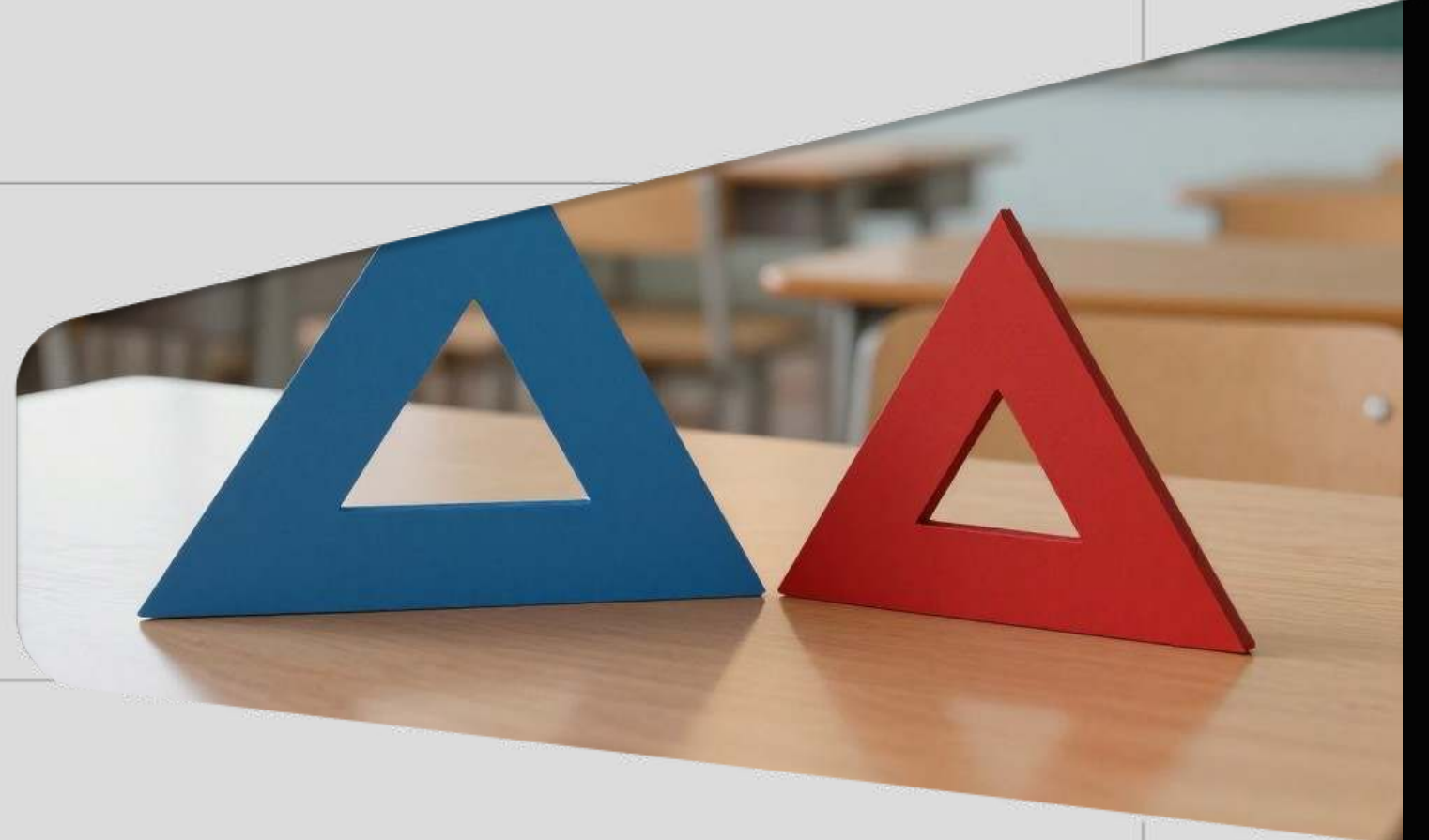


Гомотетия и подобие фигур

Фигура сохраняет форму, меняя размер и масштаб.



Зачем нужна гомотетия в 9 классе?

Она помогает понимать подобие, работать с чертежами, картами и моделями, а также решать задачи на длины, периметры и площади.



Определение гомотетии

.01

Центр преобразования

Гомотетия задаётся относительно точки O : каждая точка фигуры переходит на луч из центра. Именно центр определяет направление перемещения образа.

.02

Коэффициент k

Расстояние от центра до образа равно исходному расстоянию, умноженному на $|k|$. Этот коэффициент показывает, во сколько раз меняется размер фигуры.

.03

Увеличение фигуры

Если k больше 1, изображение получается больше исходного. Все стороны растягиваются одинаково, поэтому форма остаётся той же самой.

.04

Уменьшение фигуры

При $0 < k < 1$ фигура уменьшается, но сохраняет очертания. Это удобно для создания моделей и уменьшенных изображений объектов.

.05

Случай $k=1$

Когда коэффициент равен 1, преобразование не меняет фигуру. Точка образа совпадает с исходной, и никакого изменения размера не происходит.

Центр гомотетии и соответствующие точки



Общий луч

Каждая пара соответствующих точек лежит на одной прямой с центром гомотетии. Поэтому для точек A и A' , B и B' , C и C' сохраняется одно и то же направление.



Связь вершин

Если заданы вершины фигуры и их образы, можно проверить правильность построения по лучам, идущим из точки O . Это главное правило гомотетии.



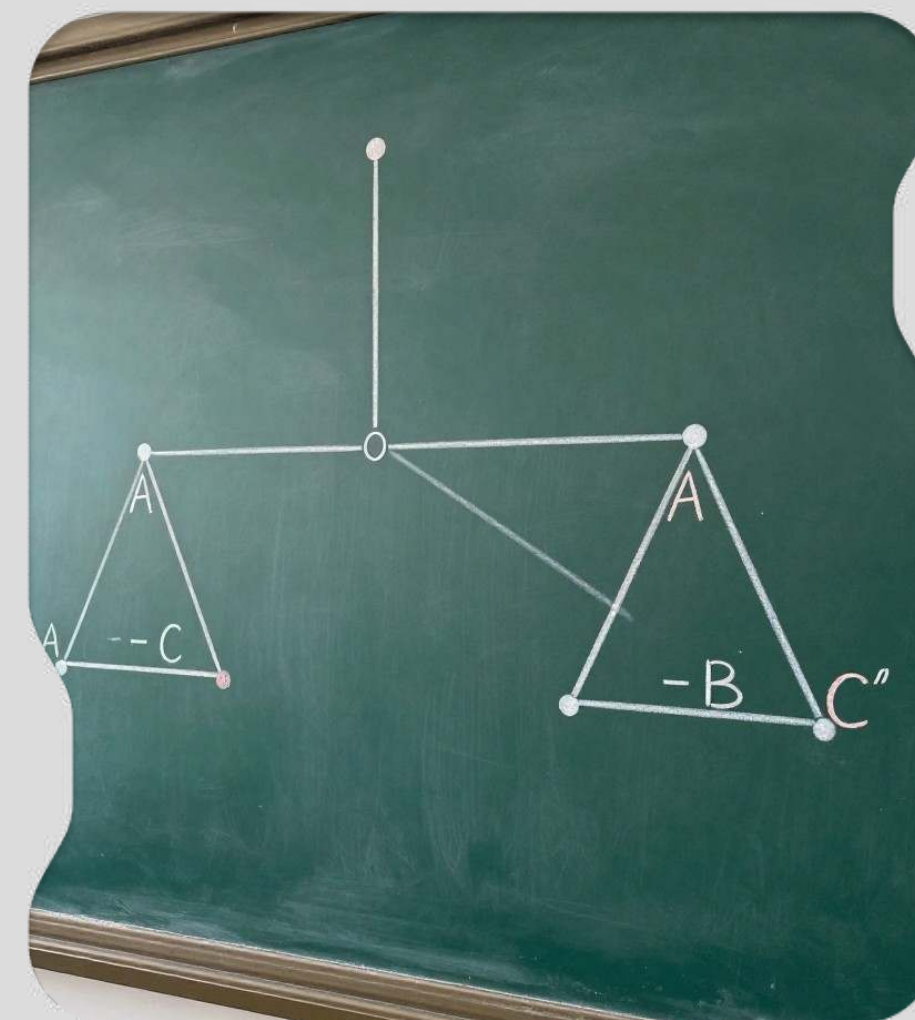
Поиск остальных образов

Зная центр и одну пару соответствующих точек, легко восстановить остальные. Для каждой новой вершины нужно провести луч из центра и отложить нужное расстояние.



Удобство построения

Такой способ позволяет строить образ фигуры без сложных вычислений. Достаточно соблюдать направление лучей и одинаковый коэффициент для всех точек.



Как коэффициент k влияет на результат

Таблица показывает, как знак и модуль коэффициента меняют размер фигуры и положение её образа.

Модуль коэффициента отвечает за масштаб, а знак — за расположение образа относительно центра.

k	Вид	Результат
2	Увеличение	в 2 раза
$\frac{1}{2}$	Уменьшение	в 2 раза
1	Без изменений	совпадает
-2	С переносом	через центр
-1	Центральная симметрия	равный образ

Свойства гомотетии в школьной геометрии

Что сохраняется при гомотетии



Углы не меняются

Все соответствующие углы остаются равными. Поэтому фигура не искажается, а только становится больше или меньше.



Стороны пропорциональны

Длины соответствующих сторон меняются одинаково и сохраняют отношение. Из-за этого фигуры оказываются подобными.



Периметр и длины

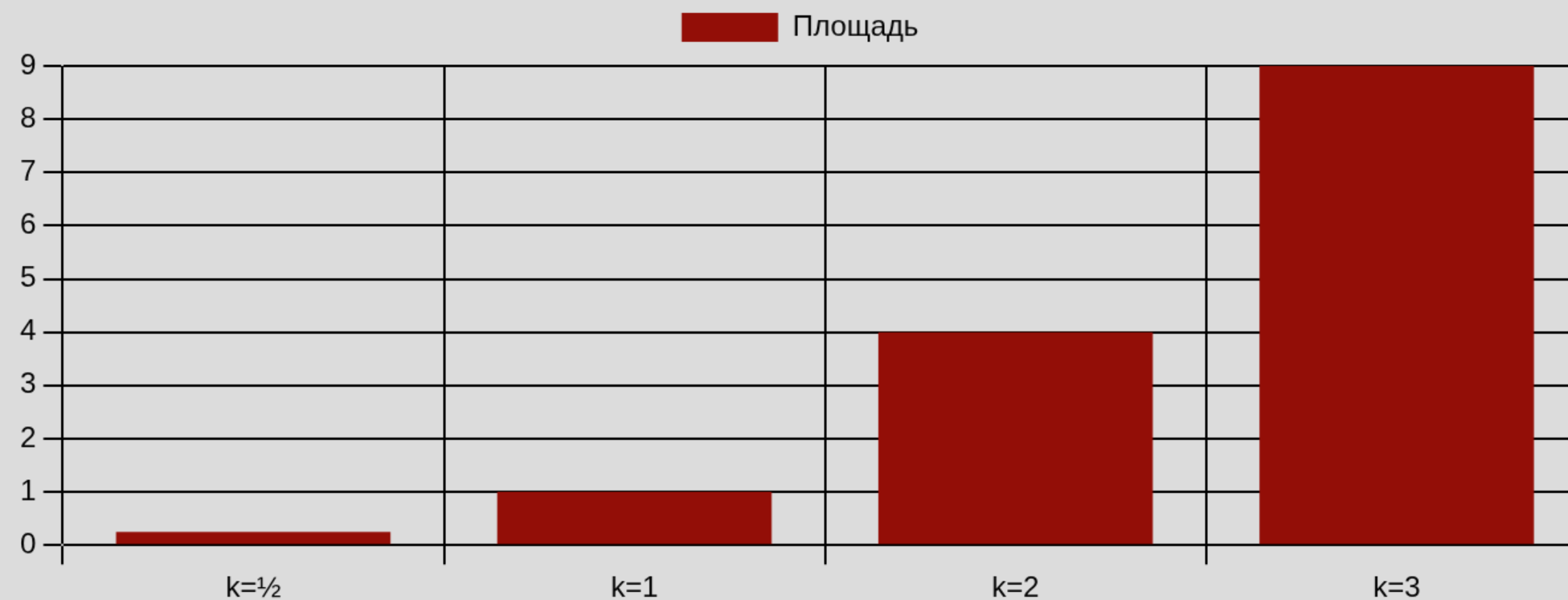
Любая линейная величина увеличивается или уменьшается в $|k|$ раз. Это относится к сторонам, высотам, радиусам и периметрам.



Площадь зависит сильнее

Площадь меняется не в $|k|$, а в k^2 раз. Поэтому при увеличении фигуры её площадь растёт быстрее, чем длины.

Как меняется площадь при разных коэффициентах

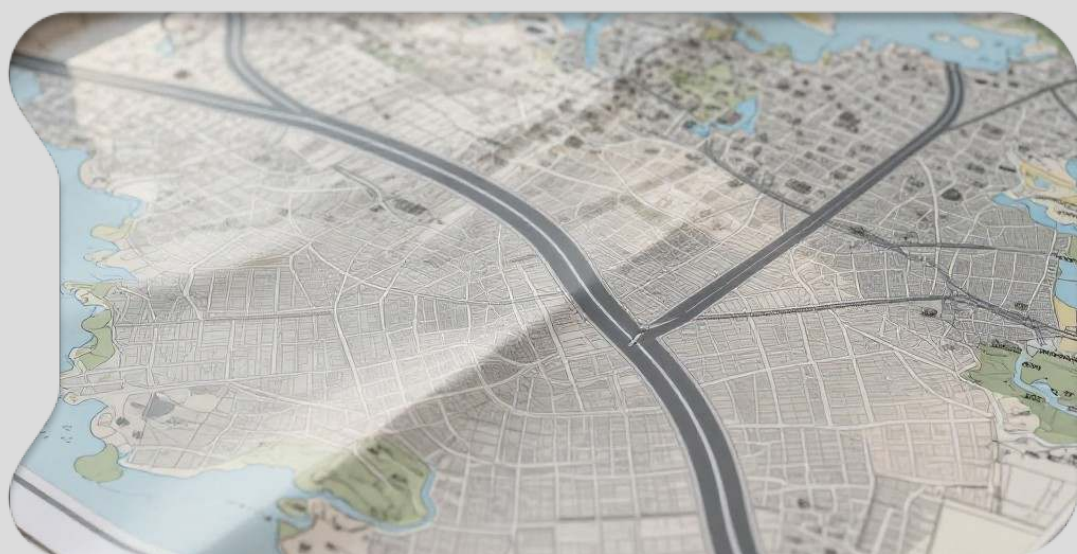


Расчёт по формуле изменения площади при гомотетии, на основе k^2

Чем больше коэффициент, тем заметнее рост площади: она увеличивается быстрее, чем длины сторон.

Площадь зависит от квадрата коэффициента гомотетии, поэтому рост получается нелинейным.

Примеры гомотетии в жизни и школе



Карта и город

На карте города небольшая улица и большой проспект изображаются похожими по форме, но разными по размеру. Масштаб помогает перенести реальные расстояния на бумагу, не меняя углов и пропорций. Поэтому карту удобно читать и измерять по ней.

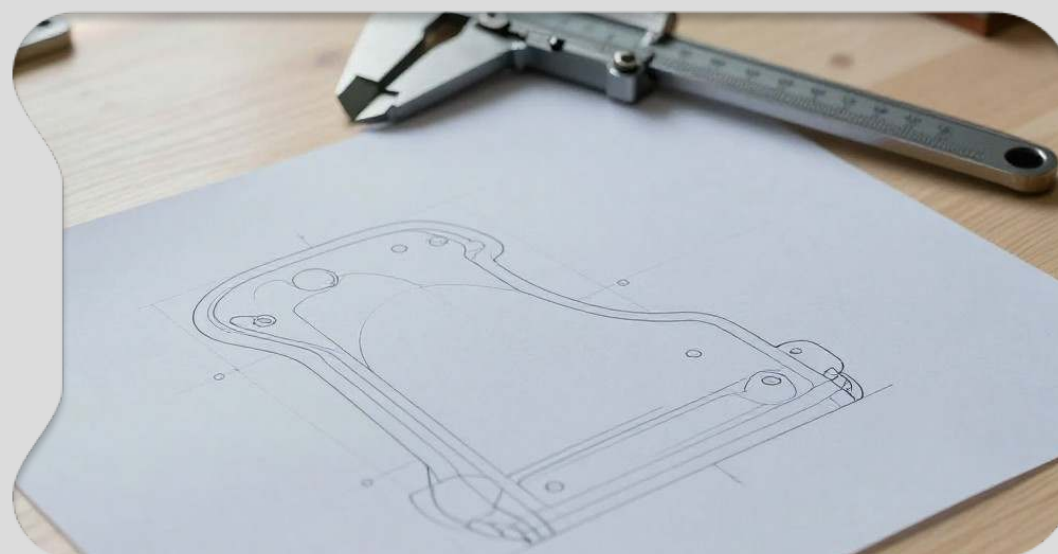
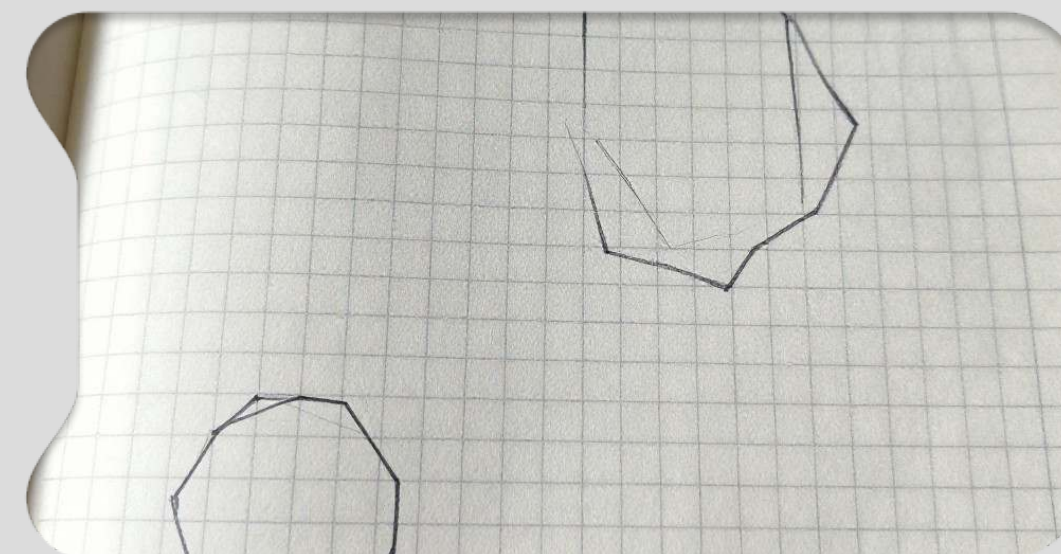


Чертёж и модель

В мастерской или на уроке технологии чертёж детали показывает объект уменьшенным или увеличенным, но узнаваемым. Так же работают модели зданий: они сохраняют форму, хотя размеры отличаются от настоящих. Это помогает заранее увидеть результат и проверить пропорции.

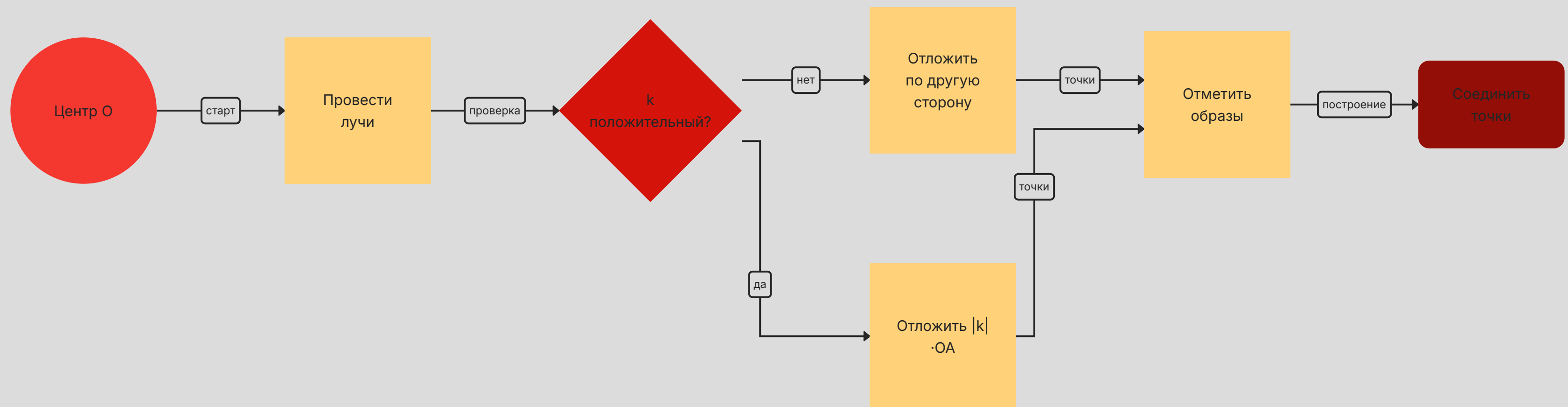


Клетчатая тетрадь

На клетчатой бумаге легко заметить, как рисунок увеличивается или уменьшается по клеткам. Если сохранить углы и умножить все расстояния на один и тот же коэффициент, получится новая фигура той же формы. Такой приём часто используют на уроках геометрии.

Построение образа фигуры при гомотетии

Алгоритм построения образа по центру O и коэффициенту k



Гомотетия и подобие фигур

.01

Одна форма

Если фигуры получены друг из друга гомотетией, они обязательно имеют одинаковую форму. Меняется только размер, а не общий вид.

.02

Равные углы

У соответствующих углов одинаковая величина, поэтому фигуры можно узнавать по очертаниям даже при разном масштабе. Это главный признак подобия.

.03

Пропорциональные стороны

Соответствующие стороны относятся как один и тот же коэффициент. Именно это позволяет сравнивать треугольники, квадраты и другие фигуры.

.04

Наглядный способ

Гомотетия — один из самых понятных способов получить подобные фигуры. Она связывает построение, измерения и реальные примеры из жизни.

Сравнение двух подобных треугольников



Стороны треугольников из условия

Соответствующие стороны увеличены одинаково, поэтому форма сохраняется, а размер меняется по одному коэффициенту.

Отношение соответствующих сторон равно 2, значит треугольники подобны, а их углы равны.



-1

**задаёт
центральную
симметрию
без изменения
размера.**

При таком коэффициенте фигура переносится через центр, поэтому её положение становится противоположным исходному.

Свойства гомотетии

Гомотетия на координатной плоскости

.01

Правило для точки

Если центр гомотетии совпадает с началом координат, каждая точка (x, y) переходит в точку (kx, ky) , и координаты меняются одинаково по обеим осям.

.02

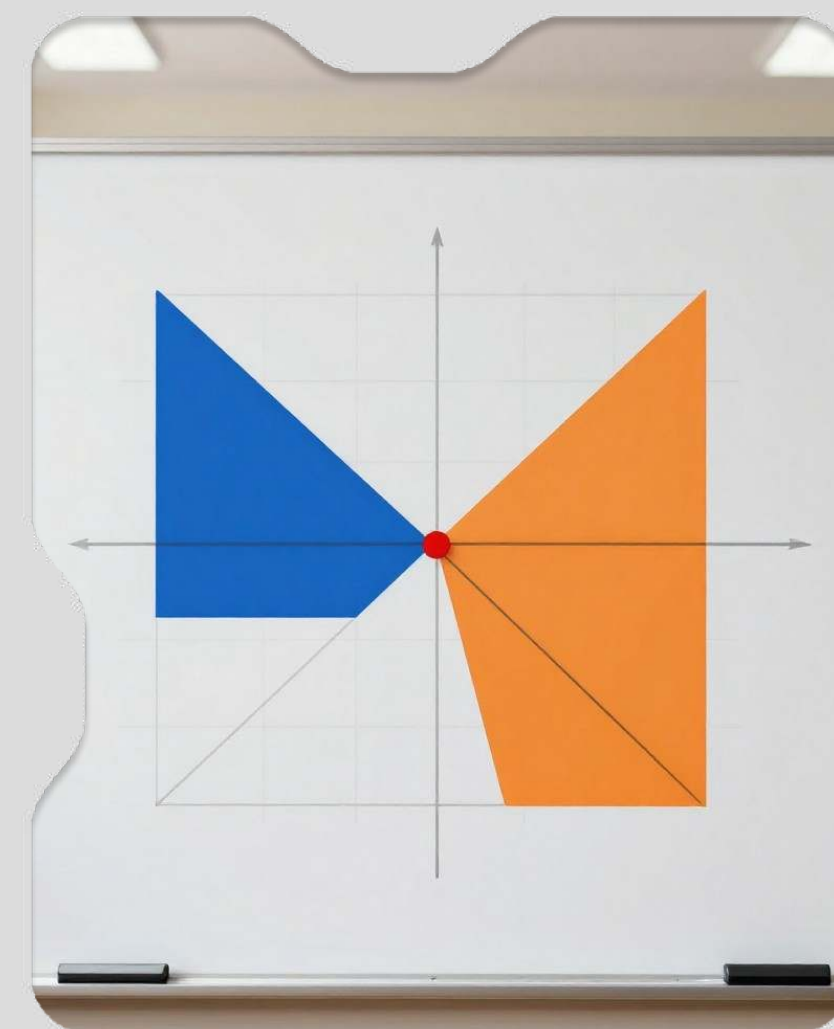
Увеличение и уменьшение

При $k=3$ все координаты утроятся, поэтому фигура станет больше; при $k=\frac{1}{2}$ координаты уменьшатся вдвое, и изображение станет меньше, но сохранит форму и углы.

.03

Проверка построения

Координатная запись помогает быстро проверить результат: достаточно умножить каждую координату на коэффициент и сравнить полученные точки с чертежом или вычисленным образом фигуры.



Как меняются длины, периметры и площади

Величина	Правило	При $k=3$
Длина	в 3 раза	$\times 3$
Периметр	в 3 раза	$\times 3$
Площадь	в 9 раз	$\times 9$
Радиус	в 3 раза	$\times 3$

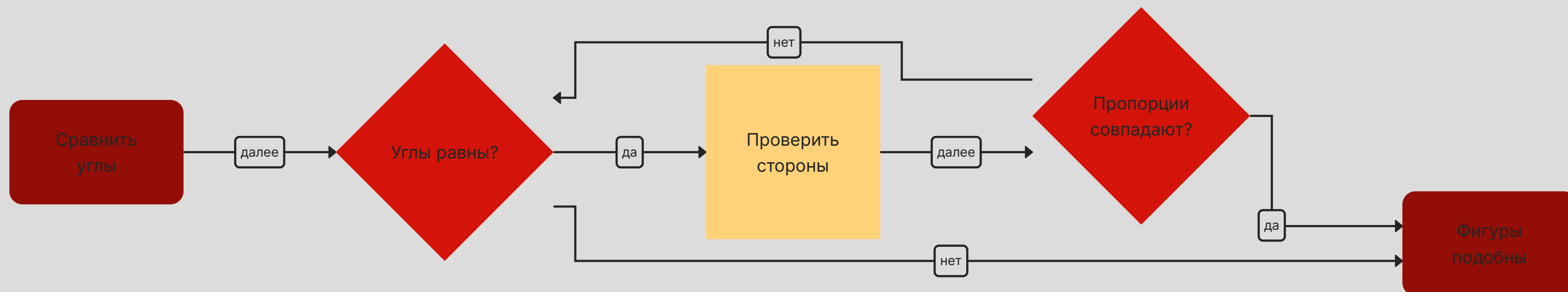
При гомотетии линейные величины изменяются одинаково, а площадь реагирует на коэффициент сильнее, потому что зависит от квадрата.

Все линейные размеры меняются одинаково, а площадь увеличивается по квадрату коэффициента.

Свойства гомотетии

Проверка подобия фигур

Алгоритм помогает последовательно установить, можно ли считать фигуры подобными.

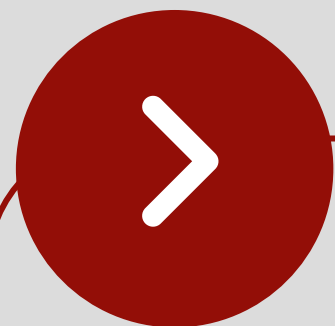


Типичные ошибки при изучении гомотетии



Путают отношение и разность

Коэффициент гомотетии задаёт отношение соответствующих длин, а не их разность. Если сравнивать стороны неправильно, можно получить неверный масштаб и ошибочный вывод о подобии.



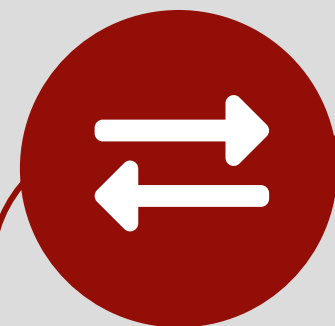
Меняют углы

При увеличении или уменьшении фигуры углы не изменяются. Ошибка возникает, когда ученик считает, что новая фигура должна быть «шире» или «уже» по углам.



Неверно считают площадь

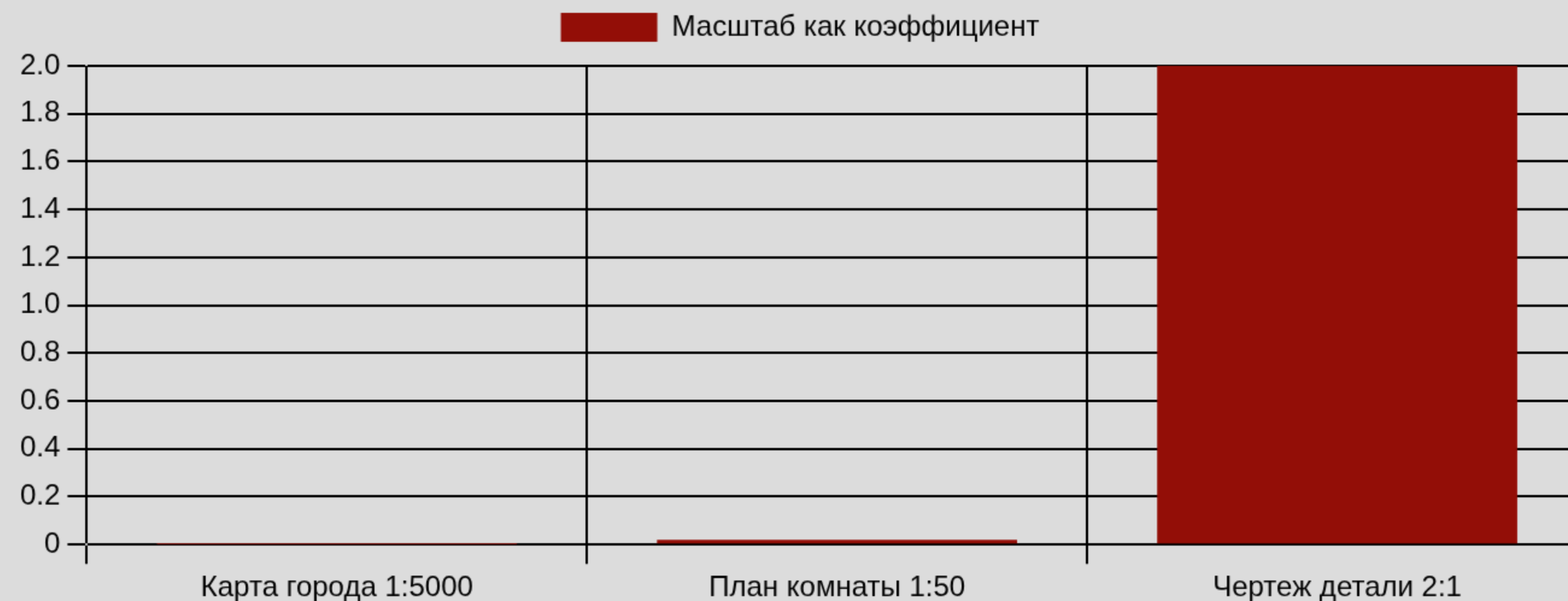
Площадь не умножается на k , потому что зависит от двух измерений сразу. Она меняется в k^2 раз, поэтому при большом коэффициенте растёт особенно заметно.



Забывают знак коэффициента

Модуль отвечает за размер, а знак — за расположение образа относительно центра. Если знак отрицательный, точка переходит на другую сторону от центра, что важно на чертеже.

Масштабы в реальных объектах



Примеры масштабов из школьной геометрии

Масштаб удобно читать как коэффициент, который связывает изображение и реальный объект, даже если на практике он записан по-разному.

Чем меньше первая запись, тем сильнее уменьшение; запись 2:1, наоборот, показывает увеличение модели.

Окружность и круг при гомотетии



Окружность сохраняется

После гомотетии окружность снова становится окружностью, потому что все её точки удаляются от центра одинаково пропорционально. Форма не искажается, меняется только размер.



Радиус изменяется

Радиус увеличивается или уменьшается в $|k|$ раз, поэтому достаточно знать коэффициент, чтобы сразу найти новый размер окружности или круга без дополнительных построений.



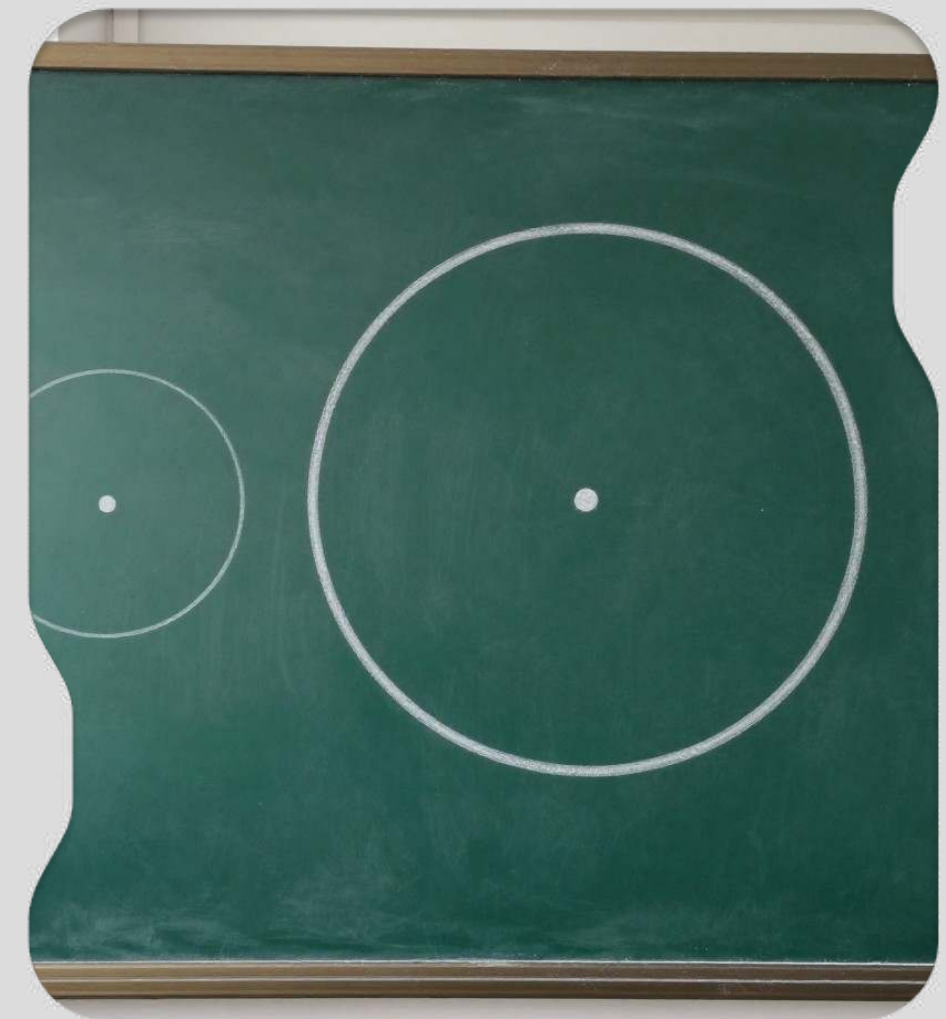
Центры нужно различать

Если центр гомотетии не совпадает с центром окружности, на рисунке появляются два разных центра. Это важно, чтобы не перепутать исходную фигуру и её образ.



Полезно в задачах

Такое свойство удобно при построениях: можно быстро получить новый круг, проверить результат измерением и сравнить радиусы, не меняя форму фигуры.



Мини-проверка понимания свойств гомотетии

Проверь, как знак и модуль коэффициента влияют на результат преобразования.

Модуль коэффициента определяет изменение размера, а знак — положение образа относительно центра.

Ситуация	Результат	Причина
$k=1$	без изменений	коэффициент равен 1
$k=2$	размер в 2 раза больше	модуль равен 2
$k=1/3$	размер в 3 раза меньше	модуль равен $1/3$
$k=-1$	центральная симметрия	отрицательный знак
$k=-2$	увеличение и перенос	знак и модуль

Свойства гомотетии

Главные выводы о гомотетии и подобии фигур

Гомотетия показывает, как из одной фигуры получить подобную: углы сохраняются, а размеры меняются по одному коэффициенту. Это удобно для чертежей, карт, моделей и решения геометрических задач.