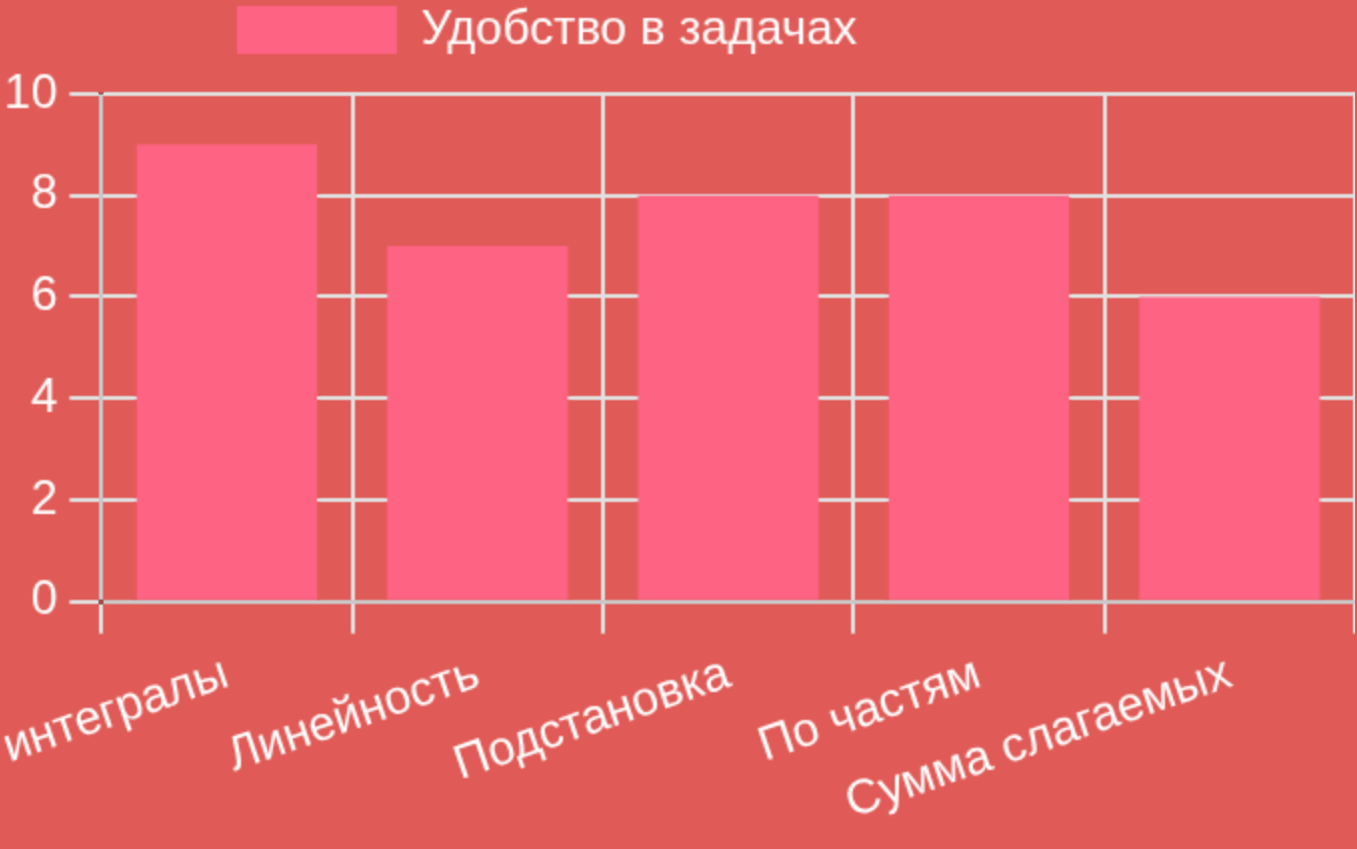
| Ошибка             | Как правильно                |
|--------------------|------------------------------|
| Без C              | + C в конце                  |
| Пределы перепутаны | $F(b)-F(a)$                  |
| Минус потерян      | $\sin \leftrightarrow -\cos$ |
| Подмена переменной | $u, du$                      |

Таблица показывает наиболее распространённые ошибки при работе с интегралами и напоминает, как должна выглядеть корректная запись.

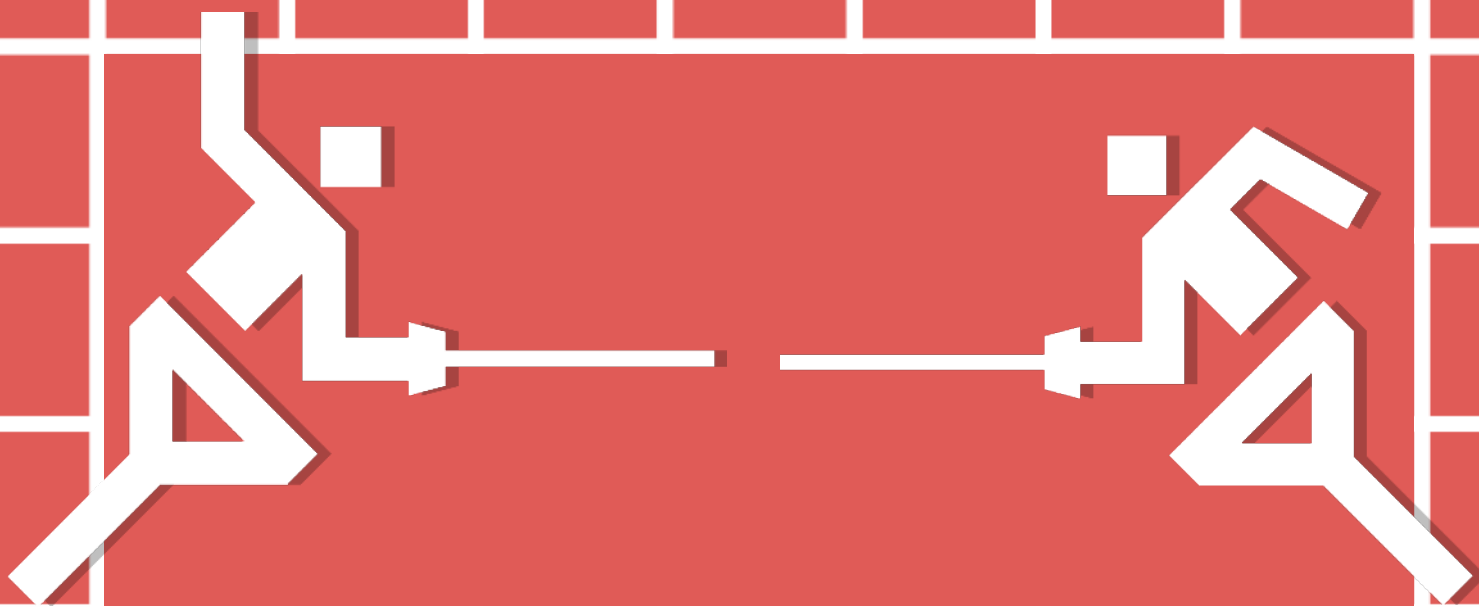
Большинство ошибок связано не с самой идеей интеграла, а с записью формулы и внимательностью при подстановке пределов, знаков и переменной.

Школьные правила вычисления неопределённых и определённых интегралов

# Сравнение основных методов вычисления



Сравнительная схема школьных методов интегрирования, составлено по типовым примерам курса



Оценка отражает, насколько часто метод помогает в типовых школьных примерах: от простых многочленов до произведений и составных выражений.

Базовые формулы нужны чаще всего, но самые универсальные приёмы — подстановка и интегрирование по частям: они охватывают больше нестандартных заданий.

# Площадь между двумя графиками

## 1. Найти точки пересечения

Сначала определяют, где графики пересекаются, чтобы понять границы будущей фигуры. Именно эти точки задают отрезок, на котором будет считаться площадь

## 2. Проверить порядок функций

На каждом участке выясняют, какая функция расположена выше. Если порядок меняется, отрезок разбивают на части и считают площадь отдельно для каждой

## 3. Вычислить сумму площадей

Для участков, где порядок не меняется, используют интеграл разности. Затем складывают полученные значения и получают площадь фигуры, ограниченной двумя графиками.

# Как интеграл работает в реальных задачах

## Путь по графику скорости

Если скорость меняется во времени, путь находят как площадь под графиком скорости. На схеме это выглядит как накопление пройденного расстояния: чем дольше движется тело и чем выше скорость, тем больше итоговое значение.

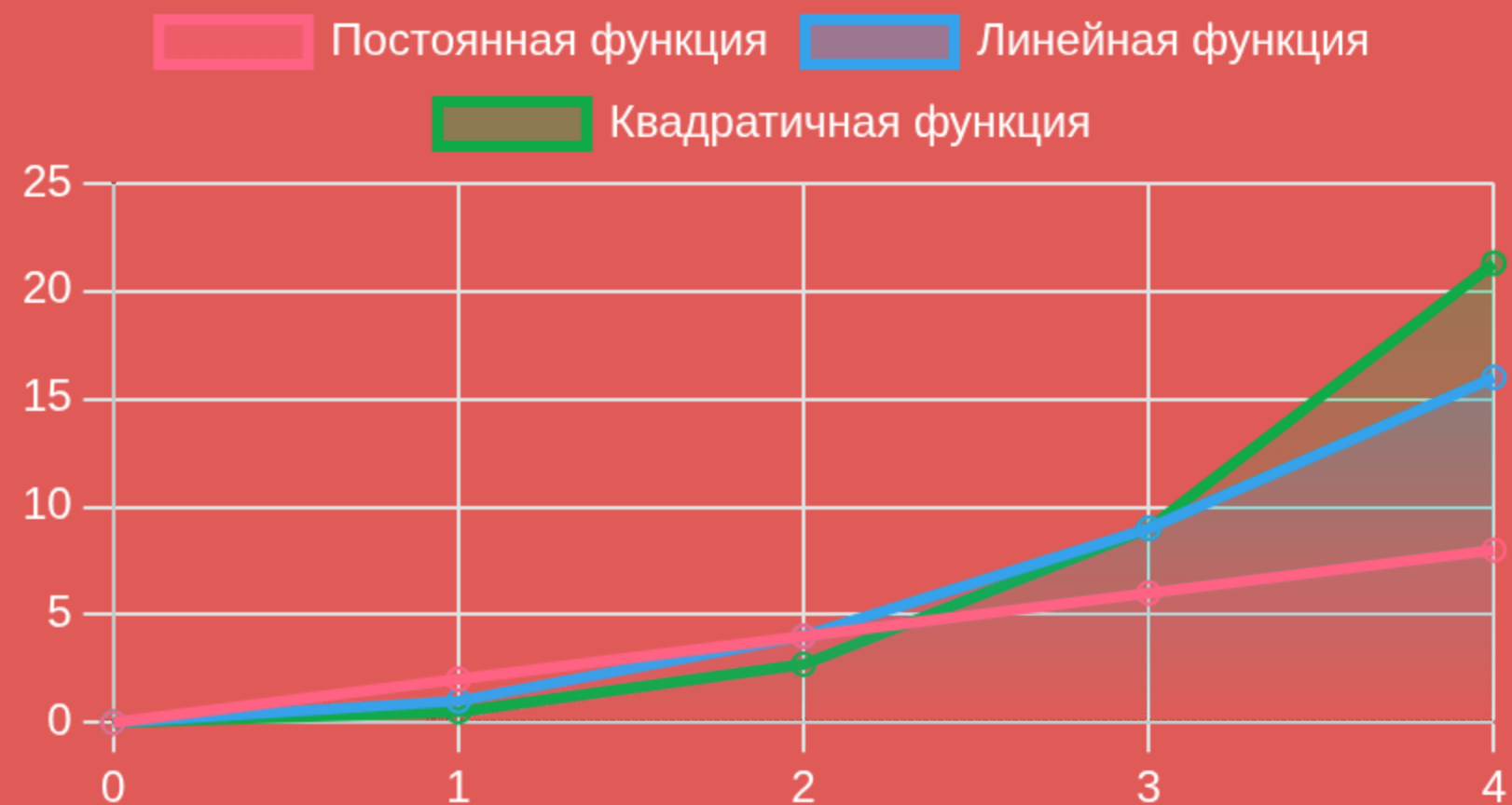


## Работа переменной силы

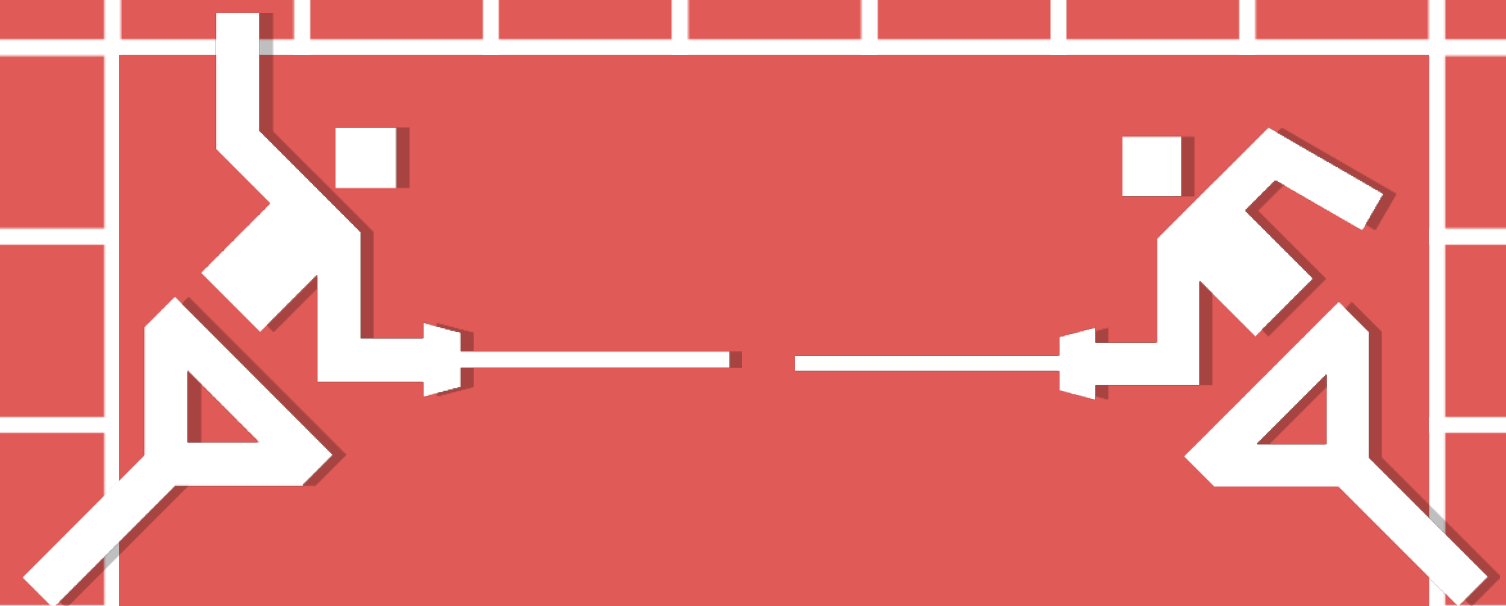
Когда сила зависит от координаты, работа определяется интегралом по пути. Такой подход показывает, что важна не одна точка, а весь участок действия силы, поэтому интеграл естественно описывает процесс накопления.



# Как меняется накопленная величина для разных функций



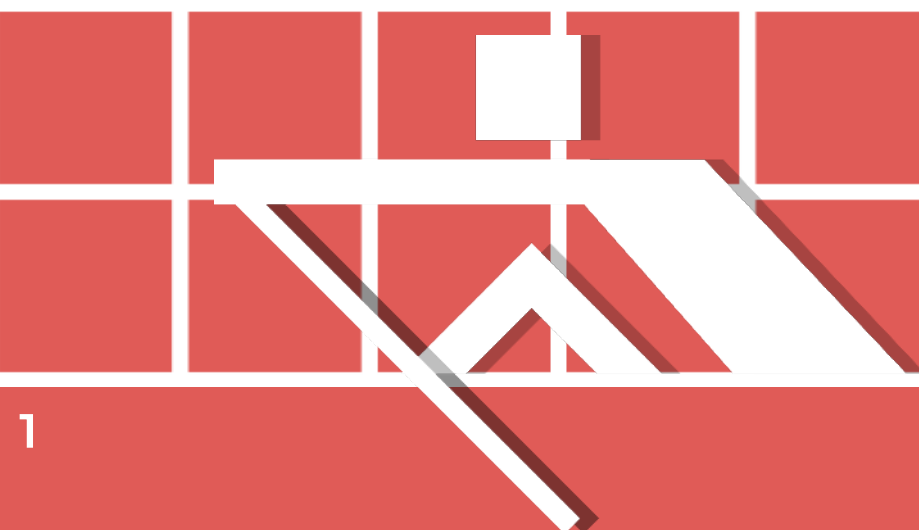
Иллюстративные значения для сравнения формы накопления, учебный пример



Для одной и той же длины промежутка интеграл может расти по-разному: решающим становится не только уровень графика, но и скорость его увеличения.

Чем быстрее растёт функция, тем сильнее ускоряется накопление площади. Интеграл отражает поведение всей кривой, а не значение в одной точке.

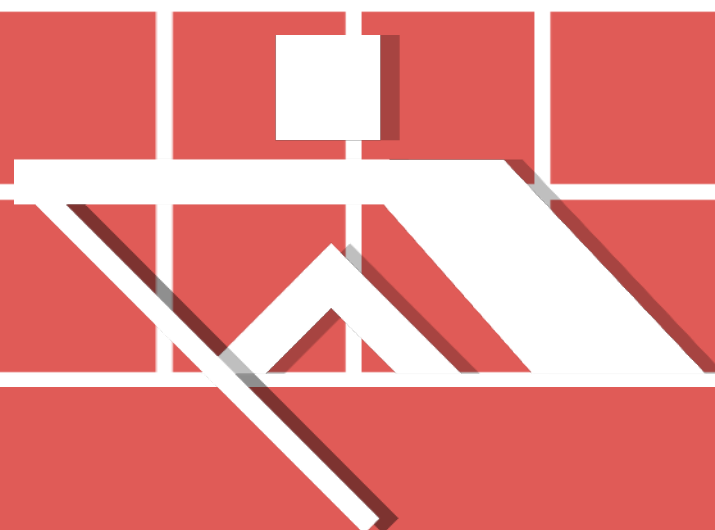
# Порядок действий при приближённом вычислении



1

## Прямоугольники

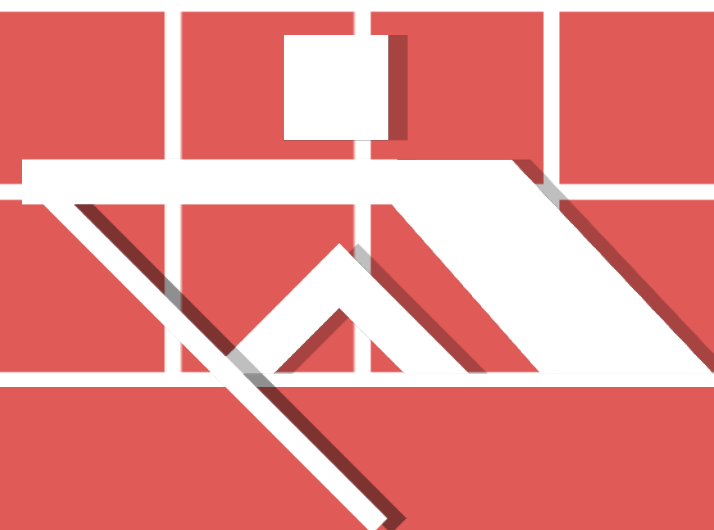
Отрезок делят на части и заменяют кривую набором прямоугольников. Метод прост в понимании, но точность зависит от числа разбиений и способа выбора высоты каждого прямоугольника.



2

## Трапеции

Вместо прямоугольников используют трапеции, соединяя соседние точки графика отрезками. Такой способ обычно даёт более ровное приближение площади и удобен для учебных расчётов.



3

## Формула Симпсона

Метод Симпсона строит более точную аппроксимацию на основе параболических участков. Он полезен, когда нужна высокая точность, а точную первообразную получить трудно или невозможно.

# Формулы, которые стоит запомнить



Таблица собирает основные соотношения темы и помогает быстро сверить, где используется первообразная, где — пределы, а где — постоянная C.

Все ключевые приёмы сводятся к нескольким базовым правилам: связи с производной, формуле Ньютона–Лейбница, линейности и интегрированию по частям.

| Формула                            | Условие        |
|------------------------------------|----------------|
| $\int f'(x)dx=f(x)+C$              | Неопределённый |
| $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$        | Есть $F' = f$  |
| $\int (af+bg)dx=af\int f+bf\int g$ | Любые $a, b$   |
| $\int u dv=uv-\int v du$           | Произведение   |

Основные формулы интегрирования школьного курса

# Почему этот раздел важен



## Подготовка к экзамену

Базовые навыки вычисления интегралов встречаются в заданиях ЕГЭ и проверяют не только формулу, но и умение выбрать подходящий способ решения.



## Геометрический смысл

Интегралы помогают находить площади фигур, ограниченных графиками и осями координат. Это делает абстрактные записи наглядными и связанными с чертежом.



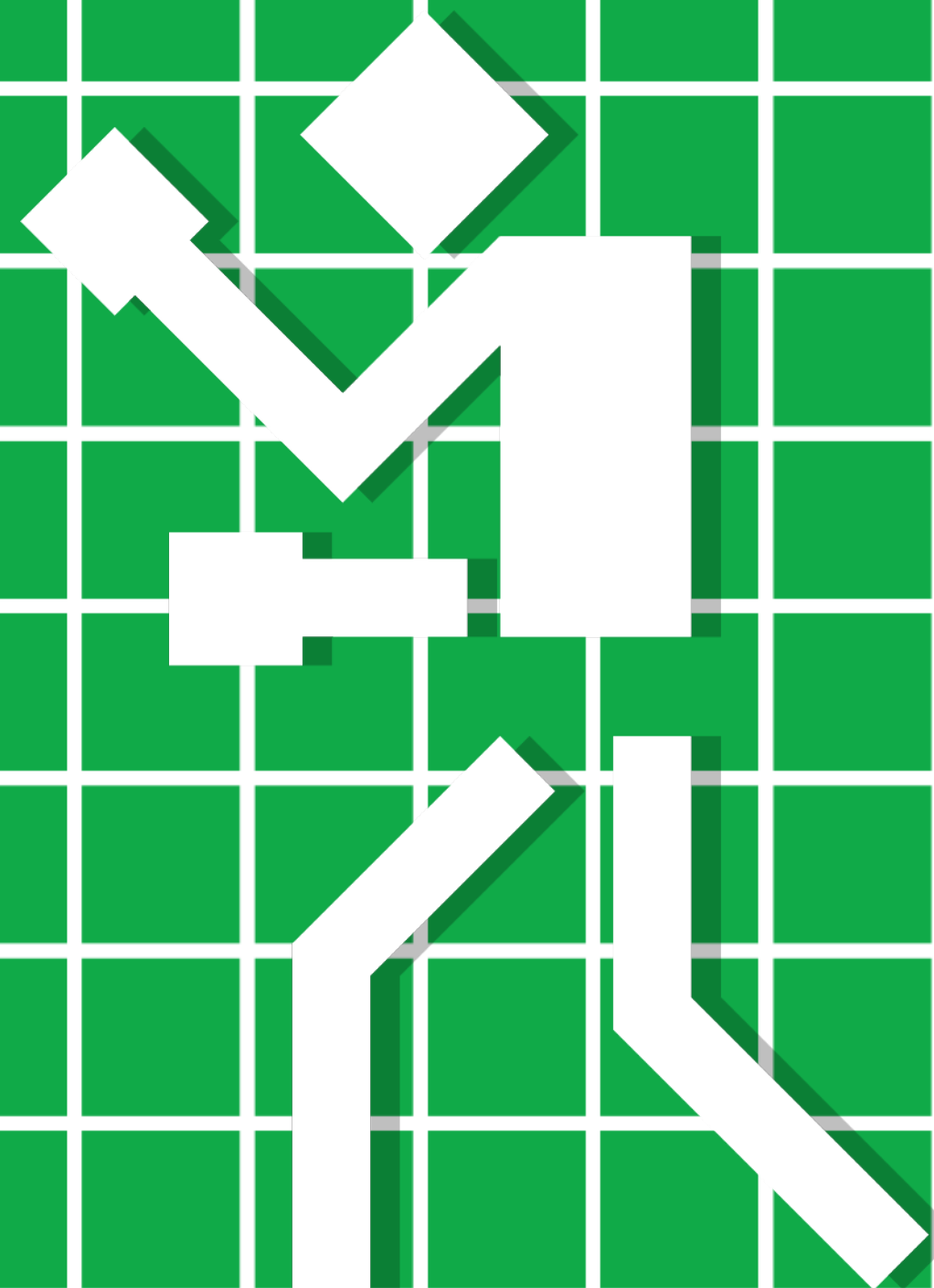
## Движение и накопление

При анализе пути, скорости и работы интеграл показывает, как величина накапливается со временем или по координате. Так математика описывает реальные процессы.



## Понимание, а не шаблон

Освоение темы учит видеть структуру задачи: где нужна первообразная, где — пределы, а где — разбиение на части. Это развивает математическое мышление.



# Интеграл — мост между формулой и смыслом

Интеграл объединяет вычисления,  
геометрию и прикладные задачи:  
он показывает, как из локального  
поведения функции получается  
итоговая величина на всём промежутке.

