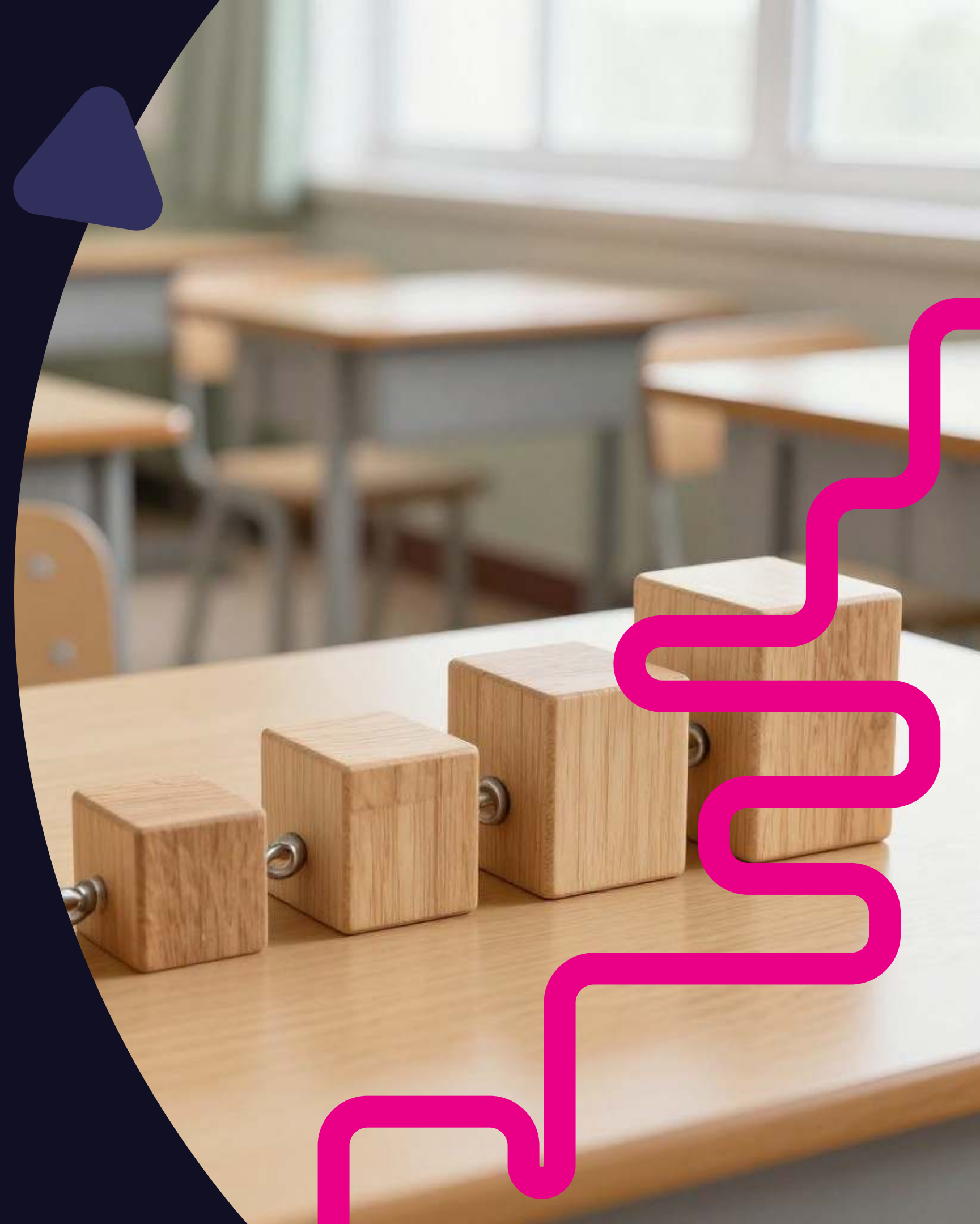


Сумма первых n членов геометрической прогрессии

Быстро находим сумму последовательных умножений на одно число.





Зачем нужна сумма геометрической прогрессии

Если величина меняется по одному правилу, удобно не складывать все члены вручную. Формула суммы помогает быстро получать итог в задачах о процентах, изменении и росте.

Что такое геометрическая прогрессия



Одинаковый множитель

Каждый следующий член получается из предыдущего умножением на одно и то же число q . Именно это постоянное правило отличает геометрическую прогрессию от других последовательностей.



Первые члены

Если первый член обозначить a_1 , то последовательность записывается так: $a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3$ и далее. По записи сразу видно, как изменяются все элементы.



Рост при $q > 1$

Когда q больше 1, члены быстро увеличиваются. Чем дальше в последовательности, тем сильнее становится рост, потому что каждый новый член уже крупнее предыдущего.



Убывание и знаки

При $0 < q < 1$ члены постепенно уменьшаются, а при отрицательном q знаки чередуются. Такое поведение часто помогает распознать прогрессию в задачах.

Вид прогрессии на числовой схеме

▼ Простой пример

Последовательность 3, 6, 12, 24 показывает геометрическую прогрессию с $q=2$. Здесь каждый следующий член вдвое больше предыдущего, поэтому правило видно сразу.

▼ Стрелки на схеме

На числовой схеме удобно подписать переходы словами «умножить на 2». Это помогает понять, что все числа связаны одним и тем же действием, а не случайным набором.

▼ Сумма растёт быстро

Чем дальше мы продолжаем последовательность, тем сильнее увеличивается итоговая сумма. Даже несколько членов могут дать большой результат, если множитель достаточно велик.



Запись суммы первых n членов

01

Общий вид

Сумму первых n членов записывают как $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$. Это обычная сумма всех членов, которые входят в рассматриваемый отрезок последовательности.

02

Для геометрической прогрессии

Если первый член равен a , то сумма принимает вид $S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1}$. Так удобно показать, как каждый следующий член связан с предыдущим.

03

Почему последняя степень $n-1$

Первый член соответствует q^0 , поэтому степени идут от 0 до $n-1$. Из-за этого последний член в сумме первых n членов имеет именно такую степень.

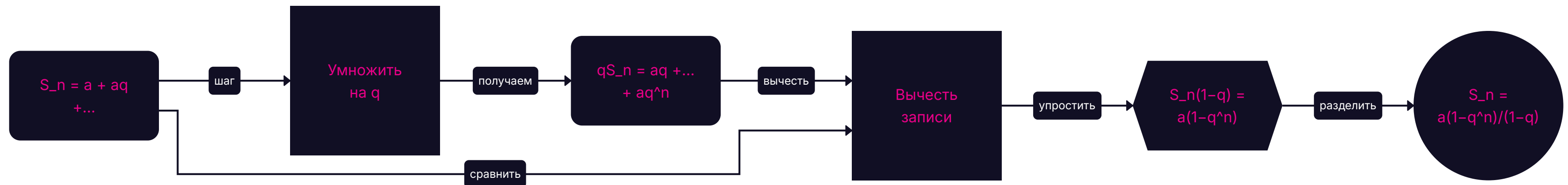
04

Что важно запомнить

Эта запись помогает увидеть структуру последовательности до применения формулы. Когда члены выписаны явно, легче проверить, правильно ли найден первый член и знаменатель прогрессии.

Как получается формула суммы

Переход от записи суммы к короткой формуле через умножение и вычитание

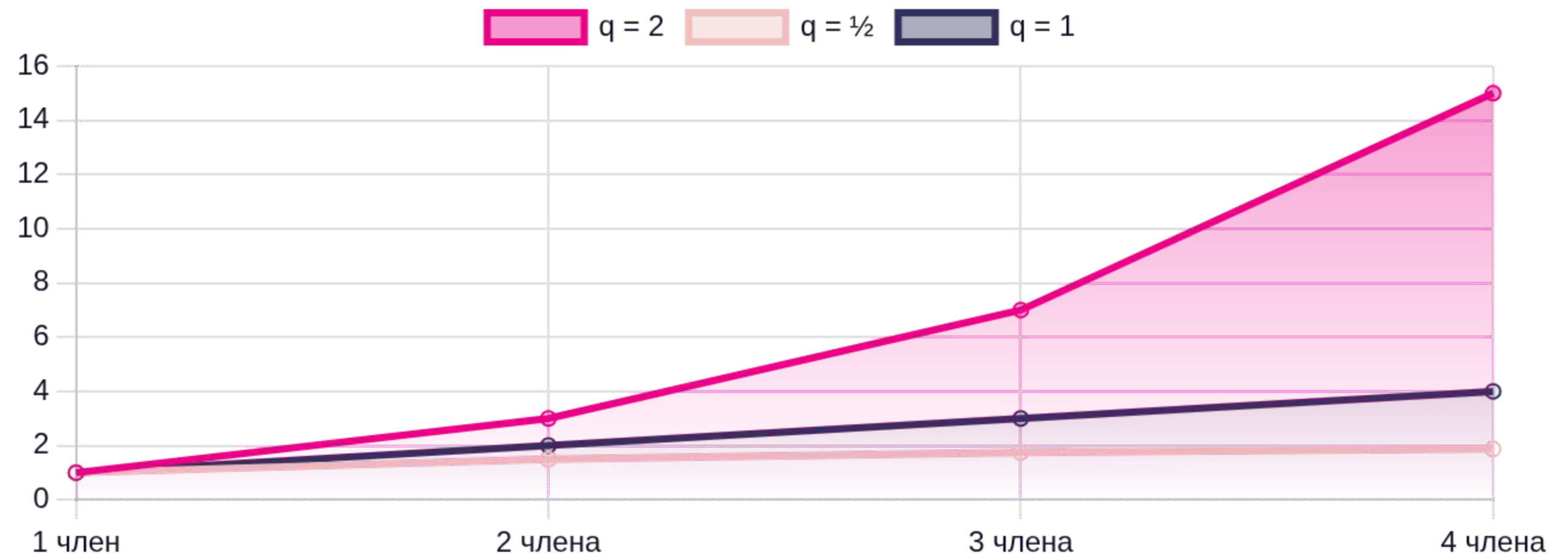


Как ведет себя сумма при разных значениях q

На графике показано, что скорость роста суммы зависит от знаменателя прогрессии. Чем больше q , тем быстрее накапливается результат при одинаковом числе членов.

При $q > 1$ сумма растет особенно быстро, при $0 < q < 1$ — медленнее, а при $q = 1$ превращается в обычное сложение одинаковых чисел.

Составлено по формулам суммы геометрической прогрессии



Формулы для основных случаев

Таблица показывает, какую формулу применять в зависимости от значения q , и приводит короткие примеры вычислений.

Общая формула работает только при $q \neq 1$. Если все члены одинаковы, сумму находят как произведение первого члена на количество членов.

Алгебра, тема «Геометрическая прогрессия»

Случай	Формула	Пример
$q \neq 1$	$S_n = a(1 - q^n) / (1 - q)$	5; 2; 4 $\rightarrow$ 75
$q = 1$	$S_n = an$	8; 1; 3 $\rightarrow$ 24

242

— именно такой результат получается для суммы первых пяти членов прогрессии 2, 6, 18, 54, 162.

Формула дает тот же ответ, что и прямое сложение, поэтому её удобно использовать, когда членов в последовательности много.

Расчет по формуле $S_5 = 2(1-3^5)/(1-3)$ и проверка сложением

Пример из реальной ситуации



- **Удвоение на каждом шаге**

Если величина каждый раз увеличивается вдвое, получается последовательность 1, 2, 4, 8, 16, 32. Такое изменение легко встретить в моделях быстрого роста.

- **Сумма всех шести членов**

Сложив первые шесть членов, получаем 63. Это показывает, что итог может быть заметно больше последнего отдельного числа, если рост идет по геометрическому правилу.

- **Что удобно показать рисунком**

На изображении хорошо смотрится схема из повторяющихся элементов, которые с каждым шагом становятся в два раза многочисленнее. Так легче увидеть сам принцип накопления.

Отдельный случай $q = 1$

01

Одинаковые члены

Если $q = 1$, каждый следующий член не меняется, а остаётся равным первому: a, a, a, a . Значит, вся прогрессия превращается в обычную сумму одинаковых слагаемых.

02

Простая формула

В этом случае сумму удобно находить без степеней: $S_n = an$. Нужно лишь умножить общий размер одного слагаемого на количество членов и получить точный результат.

03

Почему отдельный случай

Общая формула при $q \neq 1$ здесь не подходит, потому что в знаменателе появляется выражение $1 - q$, то есть ноль. Поэтому для $q = 1$ используют особое правило.

Случай $0 < q < 1$

Начало ряда

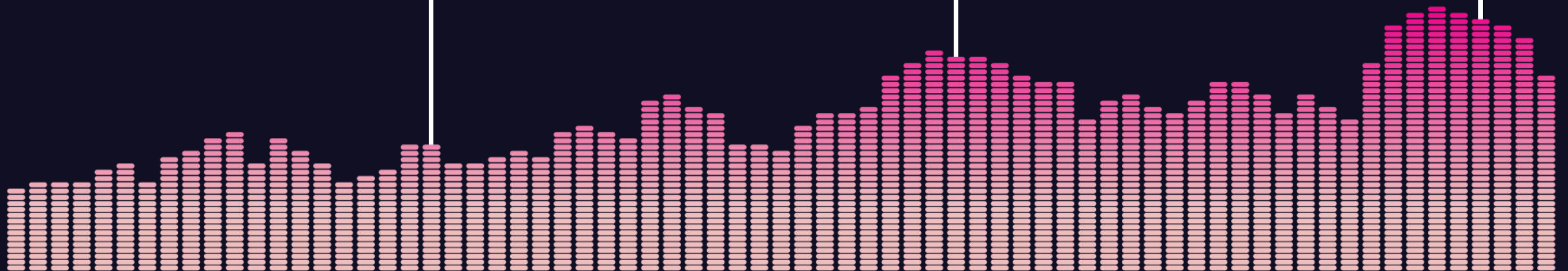
Первый член берут за исходную величину. При $0 < q < 1$ каждый следующий член меньше предыдущего, поэтому последовательность сразу начинает убывать.

Постепенное уменьшение

Например, при $q = \frac{1}{2}$ числа становятся вдвое меньше: 100, 50, 25, 12,5. Сумма при этом продолжает расти, но всё медленнее.

Практический смысл

Такой ход встречается в задачах на снижение цены, затухание процесса и уменьшение величины по шагам, когда изменения каждый раз происходят одинаковой долей.

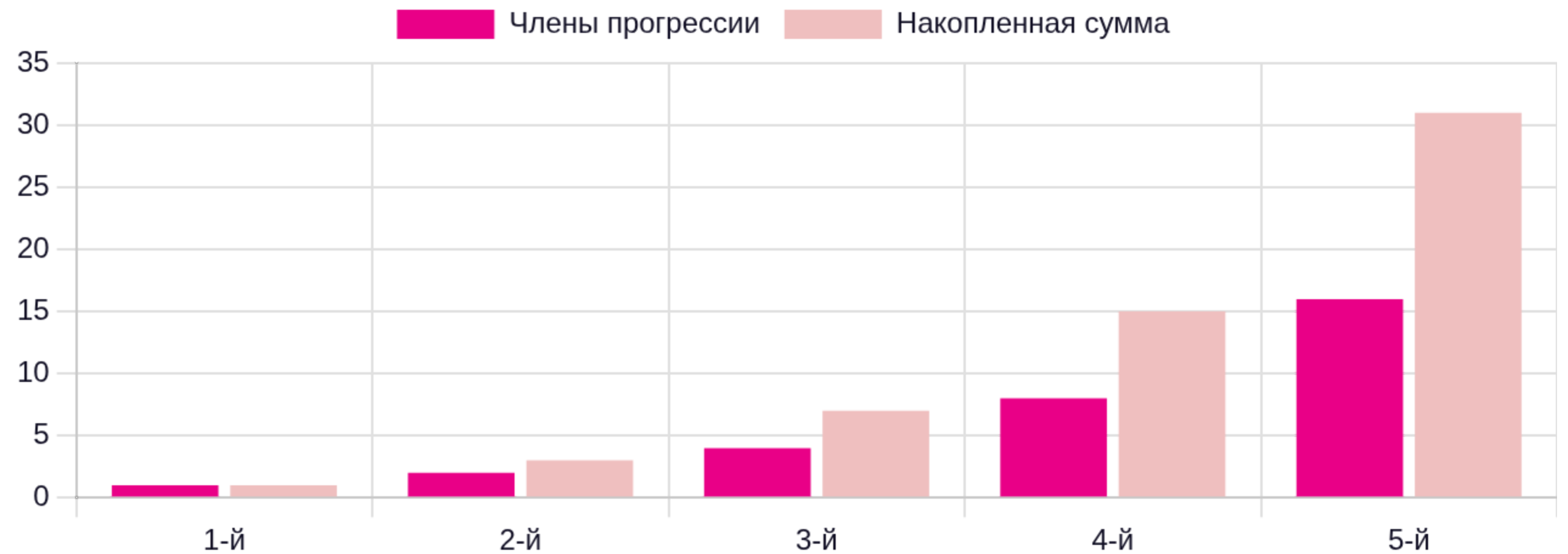


Члены прогрессии и накопленная сумма

Диаграмма позволяет сравнить, как быстро растут отдельные члены и их общий итог. Разрыв между ними увеличивается уже после нескольких шагов.

Накопленная сумма растёт быстрее каждого отдельного члена и всегда остаётся больше последнего слагаемого.

Данные из условия:
последовательность 1, 2, 4, 8, 16 и накопленные суммы 1, 3, 7, 15, 31.



Типичные ошибки при решении задач



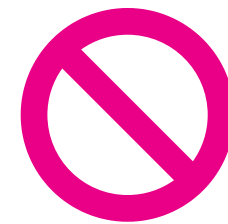
Путают a и q

Часто первый член принимают за знаменатель или наоборот. Из-за этого вся последовательность записывается неверно, а итоговая сумма перестаёт совпадать с условием задачи.



Ошибаются в степени

В общей формуле последний член соответствует степени $n-1$, а не n . Если забыть это правило, получатся лишний множитель или неправильный ответ при вычислении суммы.



Неверно подставляют $q = 1$

При $q = 1$ нельзя использовать формулу с делением на $1-q$. В таком случае нужно сразу применять $S_n = an$, иначе возникает бессмысленное деление на ноль.

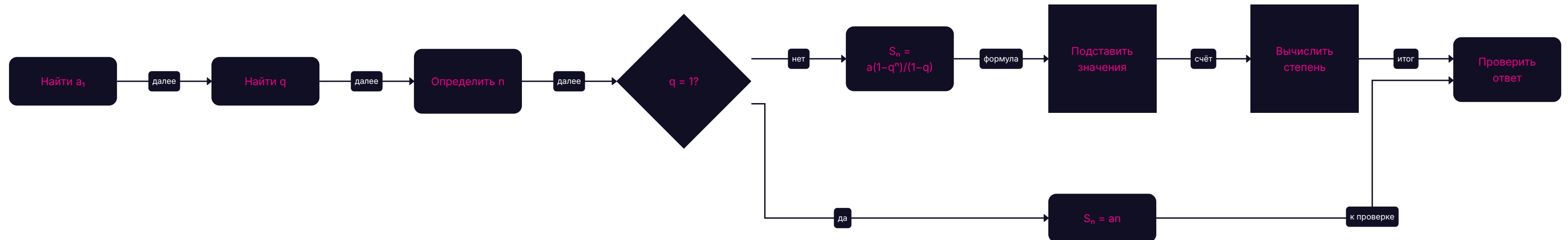


Не проверяют результат

Иногда считают только несколько первых членов и принимают это за полную сумму. Полезно всегда сверять ответ с количеством членов, знаком q и общим смыслом задачи.

Алгоритм решения задачи на сумму

Последовательность действий при нахождении суммы первых n членов геометрической прогрессии.



Тренировочные примеры

Данные	Ответ	Проверка
4; 2; 3	28	$4+8+16$
9; 1/3; 4	13	$9+3+1+1$
7; 1; 6	42	7×6

В таблице показаны три коротких задания с разными значениями q . Для каждого случая удобно сразу сравнить формулу, ответ и проверку прямым сложением.

Во всех трёх случаях результат совпадает с прямым сложением, значит формулы применены верно и дают быстрый способ проверки.

Составлено по учебным примерам темы.

Связь темы с другими разделами алгебры

Степени помогают записывать прогрессию

Каждый член геометрической прогрессии строится через степень числа q . Поэтому тема тесно связана с правилами возведения в степень и умением читать записи вида q^n без ошибок.



Дроби делают рост наглядным

Когда знаменатель меньше 1, в прогрессии часто появляются дробные числа. Тогда ученику важно уверенно работать с дробями, сравнивать их и понимать, как уменьшается каждый следующий член.



Проценты связывают тему с жизнью

Изменение на один и тот же процент — это тоже постепенное умножение на постоянный множитель. Поэтому формула суммы полезна в задачах про проценты, скидки и накопление значений.

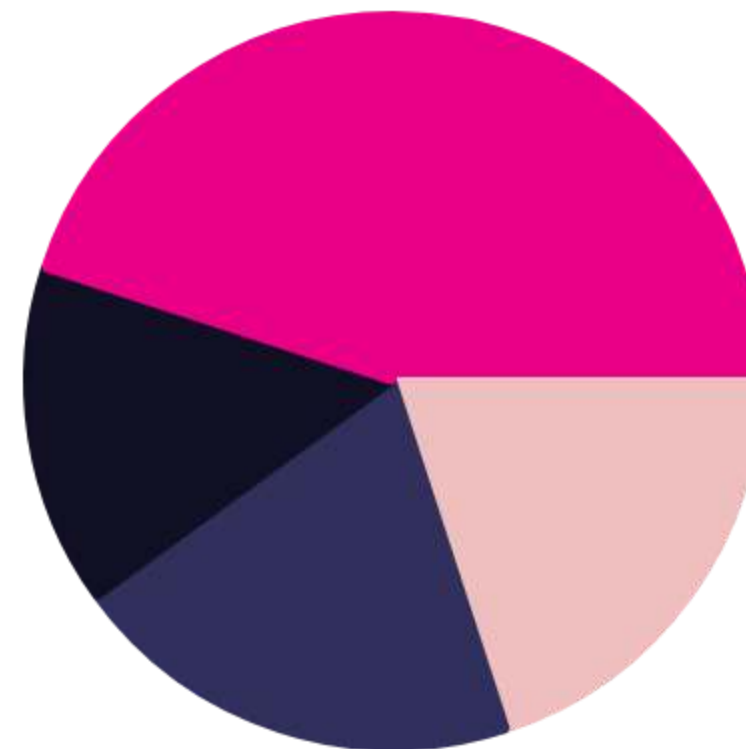
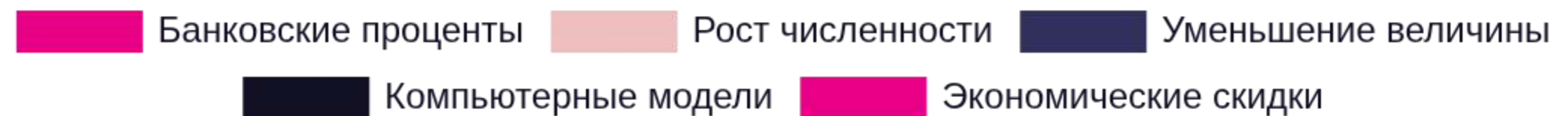


Где встречается геометрическая прогрессия

Во всех этих ситуациях величина меняется не на одинаковую прибавку, а на один и тот же множитель. Именно это делает модель особенно удобной.

Геометрическая прогрессия помогает описывать и рост, и уменьшение, поэтому она полезна в финансах, моделировании и повседневных расчётах.

Составлено по типичным областям применения темы.



Мини-повторение основных фактов

01

Постоянный множитель

Геометрическая прогрессия отличается тем, что каждый следующий член получается умножением на одно и то же число q . Это главное свойство помогает сразу распознавать последовательность.

02

Две формулы суммы

Если $q \neq 1$, применяют $S_n = a(1 - q^n)/(1 - q)$. Когда $q = 1$, используют более простую запись $S_n = an$, потому что все слагаемые одинаковы.

03

Первая и последняя степени

В записи прогрессии первый член соответствует q^0 , а последний из первых n членов — q^{n-1} . Это удобно помнить, чтобы не допустить ошибку в формуле.

04

Польза формулы

С помощью готового правила можно быстро находить сумму длинной последовательности, не выписывая все члены отдельно. Это экономит время и уменьшает риск ошибки при вычислениях.

Геометрическая прогрессия: короткий итог

Сумма первых n членов геометрической прогрессии помогает быстро находить результат последовательного умножения. Для $q \neq 1$ действует формула с степенью, а при $q=1$ — простое умножение.