

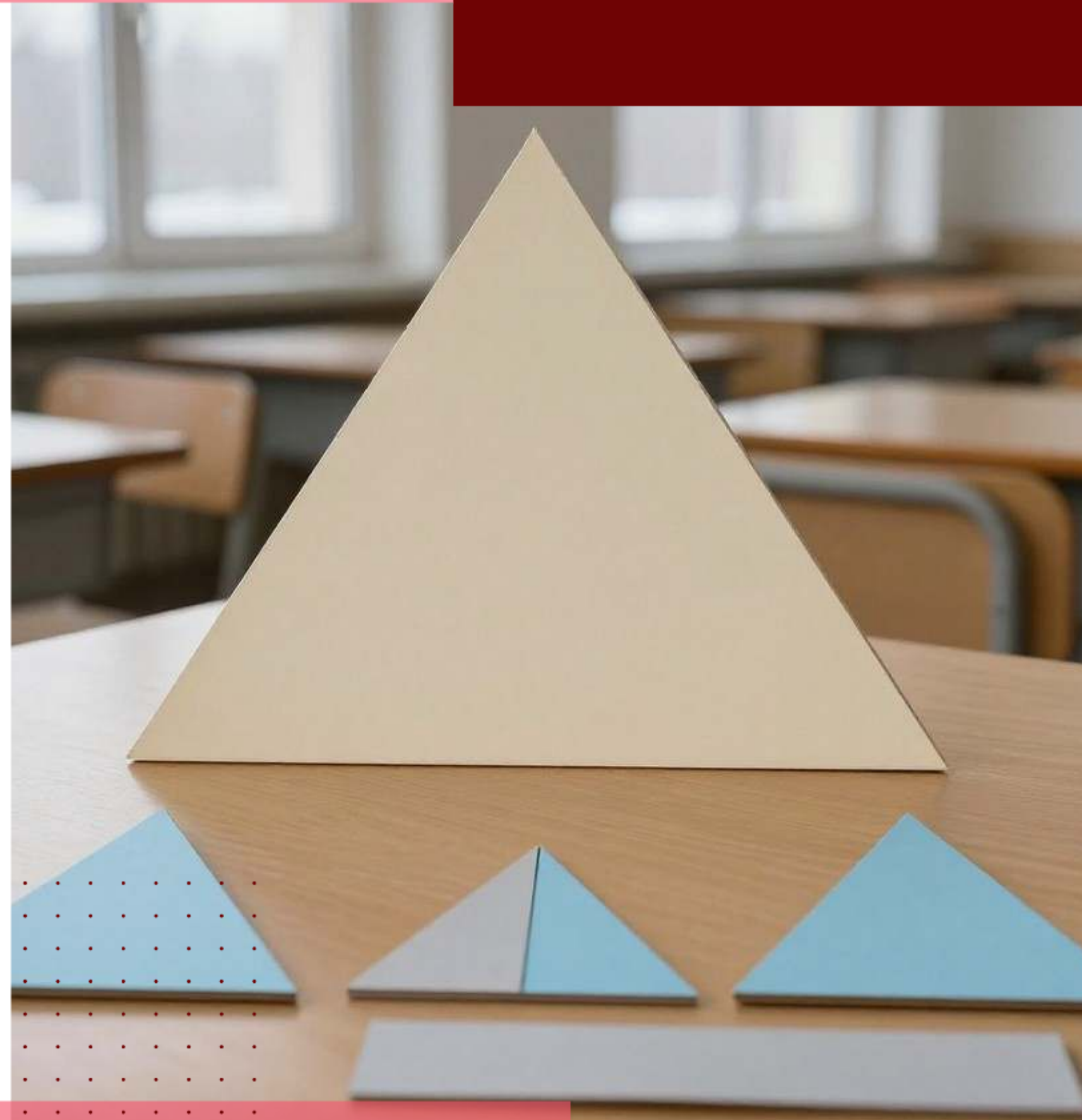
Формулы площади треугольника

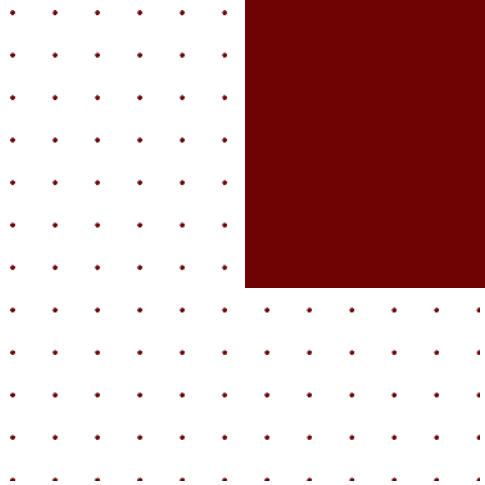
Площадь одного и того же треугольника можно находить разными способами — выбирайте по данным задачи.



Почему в геометрии существует несколько формул площади

Треугольник — базовая фигура планиметрии: из него «собирают» многоугольники и описывают сечения. Разные формулы отражают разные подходы школы: классическую геометрию, тригонометрию, окружности и координаты. На ЕГЭ и контрольных обычно дают стороны, углы или координаты — важно уметь выбирать инструмент.





1/2

**Этот множитель появляется
из деления
параллелограмма
диагональю на два равных
треугольника.**

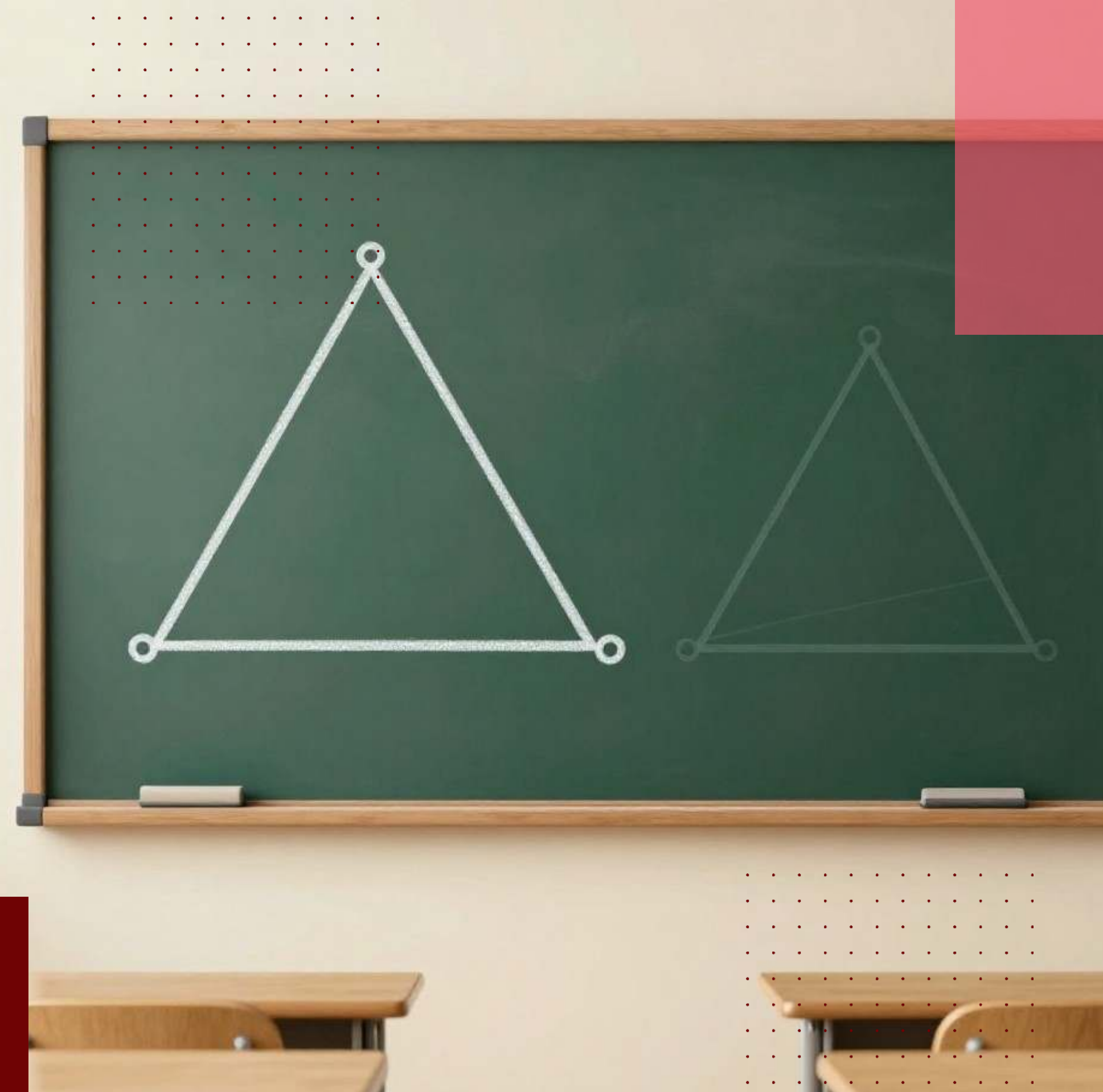
Школьный курс геометрии (Параллелограмм и его площадь), программа 11 класса.

$S = 1/2 \cdot a \cdot h$, где a — основание, h — высота к этому основанию. Высота перпендикулярна основанию и равна расстоянию от вершины до прямой основания.

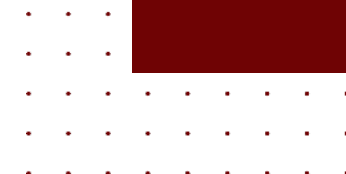
Как обозначаются основание и высота в треугольнике

На схеме помечают основание a и высоту h , а между основанием и высотой рисуют прямой угол. Так легче увидеть, что h — это перпендикулярное расстояние, а не просто боковая сторона.

В остроугольном треугольнике высота целиком лежит внутри, в прямоугольном совпадает с одним катетом, а в тупоугольном выходит за пределы фигуры. Полезно указать вершину, откуда проведён перпендикуляр, и точку его основания.



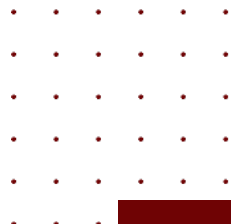
Как меняется площадь при фиксированном основании



При $a = 10$ см формула $S = 1/2 \cdot a \cdot h$ превращается в $S = 5h$, поэтому точки графика лежат на прямой.

Линейность означает: увеличивая высоту в k раз, вы увеличиваете площадь тоже в k раз — это прямое следствие пропорциональности.

Расчёт по формуле $S = 1/2 \cdot a \cdot h$ ($a = 10$ см), демонстрационный пример.



Площадь через две стороны и угол между ними

Если известны стороны a и b и включённый угол C между ними, удобна формула $S = 1/2 \cdot a \cdot b \cdot \sin C$. Она связывает площадь не с высотой напрямую, а с углом.

Логика вывода проста: начиная с $S = 1/2 \cdot a \cdot h$, высоту выражают через тригонометрию как $h = b \cdot \sin C$. Тогда получается $S = 1/2 \cdot a \cdot b \cdot \sin C$.

Когда $C = 90^\circ$, $\sin C = 1$, и формула превращается в $S = 1/2 \cdot a \cdot b$. Это совпадает с площадью прямоугольного треугольника по катетам, то есть согласуется с геометрическим смыслом угла.

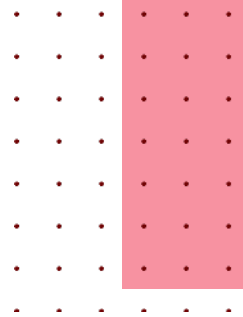
90°

**При прямом угле синус
максимален, поэтому
площадь при фиксированных
сторонах становится
наибольшей.**

Школьный курс геометрии и тригонометрии (свойства синуса, включённые углы треугольника).

Одна и та же площадь записывается так: $S = 1/2 \cdot a \cdot b \cdot \sin C$
 $S = 1/2 \cdot b \cdot c \cdot \sin A = 1/2 \cdot a \cdot c \cdot \sin B$. Значит, можно выбирать
любую пару сторон и соответствующий ей угол.

Сравнение основных формул площади треугольника

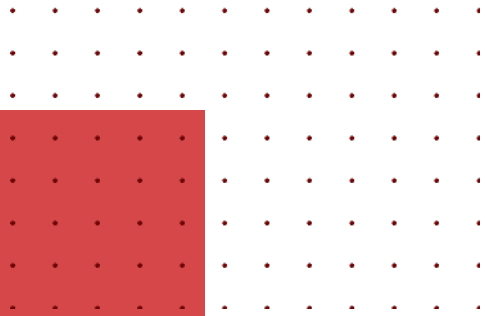


Сопоставьте, какие данные даны в условии, и выберите формулу, которая требует меньше дополнительных шагов.

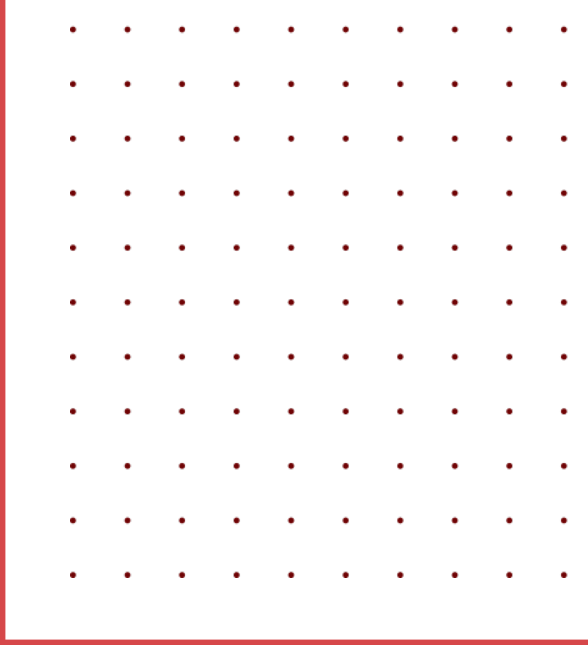
В каждой задаче выигрывает тот путь, где известные величины уже «подставляются» напрямую. Это снижает количество промежуточных вычислений и ошибок.

Данные	Формула	Удобство
a и h	$S = 1/2 \cdot a \cdot h$	низкая
a, b и C	$S = 1/2 \cdot a \cdot b \cdot \sin C$	средняя
a, b, c	$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$	средняя
A(x1,y1), B(x2,y2), C(x3,y3)	по координатам	универсальная
p и r	$S = p \cdot r$	зависит от контекста

Школьный курс геометрии 11 класса (основные формулы площади треугольника).



Теорема Герона: площадь по трём сторонам



Формула Герона позволяет найти площадь S только по длинам сторон a , b , c : $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = (a+b+c)/2$ — полупериметр.

Она особенно полезна, когда высоты и углы не заданы и нельзя опираться на тригонометрию: треугольник «зашифрован» в трёх числах сторон.

Перед вычислением важно проверить неравенство треугольника: сумма любых двух сторон должна быть больше третьей. Иначе подкоренное выражение не будет соответствовать реальному треугольнику.



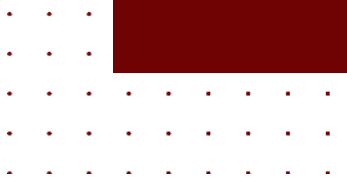
84

**Значит, при данных сторонах
площадь треугольника
выражается целым числом.**

Пример расчёта по формуле Герона (школьная математика, 11 класс).

Для сторон 13, 14 и 15 см: $p = (13+14+15)/2 = 21$. $S = \sqrt{21 \cdot (21-13) \cdot (21-14) \cdot (21-15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{7056} = 84 \text{ см}^2$.

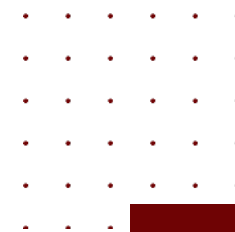
Какая формула удобнее в разных типах задач



Выбор формулы — это не привычка, а стратегия: диаграмма показывает, где вычисления чаще упираются в простые подстановки, а где требуется больше промежуточных шагов.

Когда в условии заданы «прямые» геометрические величины (основание и высота), решение ускоряется; при координатах часто достаточно одной формулы, а Герон экономит построения.

Сводная учебная схема на основе школьной практики (курс геометрии 10–11 классов), дата: 2026-05-12



Площадь через радиус вписанной окружности

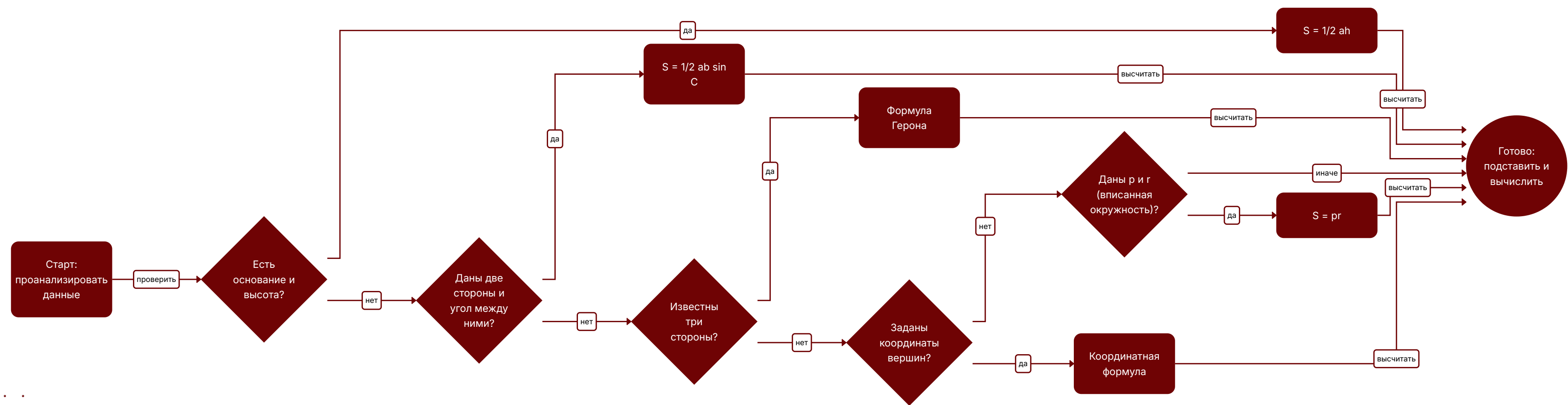
Формула $S = pr$ связывает площадь с полупериметром p и радиусом вписанной окружности r . Она особенно уместна, когда по условию заданы касания, равенства отрезков или данные об окружности.

Идея опирается на разбиение треугольника на три треугольника с общей высотой r . Их основаниями выступают стороны исходного треугольника, поэтому сумма площадей даёт $p \cdot r$.

Эта формула часто работает в паре с теоремой Герона: если известны стороны, сначала находят p и площадь, затем из $S = pr$ определяют r или проверяют согласованность данных.

Алгоритм выбора формулы площади

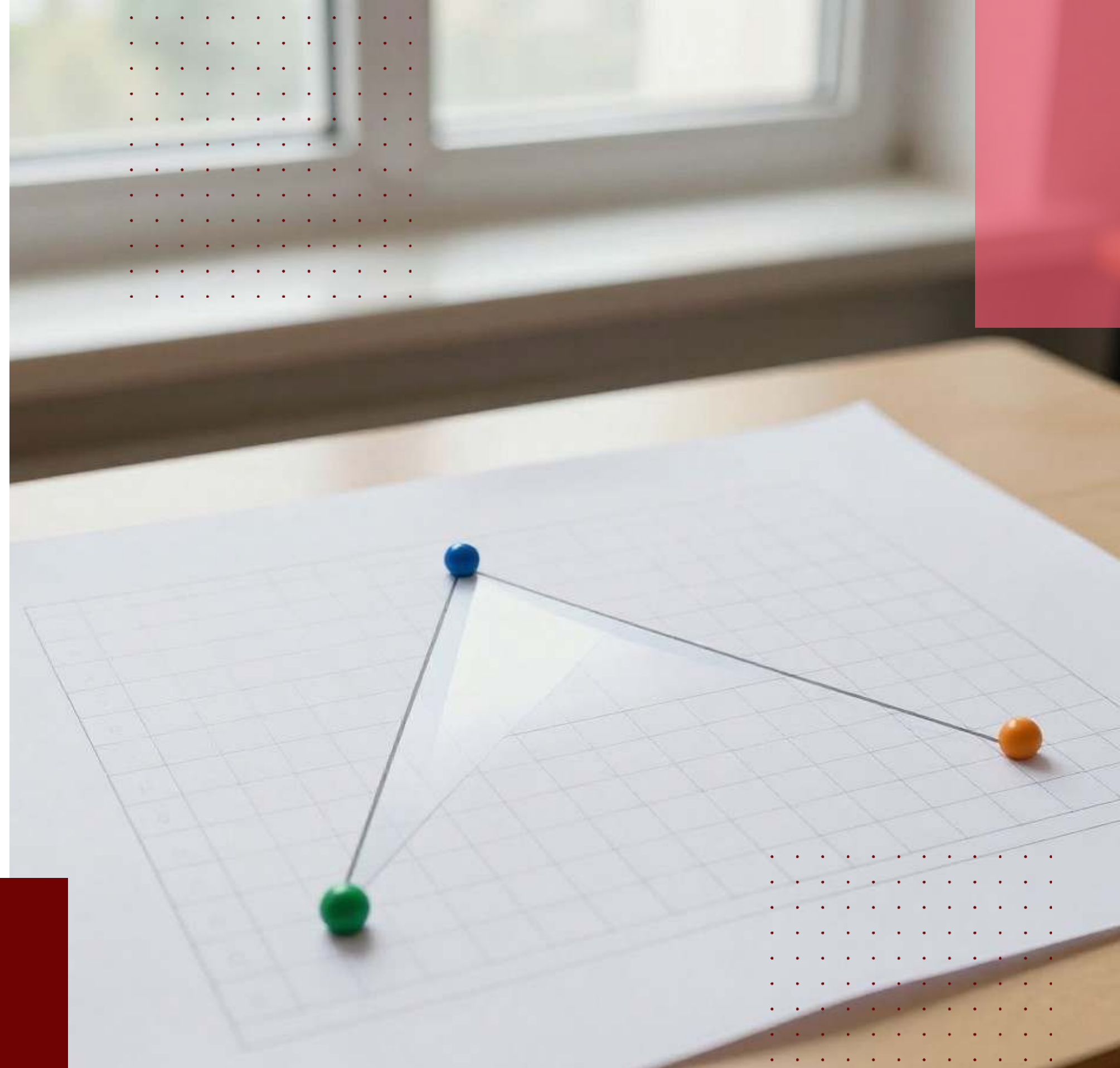
Условие задачи задаёт «набор входных данных», а алгоритм ведёт к формуле с минимальным числом дополнительных вычислений.



Координатный способ нахождения площади

Если вершины треугольника заданы координатами $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, площадь удобно находят через определитель или через модуль векторного произведения. Это помогает работать без построений и углов.

В аналитической геометрии координатный метод особенно ценен: фигура задана точками, а не сторонами. Он также используется для проверки коллинеарности: если площадь получается нулевой, точки лежат на одной прямой.



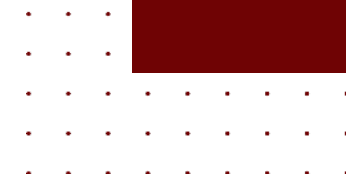
Координатная формула площади треугольника

Площадь по координатам вычисляется по формуле $S = 1/2 |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$. Она применима к любым трём точкам на плоскости, не требует промежуточных построений.

Модуль гарантирует положительное значение: ориентация обхода вершин не влияет на итог. Поэтому формула подходит и для задач, где порядок точек может меняться в записи.

Если $S = 0$, треугольник вырождается, а значит, точки лежат на одной прямой. Это делает формулу удобным инструментом для задач на проверку коллинеарности и корректность исходных данных.

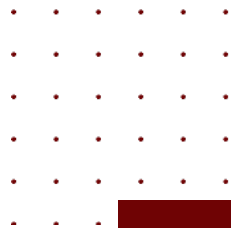
Совпадение результата при разных способах вычисления



Смысл сравнения: одна и та же геометрическая площадь должна получаться разными путями. Даже если формы вычислений отличаются, итоговая величина — инвариант.

Если результаты совпадают, вычисления выполнены корректно. Несовпадение почти всегда указывает на ошибку в выборе формулы, основании/угле или арифметике.

Проверочный пример на треугольнике со сторонами 6 см, 8 см, 10 см (учебная иллюстрация), дата: 2026-05-12



Особые случаи и быстрые вычисления

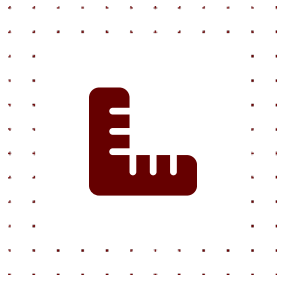
Ситуация	Дано	Формула площади
Равносторонний	сторона a	$S = a^2\sqrt{3}/4$
Прямоугольный	катеты 5 и 12	$S = 30 \text{ см}^2$
Три стороны	13, 14, 15	$S = 84 \text{ см}^2$

Школьный курс геометрии (формулы для частных случаев и пример по Герону), дата: 2026-05-12

Используйте «быстрые» формулы, когда форма треугольника заранее известна. Тогда отпадает необходимость в выборе более универсальных, но более длинных вычислений.

Сложные и универсальные методы нужны не всегда: при распознавании специального вида треугольника решение заметно ускоряется и уменьшается риск ошибок.

Типичные ошибки при нахождении площади



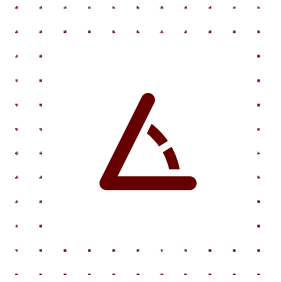
Путают основание и боковую сторону

Основание должно быть той стороной, к которой опущена высота. Частая ошибка — брать «похожую» сторону и подставлять её как основание, хотя высота рассчитана к другому ребру.



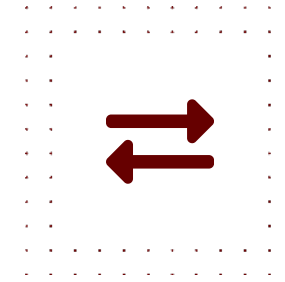
Забывают множитель 1/2

Во всех базовых формулах площади присутствует фактор 1/2: $S = 1/2 ah$ и $S = 1/2 ab \sin C$. Пропуск его автоматически делает ответ вдвое больше или меньше.



Подставляют неверный угол

В формуле $S = 1/2 ab \sin C$ синус относится к включённому углу между сторонами a и b . Если взять угол не между данными сторонами, площадь будет вычислена некорректно.



Не проверяют условия для Герона и единицы

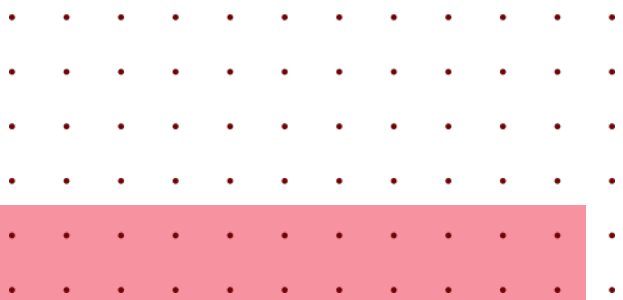
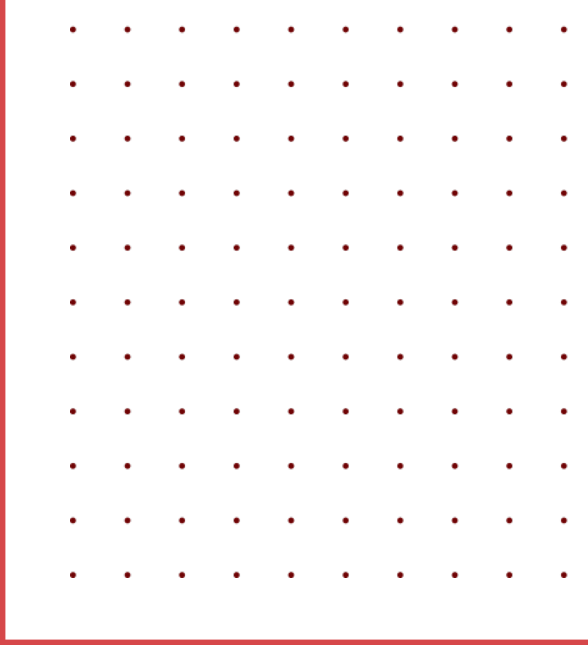
Перед формулой Герона нужно убедиться, что выполняется неравенство треугольника. Кроме того, при сантиметрах площадь записывают в квадратных сантиметрах, а не в линейных единицах.

Где применяются формулы площади треугольника

Формулы площади нужны не только в школе: их используют в строительстве и инженерных расчётах, когда поверхность или план разбивают на треугольные элементы. Это упрощает вычисления для сложных форм.

В картографии, компьютерной графике и моделировании треугольная сетка применяется потому, что любую многоугольную область можно разложить на треугольники. Тогда площадь сводится к сумме площадей простых фигур.

В задачах с координатами и измерениями формулы становятся мостом между геометрией и аналитикой. По точкам на плоскости можно находить площади областей, контролировать корректность модели и проверять условия.



Одна площадь — разные способы её нахождения

Все формулы площади треугольника описывают одну и ту же величину, но используют разные исходные данные: $S = 1/2 ah$, $S = 1/2 ab \sin C$, формула Герона, координатная формула и $S = pr$. Умение выбирать способ и видеть связи — ключ к уверенным решениям.