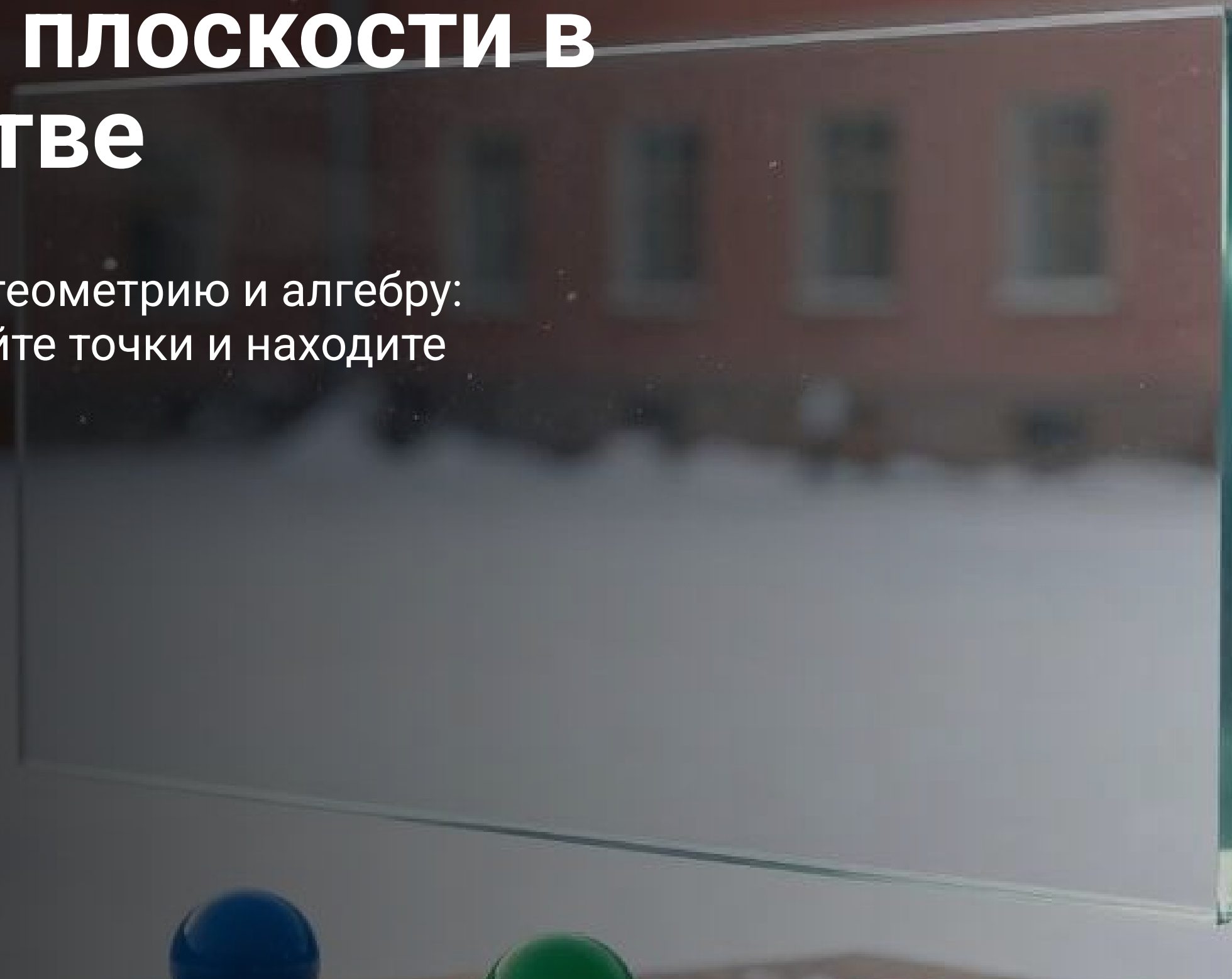


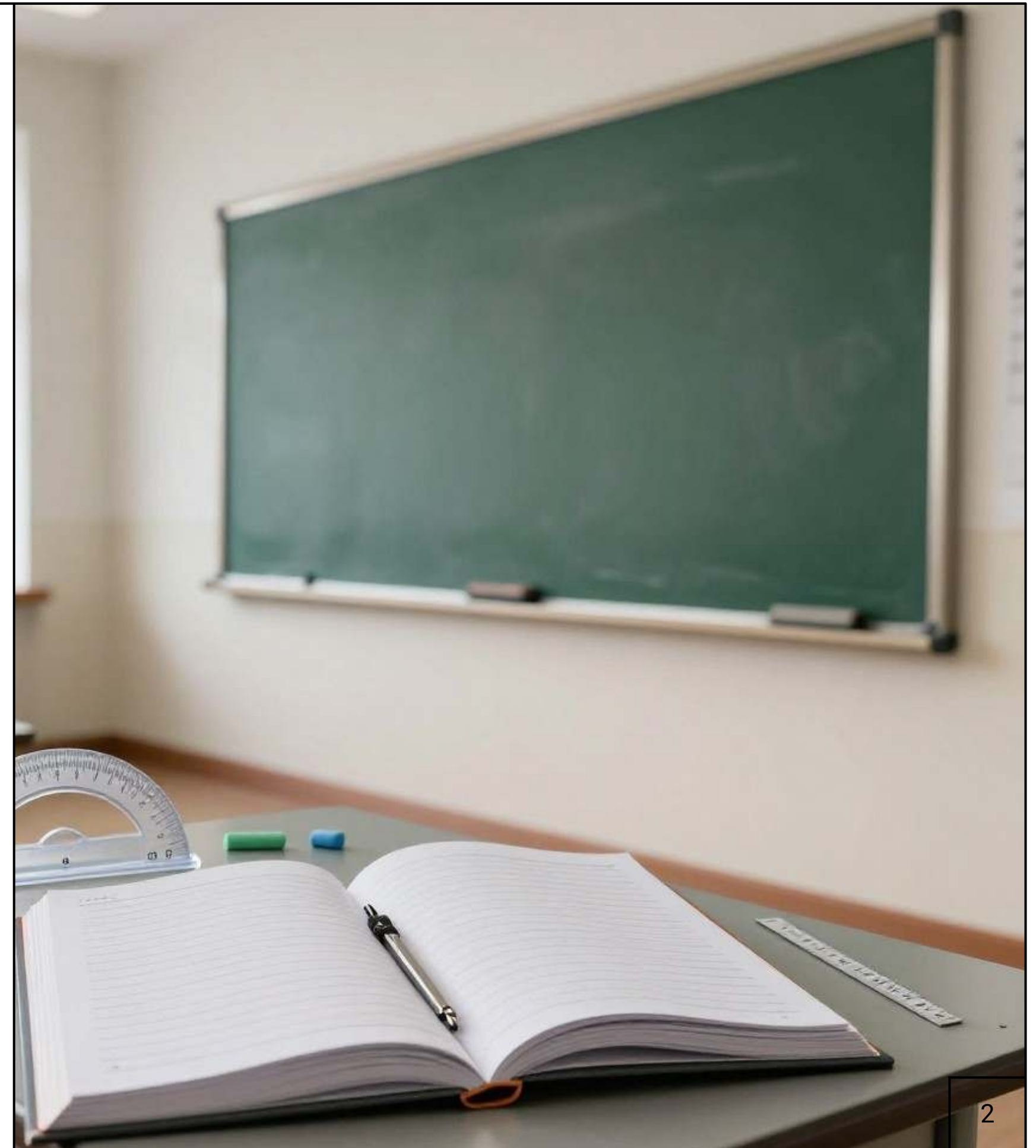
Уравнение плоскости в пространстве

Плоскость связывает геометрию и алгебру: задавайте её, проверяйте точки и находите расстояния.



Почему уравнение плоскости изучают в 11 классе

Плоскость постоянно появляется в задачах на сечения многогранников, расстояния и построение моделей. Координатный метод заменяет рисунок вычислениями, которые дают точные ответы. Тема продолжает векторную геометрию: координаты, векторы, скалярное произведение, коллинеарность.



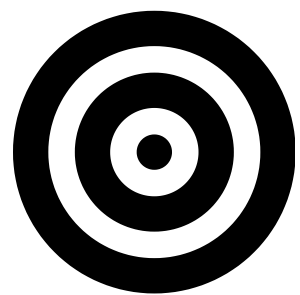
Плоскость в координатной системе $Oxyz$

1 Каждой точке плоскости соответствует тройка координат (x, y, z) . Чтобы описать плоскость полностью, недостаточно одной точки: нужна информация о её «направлении» в пространстве.

2 В отличие от прямой, плоскость требует двух независимых направлений. Поэтому в декартовой системе координат её удобно задавать линейным уравнением относительно x, y и z .

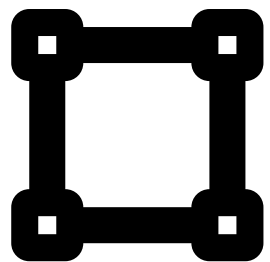
3 Линейная зависимость означает, что плоскость не искривляется и её анализ остаётся строгим: вы можете выполнять преобразования, проверять принадлежность точки и сравнивать плоскости по алгебраическим признакам.

Нормальный вектор плоскости



Перпендикулярность плоскости

Нормальный вектор n перпендикулярен плоскости. Любой вектор, «лежащий в плоскости», образует с n прямой угол, поэтому скалярное произведение с ним обращается в ноль.



Условие для точки

Если известна точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ плоскости и $n = (A, B, C)$, то для любой точки $M(x, y, z)$ плоскости верно равенство $n \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$.

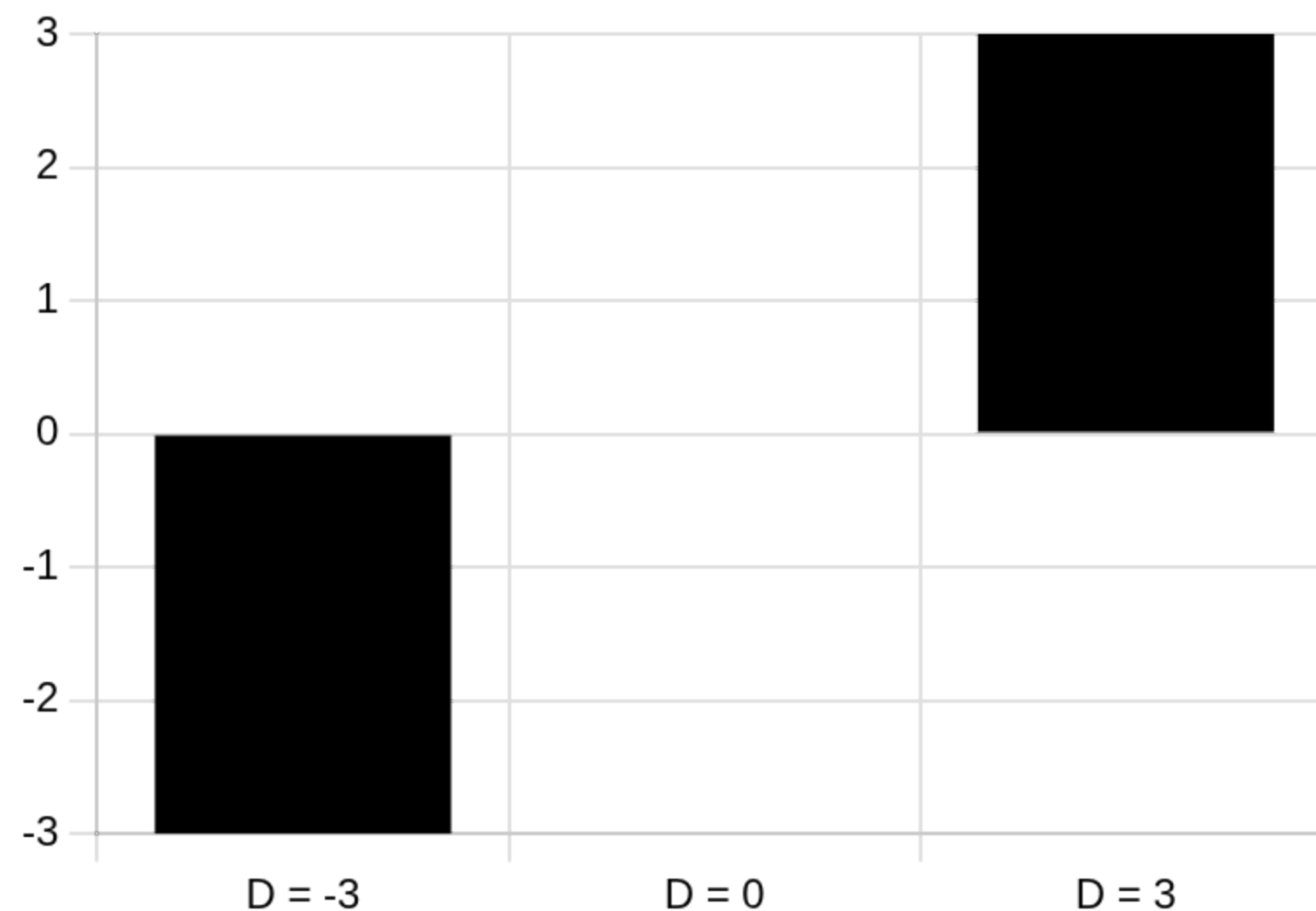


Практическая проверка

Уравнение через нормаль превращает геометрию в проверку чисел: подставили координаты точки — и сразу видно, принадлежит ли она плоскости.

Общее уравнение плоскости и смысл коэффициентов

Влияние свободного члена D (при фиксированных A, B, C)



В общем виде $Ax + By + Cz + D = 0$ коэффициенты A, B, C задают направление нормали, а D — сдвиг плоскости относительно начала координат.

При одинаковой нормали изменение D не меняет наклон: плоскость смещается вдоль нормали, переходя к точкам с другим «уровнем» $Ax + By + Cz$.

Уравнение плоскости через точку и нормаль

- 1** Плоскость проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и имеет нормаль $n = (A, B, C)$. Тогда любой вектор из M_0 в точку M лежащую на плоскости, перпендикулярен n .
- 2** Отсюда получается запись:
 $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. Это уравнение напрямую использует данные задачи и удобно для составления «по условию».
- 3** Если раскрыть скобки, получаем общее уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$, где $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$. Остаётся только выполнить подстановку заданной точки для контроля.

Плоскость по трём точкам

1 Три точки M_1, M_2, M_3 , не лежащие на одной прямой, определяют плоскость единственным образом: в пространстве они задают две независимые «боковые» степени свободы.

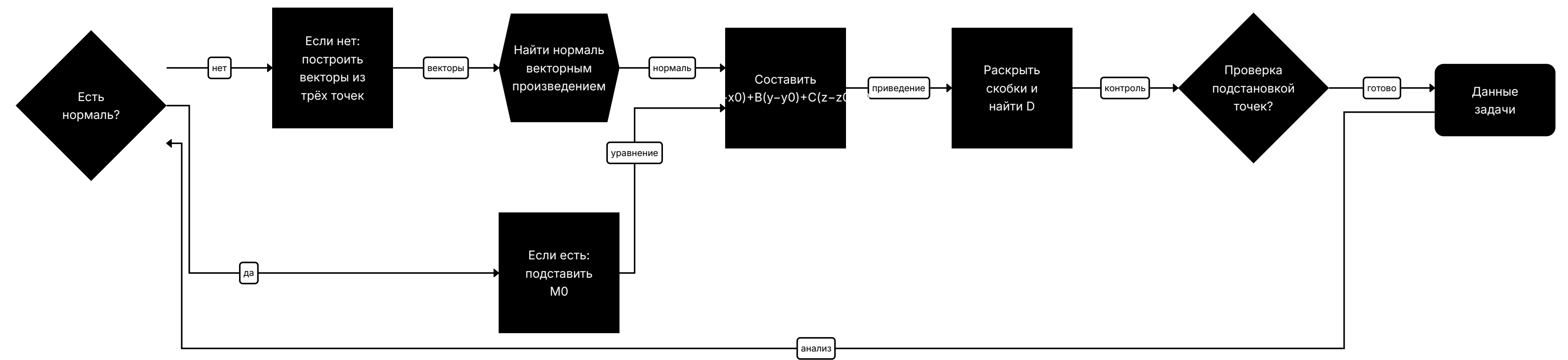
2 Из координат строят два вектора, лежащие в искомой плоскости, например M_1M_2 и M_1M_3 . Эти векторы описывают направления, по которым точки «разворачиваются» в плоскости.

3 Векторное произведение даёт нормальный вектор: $n = (M_1M_2) \times (M_1M_3)$. Он перпендикулярен обоим направляющим, а значит, перпендикулярен всей плоскости, задаваемой тремя точками.

4 Далее используют форму через точку и нормаль, чтобы получить уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$. Если точки коллинеарны, плоскость нельзя выбрать однозначно.

Алгоритм составления уравнения плоскости

Дано: точка и нормальный вектор или три точки



Три формы задания плоскости

Форма	Что задано	Запись	Когда удо
Точка и нормаль	$M_0, n = (A, B, C)$	$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$	При прямом построении координат
Общее уравнение	A, B, C, D	$Ax + By + Cz + D = 0$	Для вычисления проверок, пересечен
Три точки	M_1, M_2, M_3	Через нормаль, найденную по векторам	Для геометрических задач и сеч

Одна и та же плоскость описывается разными записями; выбор формы зависит от данных и типа операции.

Если известна нормаль — проще идти от скалярного условия. Если удобнее сравнивать плоскости или пересекать их — используют общее уравнение. По трём точкам сначала находят нормаль.

Обобщение школьного курса аналитической геометрии.

Частные случаи общего уравнения



Когда $C = 0$

Если в $Ax + By + Cz + D = 0$ коэффициент C равен нулю, координата z не влияет на принадлежность точек плоскости: плоскость не меняется при сдвиге вдоль Oz и оказывается параллельной оси Oz .



Когда $B = 0$ и $C = 0$

Если B и C равны нулю, остаётся уравнение $Ax + D = 0$. Такая плоскость не зависит от y и z , значит она параллельна координатной плоскости Oyz и «перпендикулярна» оси Ox по направлению нормали.

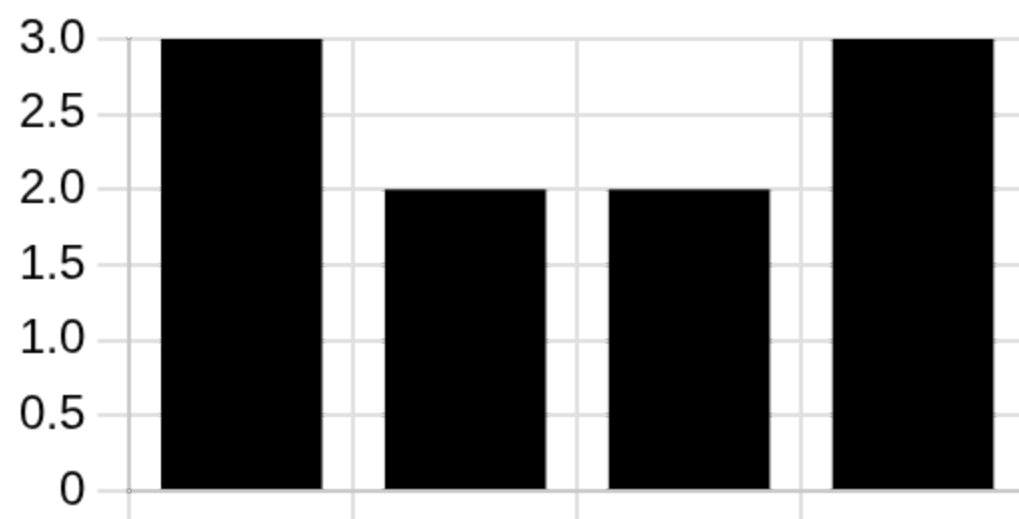


Когда $D = 0$

Если свободный член D равен нулю, плоскость проходит через начало координат $O(0,0,0)$: подстановка $(0,0,0)$ в $Ax + By + Cz + D = 0$ даёт верное равенство $0 = 0$.

Как коэффициенты меняют положение плоскости

| Роль коэффициентов в общем уравнении плоскости $Ax + By + Cz = D$



Наклон (нормаль задаётся A,B,C)
Сдвиг без изменения наклона (D)
Параллельность при пропорциональных A,B,C
Совпадение при пропорциональности всех коэффициентов

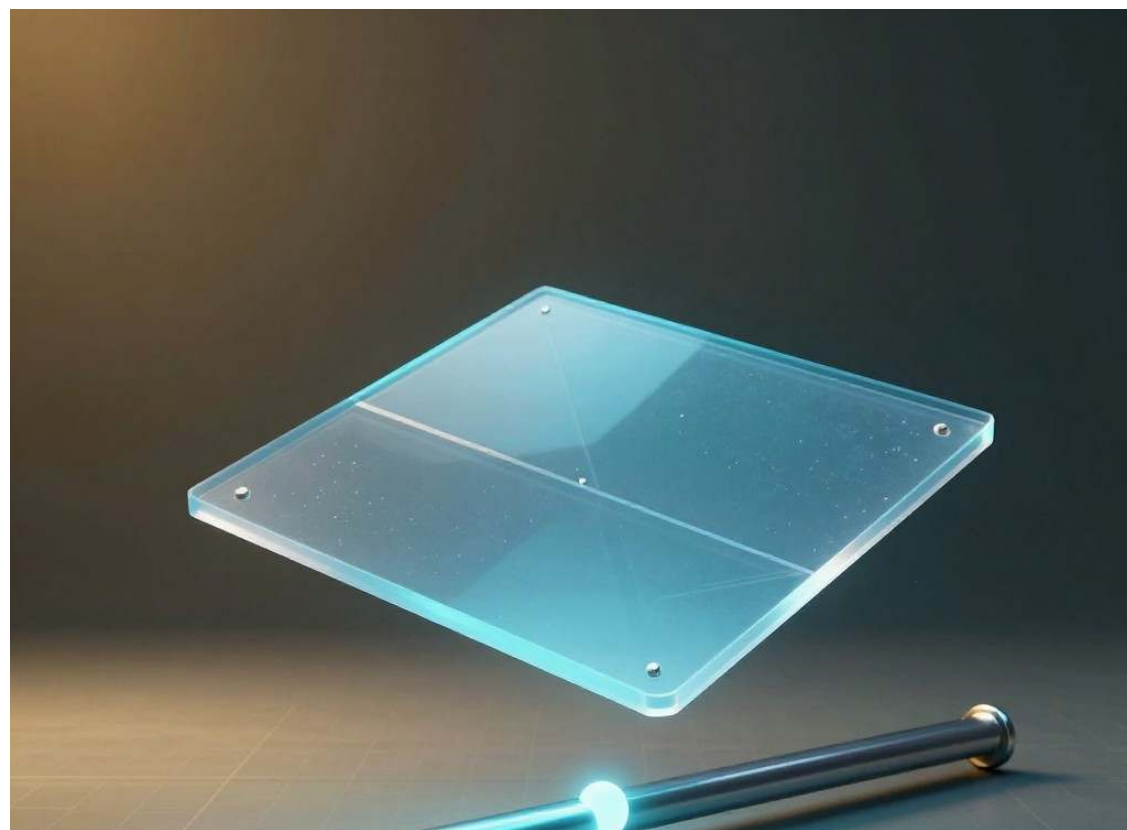
Если плоскость задана коэффициентами A, B, C, именно они определяют направление нормального вектора и, следовательно, наклон плоскости.

Параллельность связана с направлением нормалей: при пропорциональности только A,B,C плоскости параллельны; совпадение требует пропорциональности всех коэффициентов.

Пересечения плоскости с осями координат

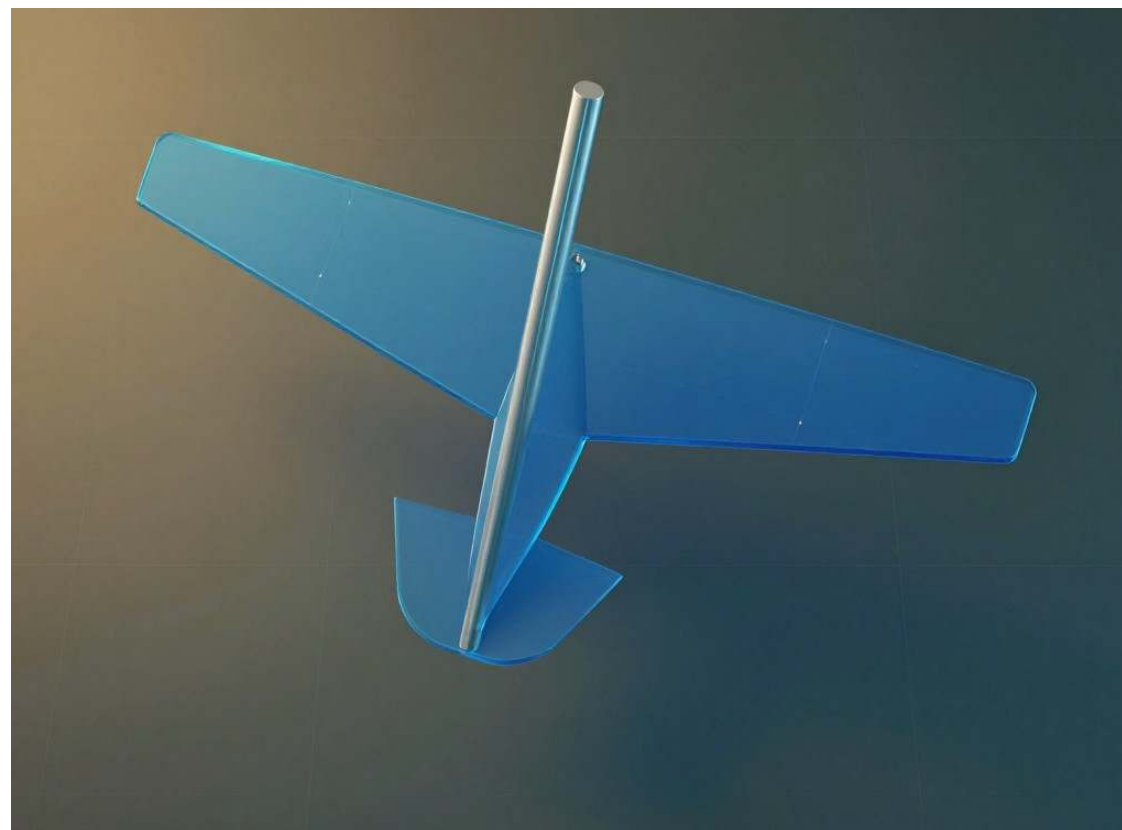
Где плоскость «зацепляется» за Ox

Чтобы найти точку пересечения с осью Ox , берём $y = 0$ и $z = 0$ и подставляем их в уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$. Полученное уравнение определяет координату x . Если решение отсутствует, пересечения с Ox нет.



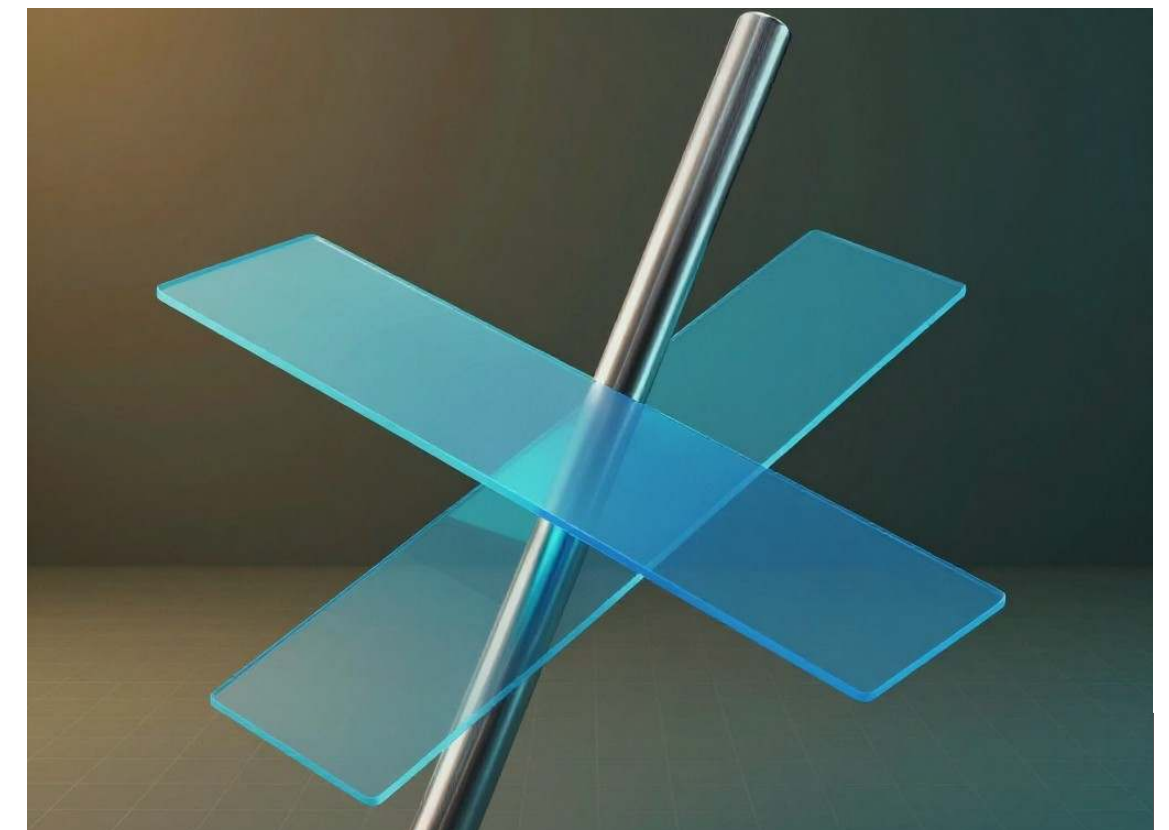
След на Oy : две нулевые координаты

Пересечение с осью Oy ищется аналогично: ставим $x = 0$ и $z = 0$. Тогда уравнение превращается в простую зависимость от y . Она показывает, где плоскость пересекает ось. Отсутствие решения означает, что ось Oy плоскость не «срезает».



Поворотный пункт на Oz

Для оси Oz подставляем $x = 0$ и $y = 0$. В результате остаётся выражение, по которому можно определить единственную точку пересечения, если она существует. Координата точки на Oz становится наглядным индикатором положения плоскости относительно начала координат.



90°

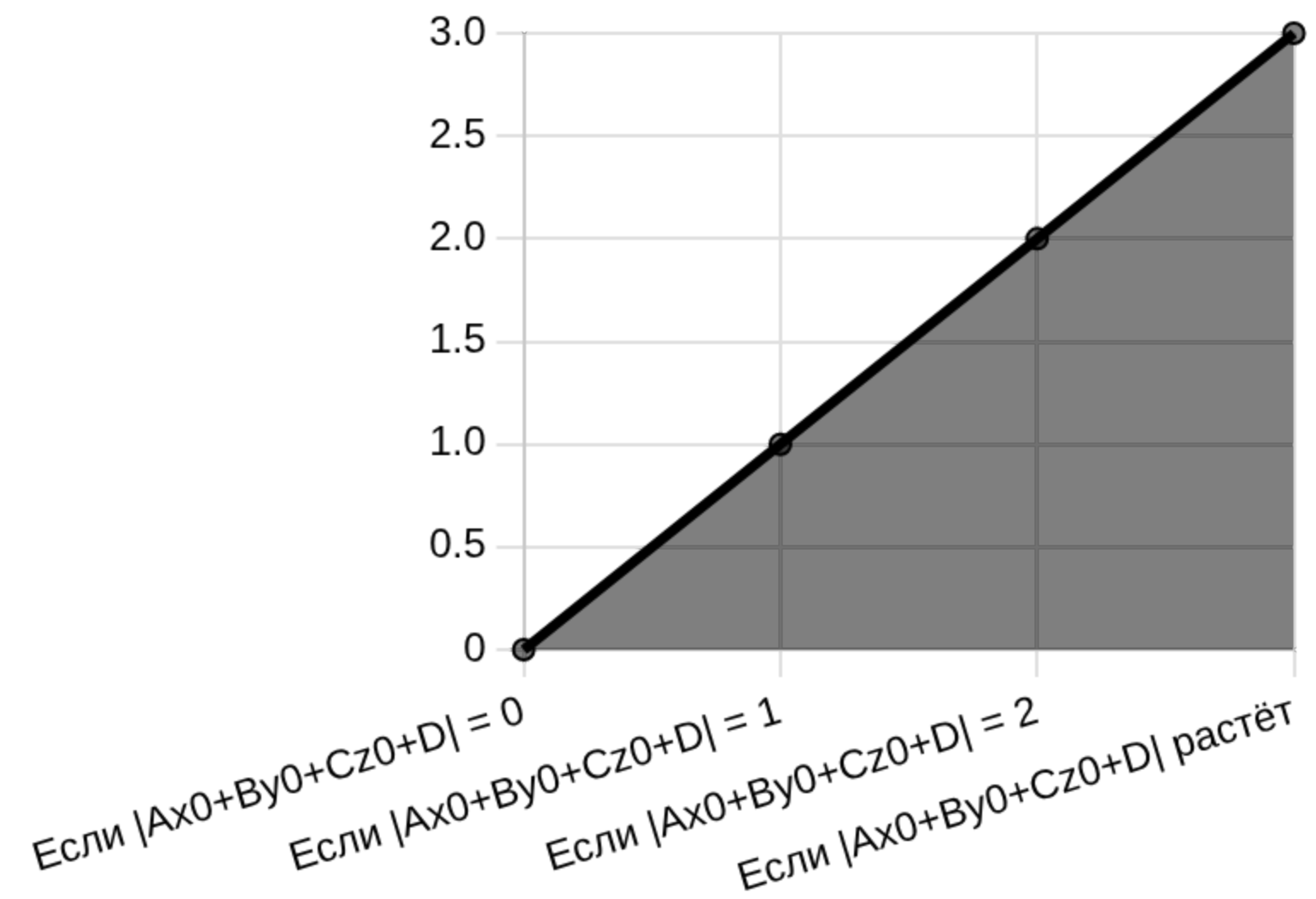
Если скалярное произведение нормалей равно нулю, плоскости образуют прямой угол.

Формула угла через скалярное произведение нормалей в аналитической геометрии (общие свойства скалярного произведения).

Угол между плоскостями находят как угол между их нормальями: ноль скалярного произведения означает перпендикулярность.

Расстояние от точки до плоскости

Зависимость расстояния ρ от числителя при фиксированной длине



Числитель показывает «отклонение» точки от плоскости по направлению нормали, а знаменатель масштабирует по длине этой нормали.

При неизменной длине нормального вектора расстояние растёт пропорционально модулю выражения $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D$.

Иллюстративный график по формуле $\rho = |Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D| / \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, при условии $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = 1$ (для наглядности).

Типичные ошибки при решении задач на плоскость

В таблице собраны наиболее частые промахи и объяснено, как они проявляются в уравнении или ответе.

Почти все ошибки связаны не с теорией, а с вычислениями и отсутствием проверки: подстановка точек экономит время и предотвращает «тихие» промахи.

Ошибка	Причина	Последствие
Неверно найден нормальный вектор	Путают векторные операции	Получается неверное уравнение плоскости
Выбраны коллинеарные точки	Три точки не определяют плоскость	Плоскость определяется неоднозначно
Потерян знак при раскрытии скобок	Арифметика при выводе D	Сдвигается свободный член D
Не проверена подстановка / перепутаны координаты	Нет контроля результата или невнимательность	Ошибка остаётся незамеченной, условие не выполняется

Проверка принадлежности точки и пересечения с прямой

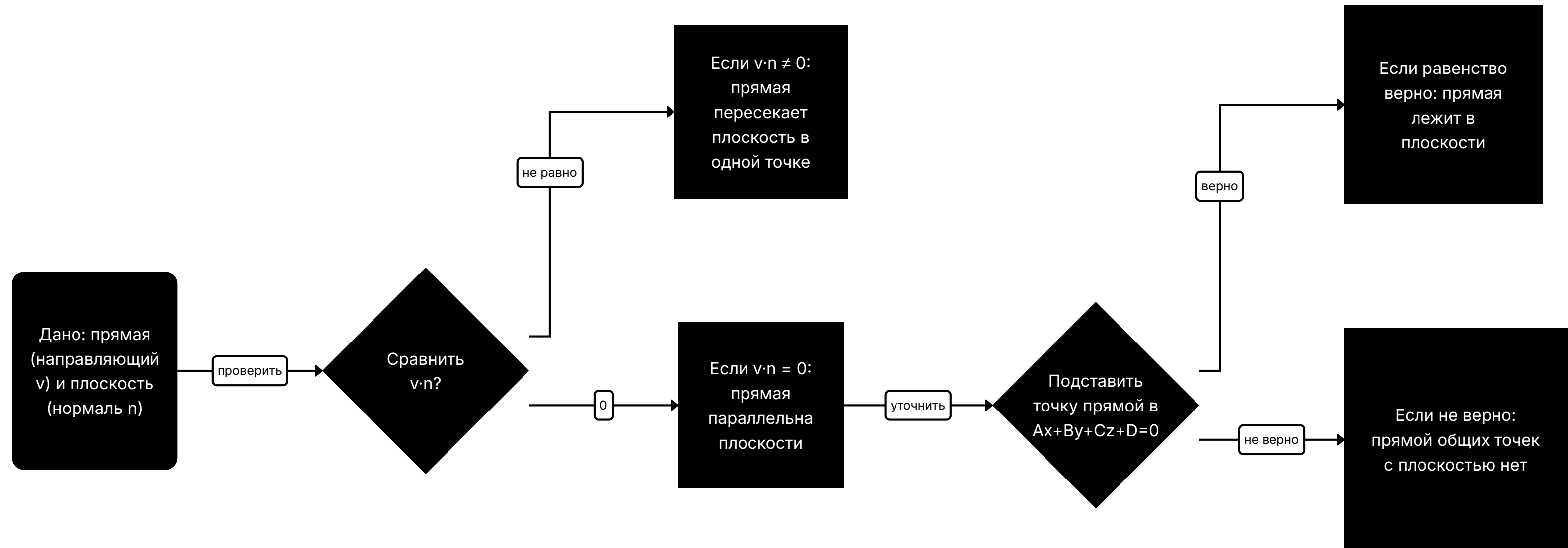
1 Точка $M(x, y, z)$ принадлежит плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ тогда и только тогда, когда её координаты превращают левую часть уравнения в ноль.

2 Прямая пересекает плоскость в одной точке, если она не параллельна плоскости: направляющий вектор прямой не должен быть перпендикулярен нормали плоскости.

3 Если все точки прямой удовлетворяют уравнению плоскости, значит прямая лежит в плоскости целиком; это устанавливают подстановкой одной точки и проверкой направления.

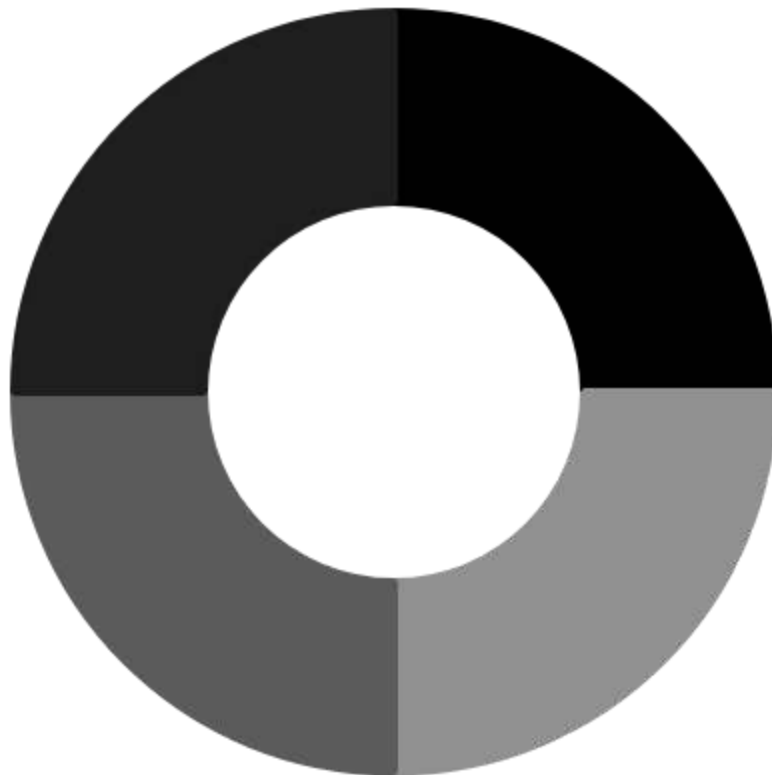
Как определить взаимное расположение прямой и плоскости

Алгоритм опирается на скалярное произведение направляющего вектора прямой и нормали плоскости, а затем — на проверку точки прямой.



Применения уравнения плоскости в задачах и практике

- Стереометрия: сечения и расстояния
- Инженерная графика и архитектура: наклонные поверхности
- Компьютерная графика: сцены, видимость, пересечения
- Школьная геометрия: перевод рисунка в аналитическую форму



При решении задач уравнение плоскости помогает находить пересечения, отрезки в сечениях и расстояния без громоздких геометрических построений.

Разные области используют одну и ту же идею: линейная запись плоскости связывает геометрию и вычисления.

Классификация применений по школьной программе и учебной практике (условная диаграмма без внешних численных измерений).

Пример составления уравнения плоскости

1 Плоскость проходит через точку $M_0(1, 2, 3)$ и имеет нормальный вектор $n = (2, -1, 4)$. Поэтому в записи через точку и нормаль подставляем координаты в $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

2 Подставив числа, получаем $2(x - 1) - (y - 2) + 4(z - 3) = 0$. Это уравнение сразу отражает ориентацию плоскости: нормаль задаётся найденными коэффициентами.

3 Раскрываем скобки: $2x - 2 - y + 2 + 4z - 12 = 0$. После приведения подобных членов остаётся компактный общий вид: $2x - y + 4z - 12 = 0$.

4 Финальный шаг — проверка подстановкой точки M_0 . Подставляем $(1, 2, 3)$: $2 \cdot 1 - 2 + 4 \cdot 3 - 12 = 0$, значит уравнение составлено верно.

Уравнение плоскости: от картинки к вычислениям

Уравнение плоскости связывает геометрию и алгебру: оно позволяет задавать плоскость по точке и нормали, по трём точкам и проверять ответы подстановкой координат.