

Скалярное произведение векторов в геометрии 9 класса

Связь длины, угла и вычислений в одной важной теме.

1 ÷ 2

log

8



Почему эта тема важна в 9 классе

Скалярное произведение позволяет решать геометрические задачи короче, объединяя чертёж, координаты и вычисления в одном удобном инструменте.



Что такое скалярное произведение

Это число

Скалярное произведение двух векторов не образует новый вектор. Результат вычисления — обычное число, которое помогает описать взаимное расположение направлений.

Зависит от двух факторов

Значение определяется длинами векторов и углом между ними. Даже при одинаковых длинах результат может измениться, если векторы направлены по-разному.

Может быть разным по знаку

Скалярное произведение бывает положительным, нулевым или отрицательным. По этому знаку можно быстро судить, как расположены векторы относительно друг друга.



Формула через длины векторов и угол

1

Записываем формулу

Основное правило: $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos \alpha$. Оно показывает, что результат зависит не только от величин векторов, но и от угла между ними.

2

Понимаем обозначения

Здесь $|a|$ и $|b|$ — длины векторов, а α — угол между их направлениями. Чем меньше угол, тем ближе косинус к 1.

3

Смотрим на частные случаи

Если $\alpha = 0^\circ$, косинус равен 1; при 90° он равен 0; при 180° получается -1. Эти значения сразу подсказывают знак ответа.

4

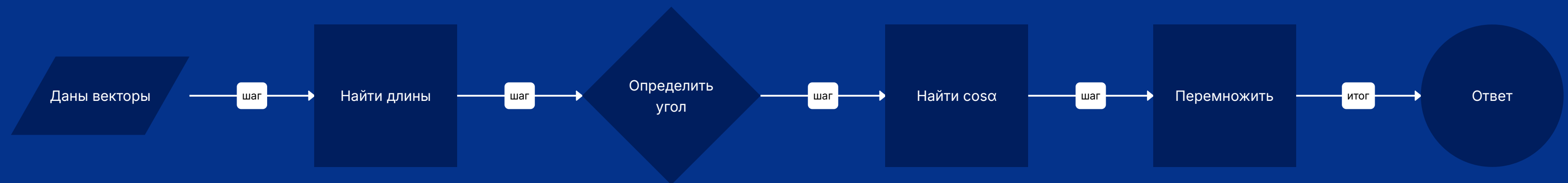
Связываем формулу с геометрией

Формула показывает, как угол влияет на результат: при одинаковых длинах векторов он меняется только из-за их взаимного направления.



Как находят скалярное произведение

Последовательность действий при использовании геометрической формулы



Особые случаи: острый, прямой и развёрнутый угол

Острый угол

Если угол между векторами острый, косинус положителен. Поэтому и скалярное произведение получается положительным, что видно без долгих вычислений.

Прямой угол

При угле 90° косинус равен нулю. Тогда скалярное произведение тоже равно нулю, и это особенно важно для проверки перпендикулярности.

Развёрнутый угол

Когда угол равен 180° , косинус становится -1 . В этом случае скалярное произведение отрицательно, потому что векторы направлены в противоположные стороны.

Скалярное произведение в координатах

1 Формула на плоскости

Если $a = (x_1, y_1)$ и $b = (x_2, y_2)$, то $a \cdot b = x_1 x_2 + y_1 y_2$. Достаточно перемножить соответствующие координаты и сложить результаты.

2 Формула в пространстве

Для векторов в пространстве добавляется третья координата: $a \cdot b = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$. Правило остаётся таким же, только членов становится больше.

3 Когда это удобно

Координатная запись особенно полезна, если векторы уже заданы числами. В таких задачах не нужно строить чертёж или искать угол по рисунку.

Две формулы скалярного произведения

Формула	Что дано	Когда удобна	Что получает
$ a \cdot b \cdot \cos \alpha$	Длины, угол	Есть чертёж	Число
$x_1 x_2 + y_1 y_2$	Координаты	Даны координаты	Число



Сравнение двух способов вычисления помогает выбрать нужный вариант в зависимости от условия задачи.

Выбор формулы зависит от данных: по чертежу удобнее геометрический способ, по координатам — алгебраический.

Как знак скалярного произведения связан с углом



Школьный курс геометрии 9 класса

При одинаковых длинах векторов знак результата меняется вместе с косинусом угла между ними.

Чем больше угол, тем меньше значение косинуса: от положительного к нулю и затем к отрицательному.

Признак перпендикулярности

Главное правило

Если $a \cdot b = 0$ и оба вектора ненулевые, то они перпендикулярны. Это один из самых надёжных способов узнать прямой угол.

1
2

Где применяется

Признак используют на чертежах и в координатных задачах. Он помогает быстро проверить, образуют ли два направления угол 90° .

Пример из физики: работа силы

1 Формула работы

В физике скалярное произведение позволяет записать работу силы: $A = F \cdot s \cdot \cos\alpha$. Здесь сила, путь и угол между ними определяют, сколько энергии передано при движении тела.

2 Когда работа положительна

Если сила направлена почти так же, как перемещение, угол мал, косинус положителен, и работа получается положительной. Так действует, например, сила тяги при движении вперёд.

3 Когда работа равна нулю

Если сила перпендикулярна перемещению, $\cos 90^\circ = 0$, поэтому работа равна нулю. Это важно для понимания, почему некоторые силы не изменяют скорость тела вдоль движения.



Примеры вычислений по координатам

Первый расчёт

Для векторов $(2, 3)$ и $(4, -1)$ умножают соответствующие координаты и складывают результаты: $2 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) = 8 - 3 = 5$. Получается положительное число.

Второй расчёт

Для векторов $(1, 2)$ и $(-2, 1)$ вычисление даёт $1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 = -2 + 2 = 0$. Значит, векторы перпендикулярны.

Главная идея

Координатный способ удобен тем, что не требует чертежа и поиска угла. Достаточно аккуратно перемножить пары координат и проверить знак полученного результата.

Три учебных примера и их результат

Векторы	Результат	Вывод
$(1,1)$ и $(2,2)$	положительный	угол острый
$(1,0)$ и $(0,5)$	0	перпендикулярны
$(2,1)$ и $(-1,3)$	по формуле	знак зависит от угла

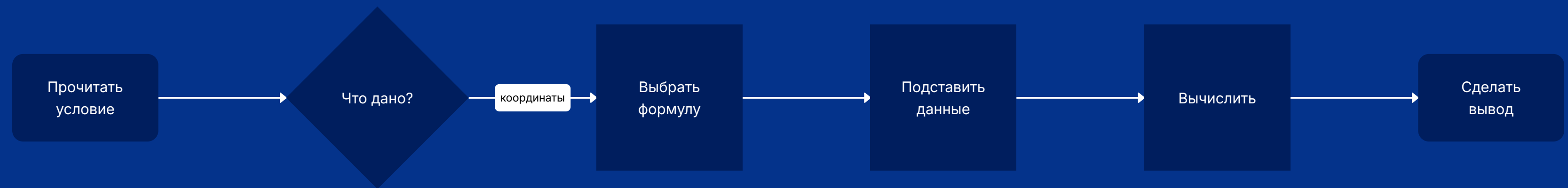
Учебные примеры по теме «Скалярное произведение векторов»

Таблица показывает, как по скалярному произведению определить знак результата и сделать вывод об угле между векторами.

Положительный результат связан с острым углом, нулевой – с прямым. Если знак не очевиден, его находят вычислением по координатам.

Алгоритм решения задач со скалярным произведением

Последовательность шагов для школьных задач по теме скалярного произведения



Типичные ошибки при решении

sin

cos

tg

ctg

Забывают косинус

Иногда подставляют только длины векторов и пропускают множитель $\cos\alpha$. Из-за этого ответ получается неверным, даже если все числа выписаны правильно.

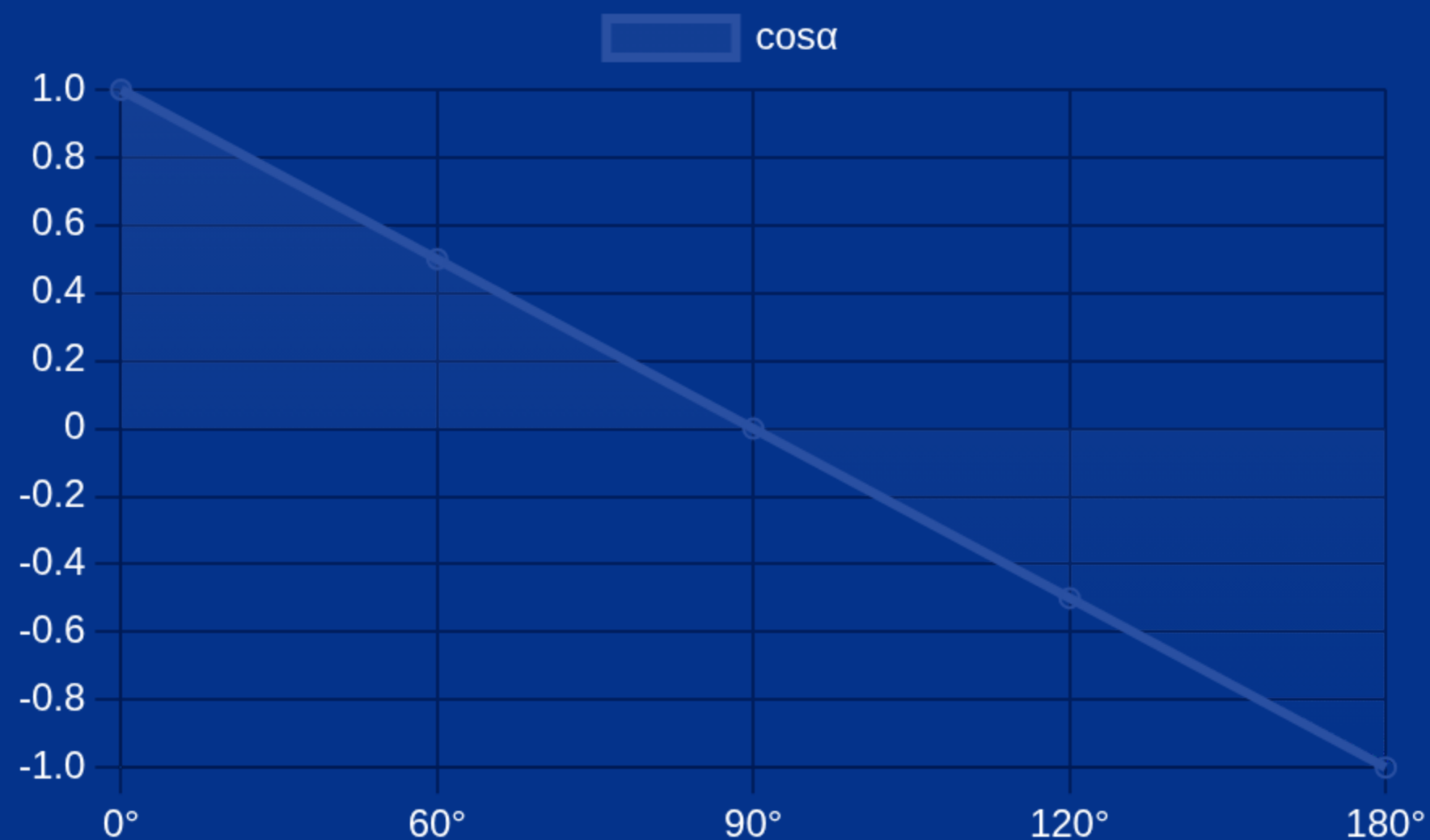
Ошибаются в знаках

При вычислениях по координатам часто теряют знак отрицательного числа. Особенно это заметно, когда одна из координат равна -1, -2 или другому отрицательному числу.

Неправильный признак

Признак перпендикулярности нельзя применять к нулевому вектору. Он работает только тогда, когда оба вектора ненулевые, иначе вывод будет ошибочным.

Как меняется значение при разных углах



Табличные значения $\cos \alpha$ из школьного курса математики

При одинаковых длинах векторов именно косинус угла определяет, насколько большим или малым будет результат скалярного произведения.

Чем больше угол между векторами, тем меньше значение косинуса и тем слабее положительный результат; при больших углах он становится отрицательным.

Где применяется скалярное произведение

1

log



Геометрия

Помогает находить угол между векторами, проверять прямые углы и исследовать взаимное положение отрезков на чертеже или в координатной плоскости.



Физика

Используется при вычислении работы силы, когда важно учитывать не только величину силы, но и направление перемещения тела.



Информатика

Нужен для сравнения направлений, обработки координат и простых вычислений в задачах, где объекты задаются числами.



Компьютерная графика

Применяется для оценки освещения, углов обзора и ориентации объектов, а также для более точного построения изображений на экране.

2

x

Векторный рисунок на координатной плоскости

Общая точка

Два вектора удобно изображать, начиная из одной точки. Так легче увидеть их направление, сравнить длины и определить угол между ними без лишних построений.

Подписи координат

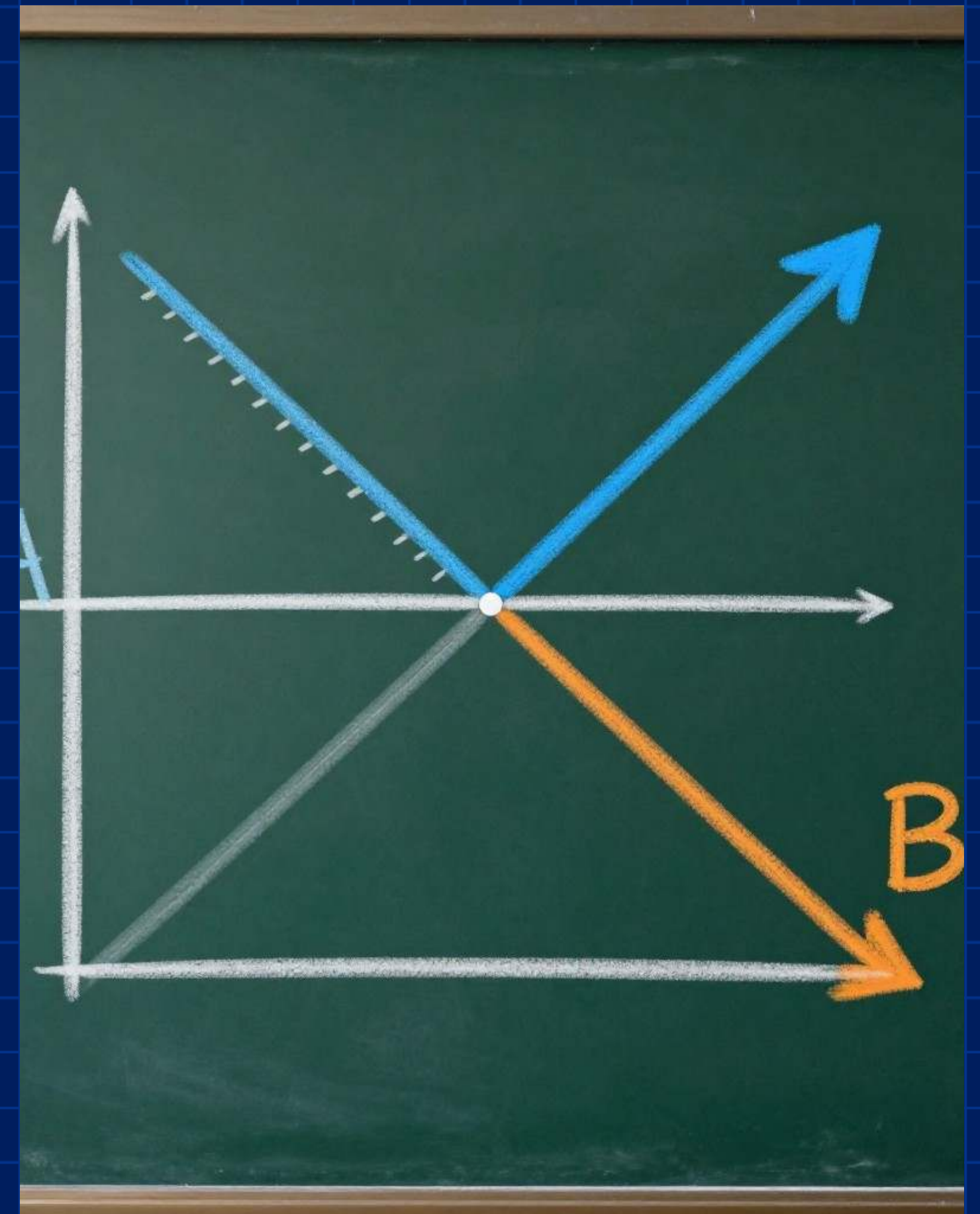
На рисунке полезно отмечать координаты концов векторов. Это помогает перейти от геометрического изображения к вычислению по координатам и проверить ответ.

Виды углов

Острый, прямой и тупой угол на чертеже сразу подсказывают знак скалярного произведения. Такой рисунок делает связь формулы с геометрией наглядной.

Длина и направление

Если показать длины векторов стрелками и отметками, проще понять, почему меняется результат при изменении угла. Это особенно полезно в задачах на сравнение векторов.



Главные факты, которые нужно запомнить

1

Результат – число

Скалярное произведение двух векторов не создаёт новый вектор. Оно даёт число, которое можно использовать для вычислений и сравнения направлений.

2

Геометрическая формула

Если известны длины векторов и угол между ними, удобно применять формулу $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos \alpha$. Она связывает размеры и взаимное положение векторов.

3

Координатная формула

Когда векторы заданы координатами, их скалярное произведение находят по соответствующим произведениям координат: $x_1 x_2 + y_1 y_2$, а в пространстве ещё прибавляют $z_1 z_2$.

4

Признак перпендикулярности

Если оба вектора ненулевые и их скалярное произведение равно нулю, то они перпендикулярны. Этот признак часто используют в школьных задачах.

8

5

9

Скалярное произведение: полезный инструмент для задач

Сегодня вы увидели, что скалярное произведение помогает связывать формулы с геометрическим смыслом. Оно удобно в вычислениях, понятно на чертеже и полезно во многих школьных задачах.



cos

sin

1

tg

ctg