



Теорема косинусов: связь сторон и углов в треугольнике

Связывает стороны треугольника с углом между
ними и позволяет вычислять неизвестные
величины.



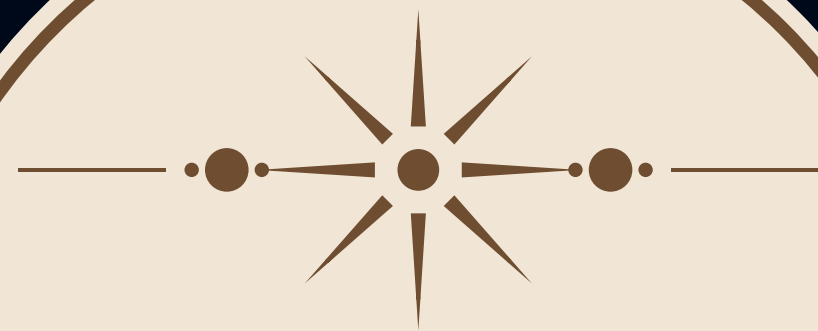
Где применяется теорема косинусов



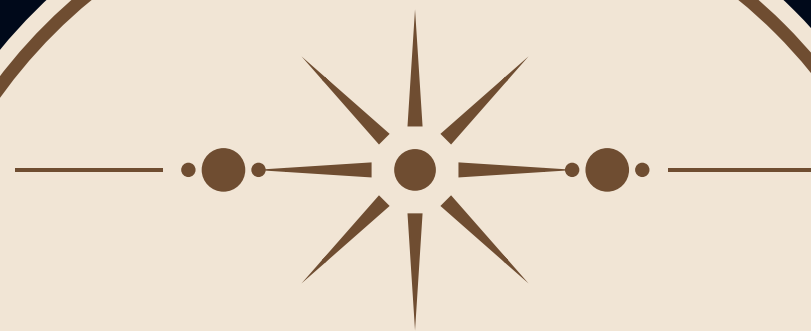
Теорема косинусов нужна, когда треугольник не прямоугольный и нельзя сразу применить формулу Пифагора. Она помогает находить расстояния, диагонали, стороны фигур и углы по измерениям.



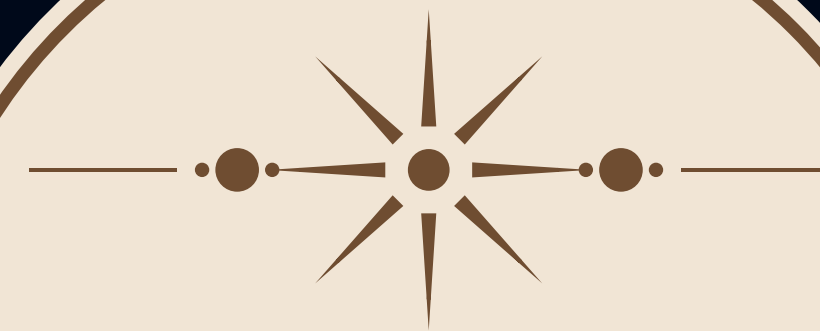
Формулировка теоремы косинусов



В треугольнике со сторонами a , b , c и углом C , лежащим напротив стороны c , выполняется равенство $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$. Эта запись связывает две стороны и угол между ними.



Аналогично записываются формулы для остальных сторон: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$ и $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$. В каждой формуле берутся две стороны, которые образуют нужный угол.



Ключевая идея: в теореме всегда используются две стороны и угол между ними, а искомая сторона стоит напротив этого угла. Поэтому выбор формулы зависит от того, что требуется найти.

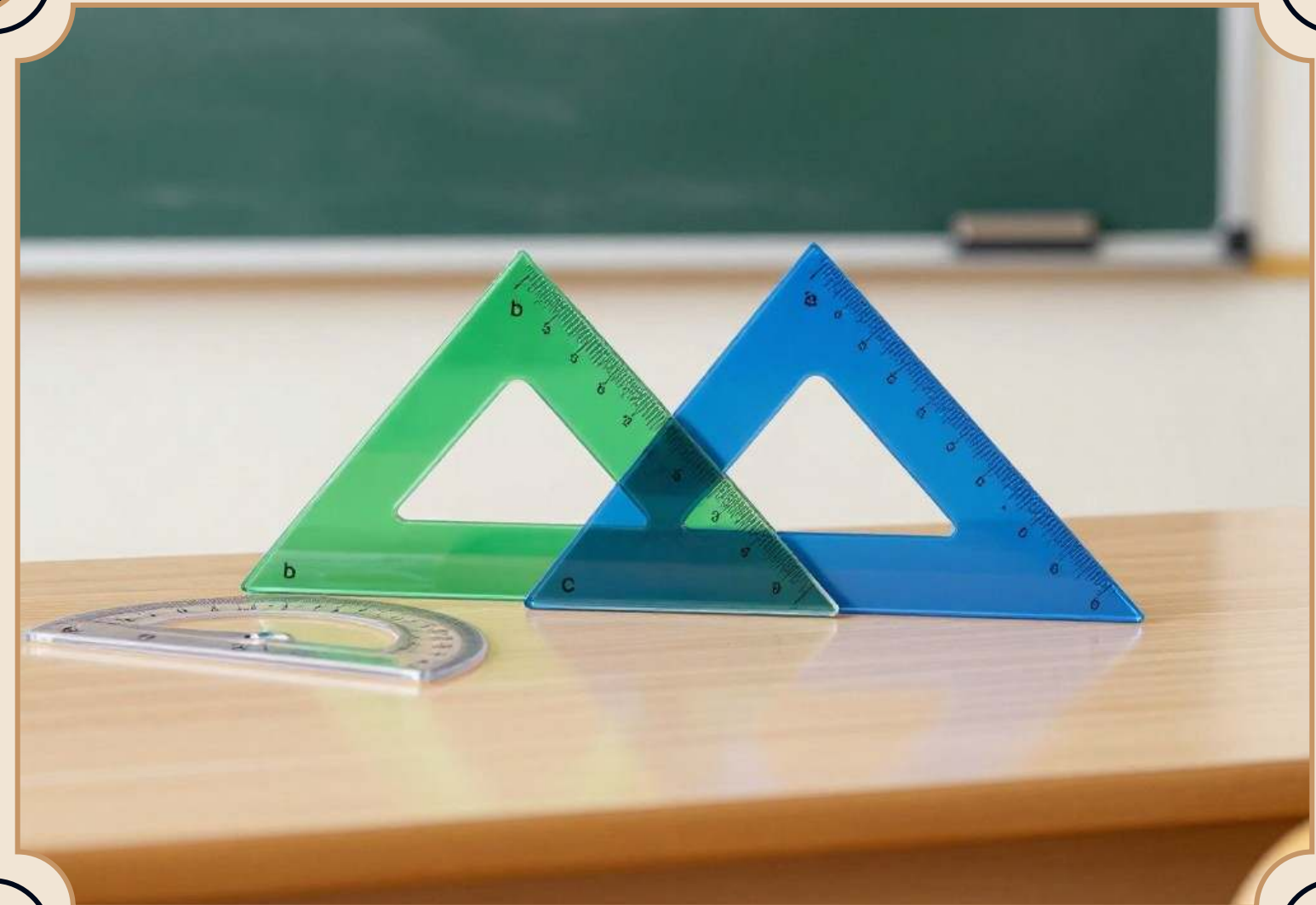
Обозначения в треугольнике

Стороны и углы: как читать рисунок

Стороны треугольника обозначают малыми буквами a , b , c , а углы — большими буквами A , B , C . Сторона a лежит напротив угла A , сторона b — напротив угла B , сторона c — напротив угла C .

Какие данные особенно важны

На практике важнее всего две известные стороны и угол между ними: именно их подставляют в теорему косинусов. Если угол расположен не между этими сторонами, формула выбрана неверно и ответ получится ошибочным.



Формулы теоремы косинусов для всех сторон



Подбирайте формулу по той стороне, которую нужно найти: она стоит напротив соответствующего угла.

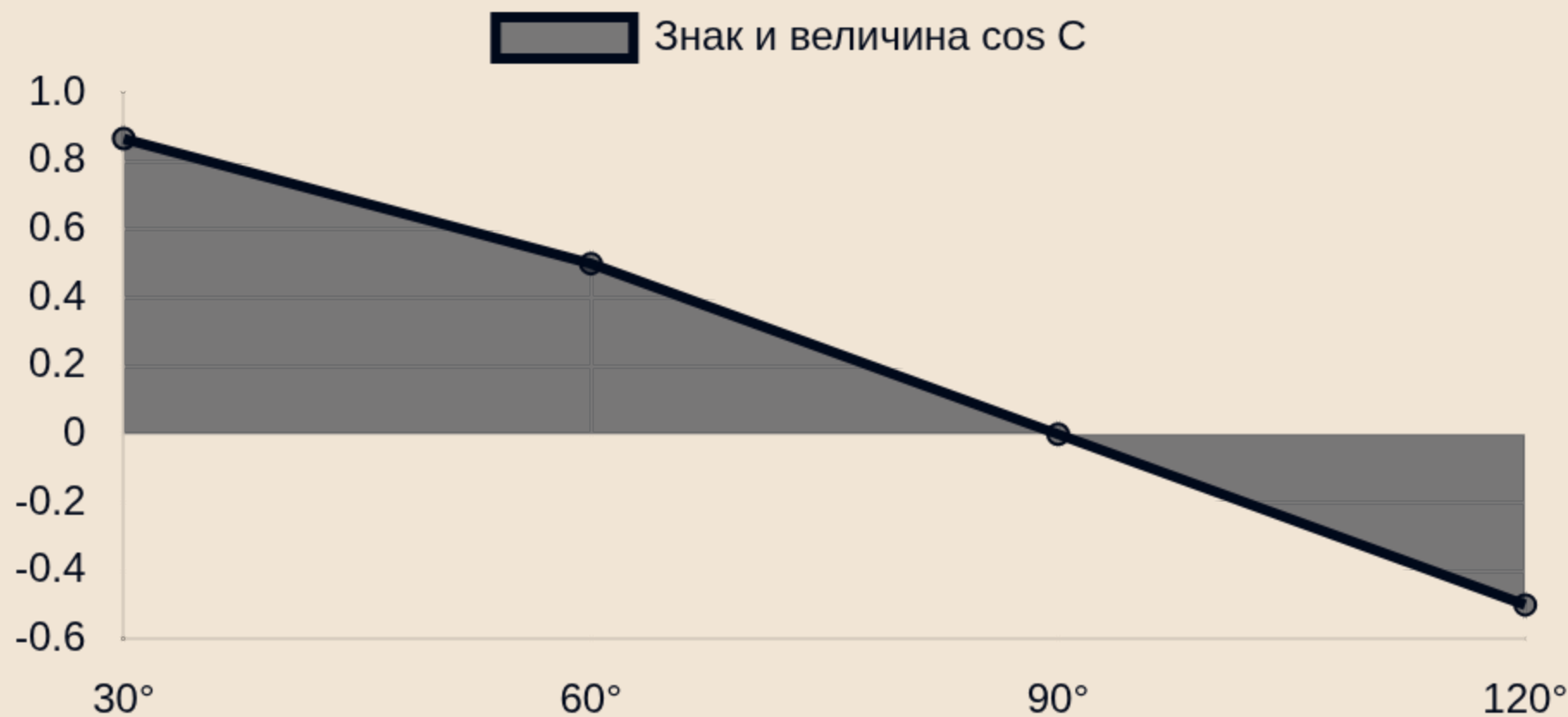
Искомая сторона	Формула	Какой угол нужен
c	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$	C между a и b
a	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$	A между b и c
b	$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$	B между a и c

Чтобы решить задачу, определите, какая сторона напротив нужного угла, и выберите соответствующую запись.



Школьный курс геометрии (теорема косинусов).

Как меняется длина стороны при разном угле



При фиксированных a и b величина и знак $\cos C$ управляют тем, как меняется c^2 : вычитаемое становится больше, меньше или даже прибавляет.

Чем ближе угол к 90° , тем меньше влияние вычитаемого. Тупой угол ($\cos C < 0$) увеличивает противоположную сторону по сравнению с прямым.

Тригонометрические значения $\cos$ для типовых углов.



Когда угол между двумя сторонами равен 90° , $\cos 90^\circ = 0$, и формула косинусов превращается в $c^2 = a^2 + b^2$. Так Пифагор становится частным случаем.



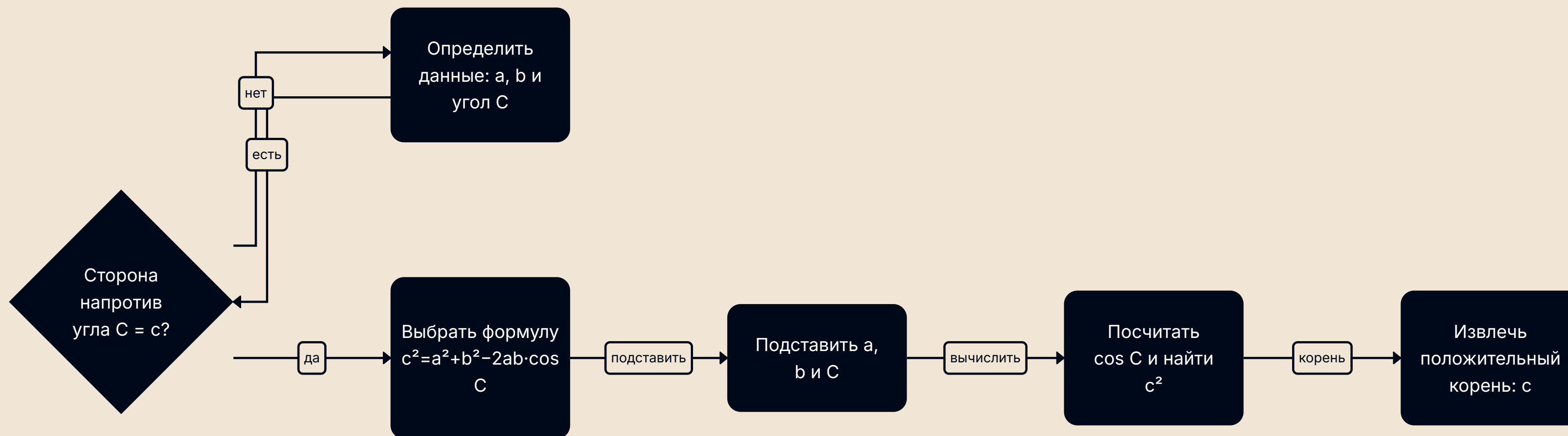
90°

При таком угле дополнительный член исчезает.

Школьный курс геометрии и тригонометрии.

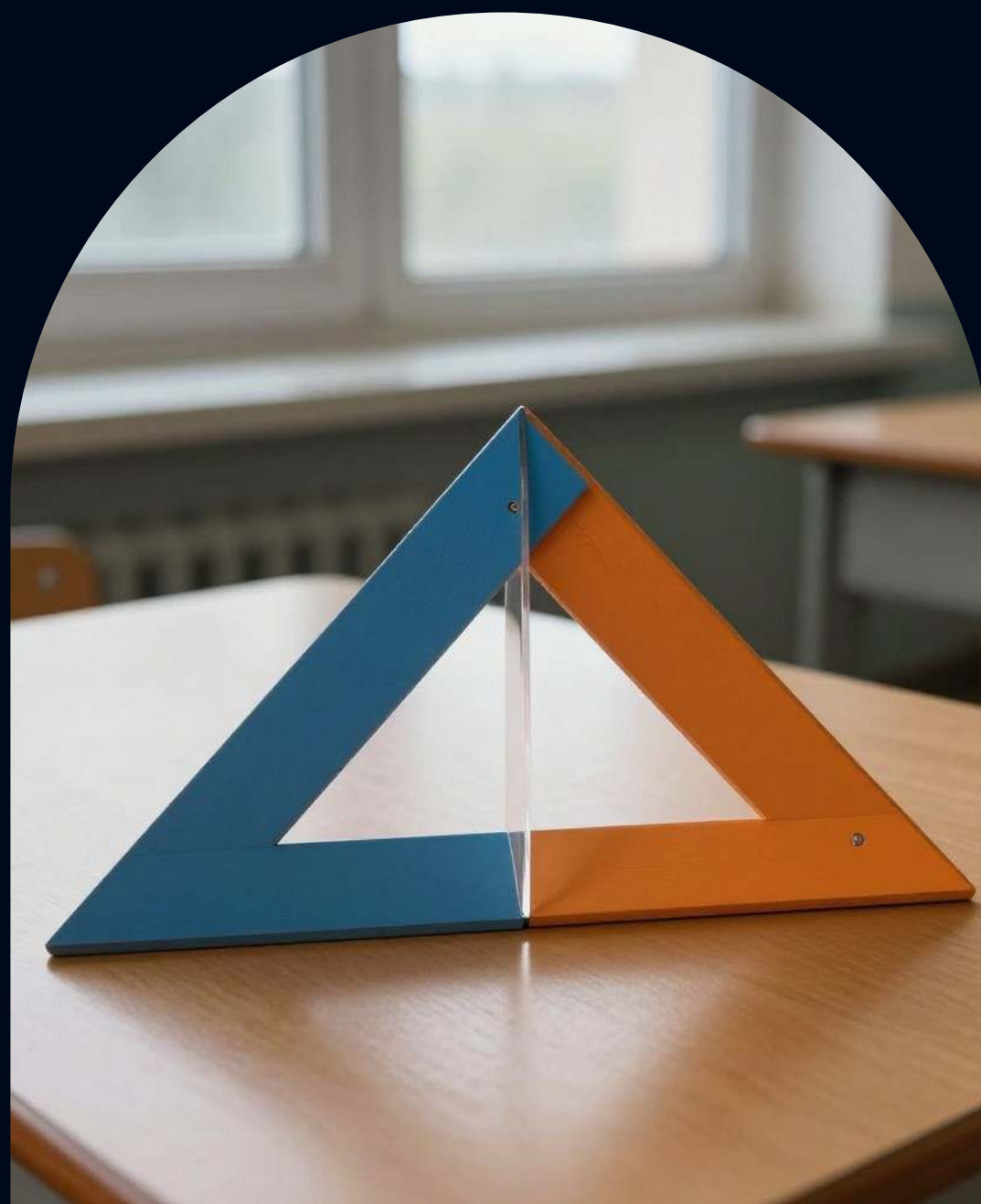
Алгоритм нахождения неизвестной стороны

Для случая «Даны две стороны и угол между ними».



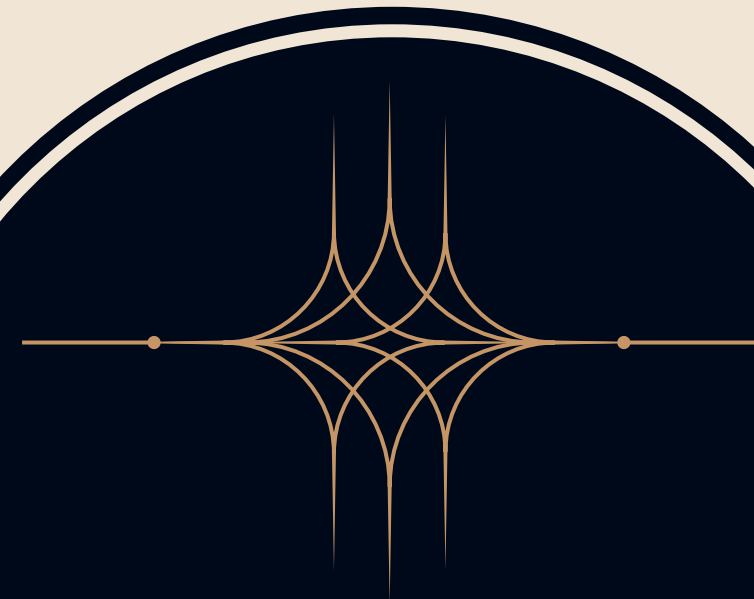
Пример вычисления стороны треугольника

Пусть $a=7$ см, $b=9$ см и $C=60^\circ$.
Тогда $c^2=7^2+9^2-2\cdot7\cdot9\cdot\cos 60^\circ$.
Так как $\cos 60^\circ=1/2$, получаем
 $c^2=49+81-63=67$.



После этого берём корень:
 $c\approx 8,2$ см. Пример показывает,
что в произвольном
треугольнике сторона
находится не простым
сложением, а с учётом
величины угла между
известными сторонами.

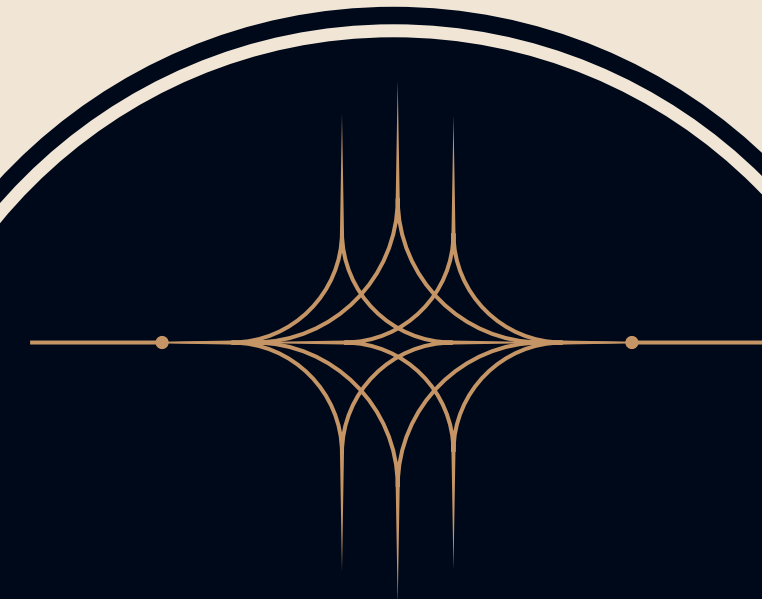
Как находить угол по трём сторонам



Если известны все три стороны треугольника, теорему косинусов удобнее преобразовать к виду $\cos C = (a^2 + b^2 - c^2) / (2ab)$. Здесь угол C стоит напротив стороны c .



Далее находят численное значение косинуса и определяют угол: либо по таблице значений косинусов, либо с помощью калькулятора через обратную тригонометрическую функцию. Получается значение угла C .



Такой подход особенно полезен, когда треугольник не прямоугольный и нельзя использовать одну только теорему Пифагора. Он помогает решать задачи на «угол по сторонам» без построений.

Когда использовать теорему косинусов

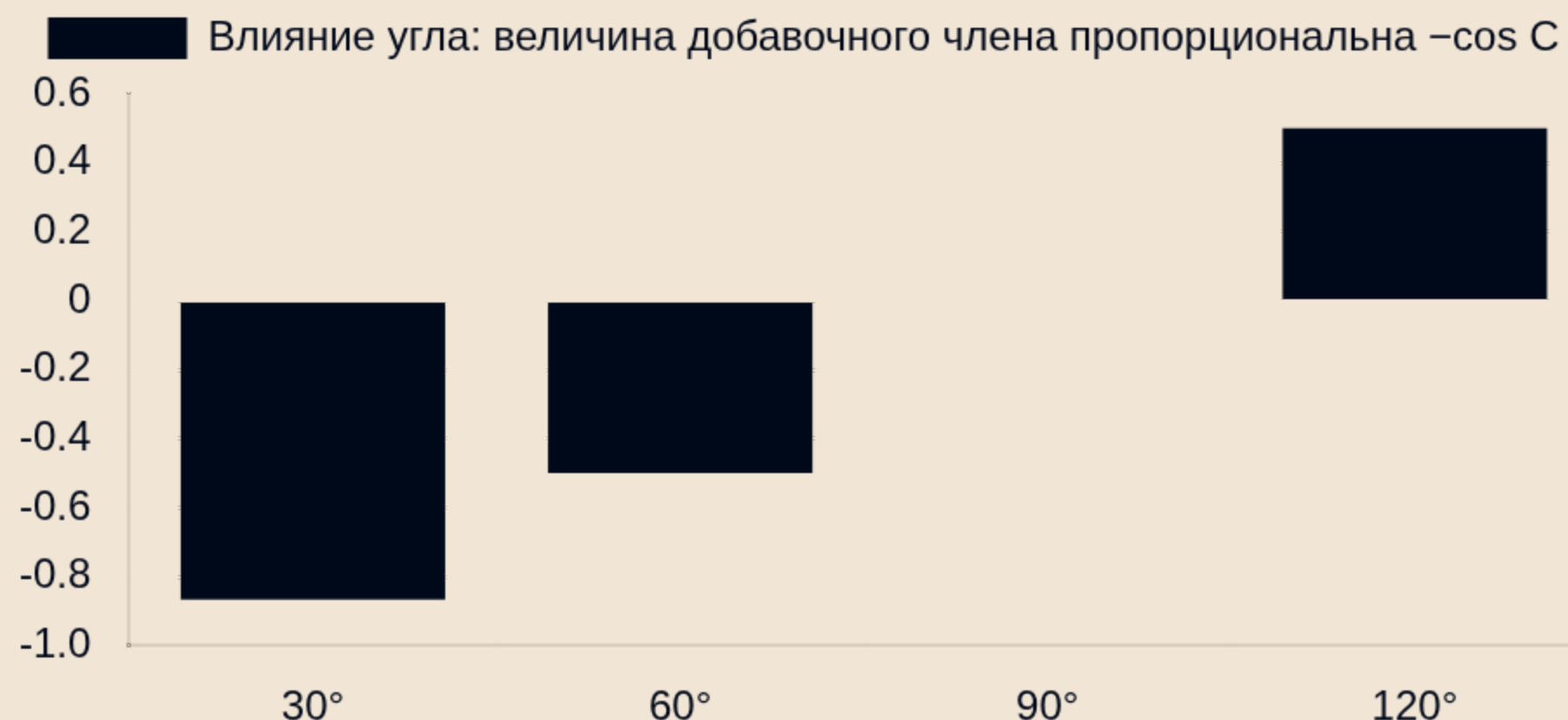
Что известно	Что найти	Основная запись	Удобство
Две стороны и угол между ними	Третью сторону	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$ C	Самая прямая подстановка
Три стороны	Угол	$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$	Находим косинус угла
Прямоугольный треугольник	Любая сторона	Пифагор: при $C = 90^\circ$	Чаще используют теорему Пифагора

Памятка по выбору способа решения:
что известно, что требуется найти и
какая запись теоремы косинусов
удобнее всего.

Теорема косинусов универсальна: по
«две стороны + угол» удобно находить
сторону, по «три стороны» — угол; в
прямоугольном треугольнике выгоднее
Пифагор.

Школьный курс геометрии, 8 класс.

Влияние величины угла на противоположную сторону



При угле $C < 90^\circ$ $\cos C$ положителен, значит вычитаемое в $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$ уменьшается сильнее. При $C > 90^\circ$ знак меняется, и c^2 растёт.

Чем больше угол, тем заметнее противоположная сторона: маленький угол даёт меньшую сторону, тупой — большую. При 90° получается «середина».



Составлено по формуле теоремы косинусов; значения $\cos$: $30^\circ = \sqrt{3}/2$, $60^\circ = 1/2$, $90^\circ = 0$, $120^\circ = -1/2$.

Типичные ошибки при применении формулы

Одна из первых ошибок — брать не тот угол: угол должен лежать между двумя известными сторонами. Если подставить «чужой» угол, знак и величина члена с $\cos$ окажутся неверными.

Забывают знак «минус» перед $2ab \cdot \cos C$, из-за чего квадрат стороны вычисляется неправильно. Ещё опаснее — извлекать корень без контроля: корень берут только из полученного квадрата.

Часто путают обозначения: сторона a соответствует углу A , b — B , c — C . Ошибка в букве ведёт к неправильному соответствию данных и итоговая сторона или угол «не сходится».

Слишком раннее округление тоже мешает: значения $\cos$ и промежуточные произведения лучше хранить в калькуляторе. Округлять стоит лишь в самом конце, чтобы не накапливать погрешность.

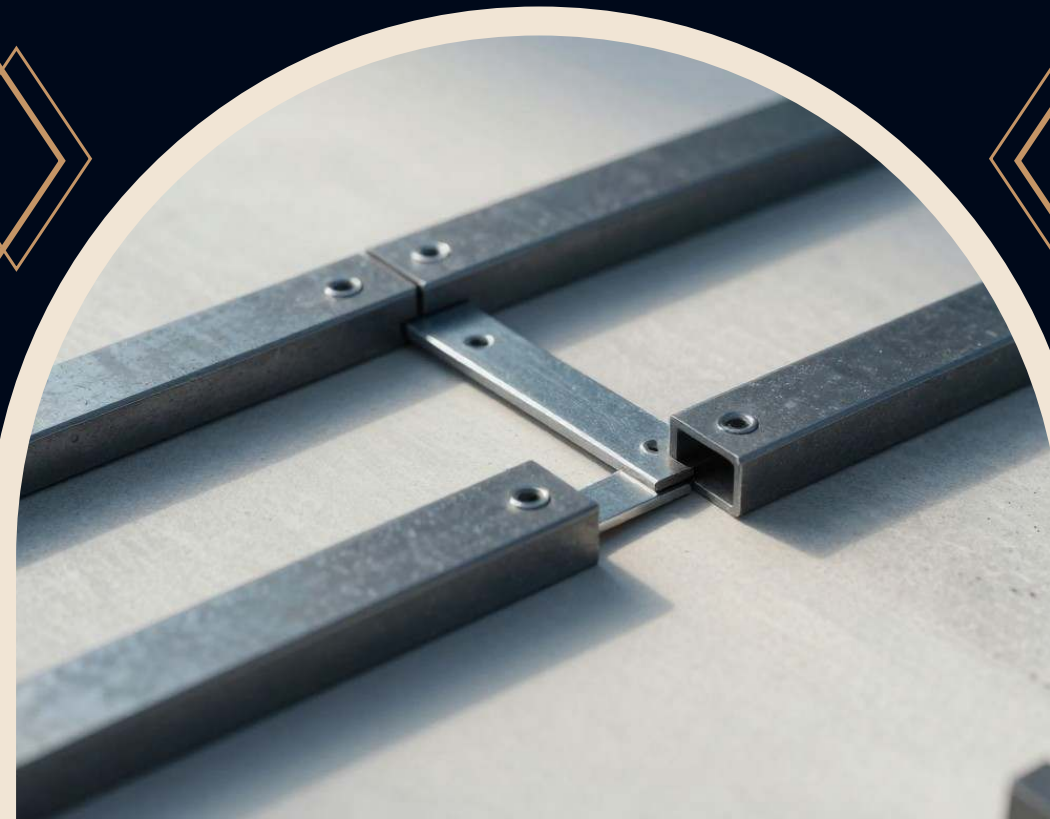


Примеры практического применения



Диагонали в «ломаных» фигурах

В геометрических построениях часто приходится находить длину диагонали треугольника, когда прямого измерения нет. Если известны две стороны и угол между ними, теорема косинусов даёт точный результат для нужного отрезка.



Строительные расчёты по двум сторонам

При проектировании опор и каркасов встречаются «косые» соединения. Когда длина двух элементов известна, а между ними задан угол, формула позволяет вычислить требуемую длину третьей детали без измерения на месте.

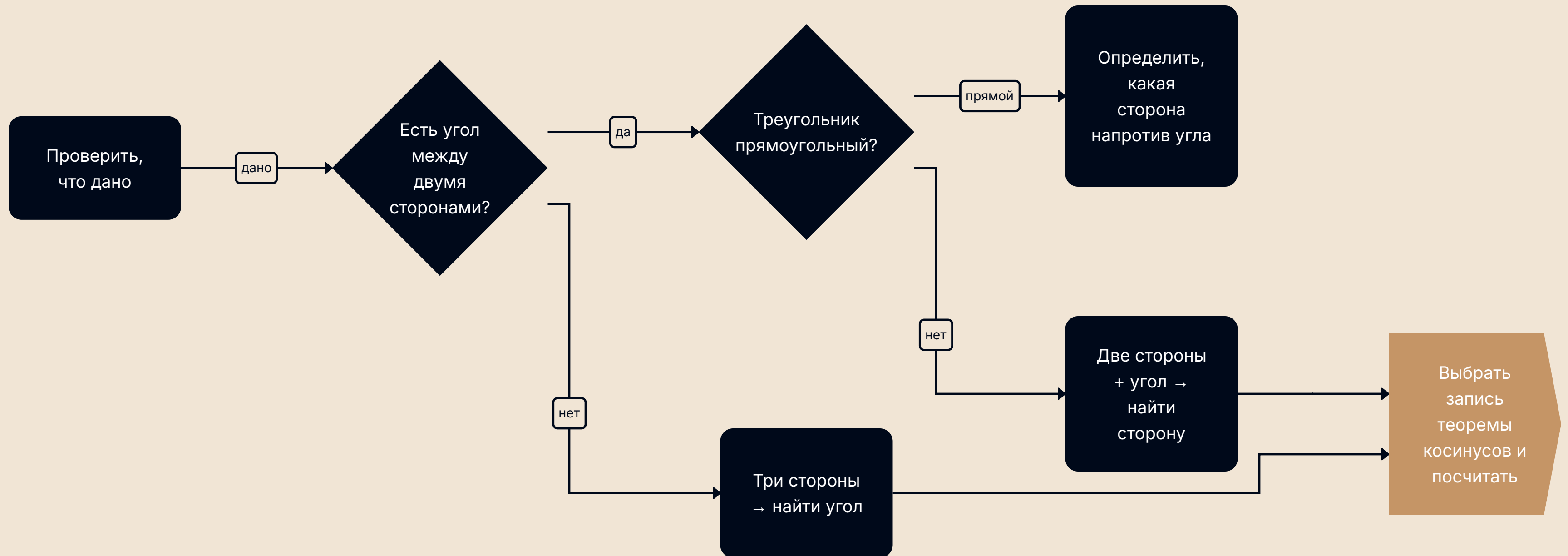


Навигация: расстояние без прямого пути

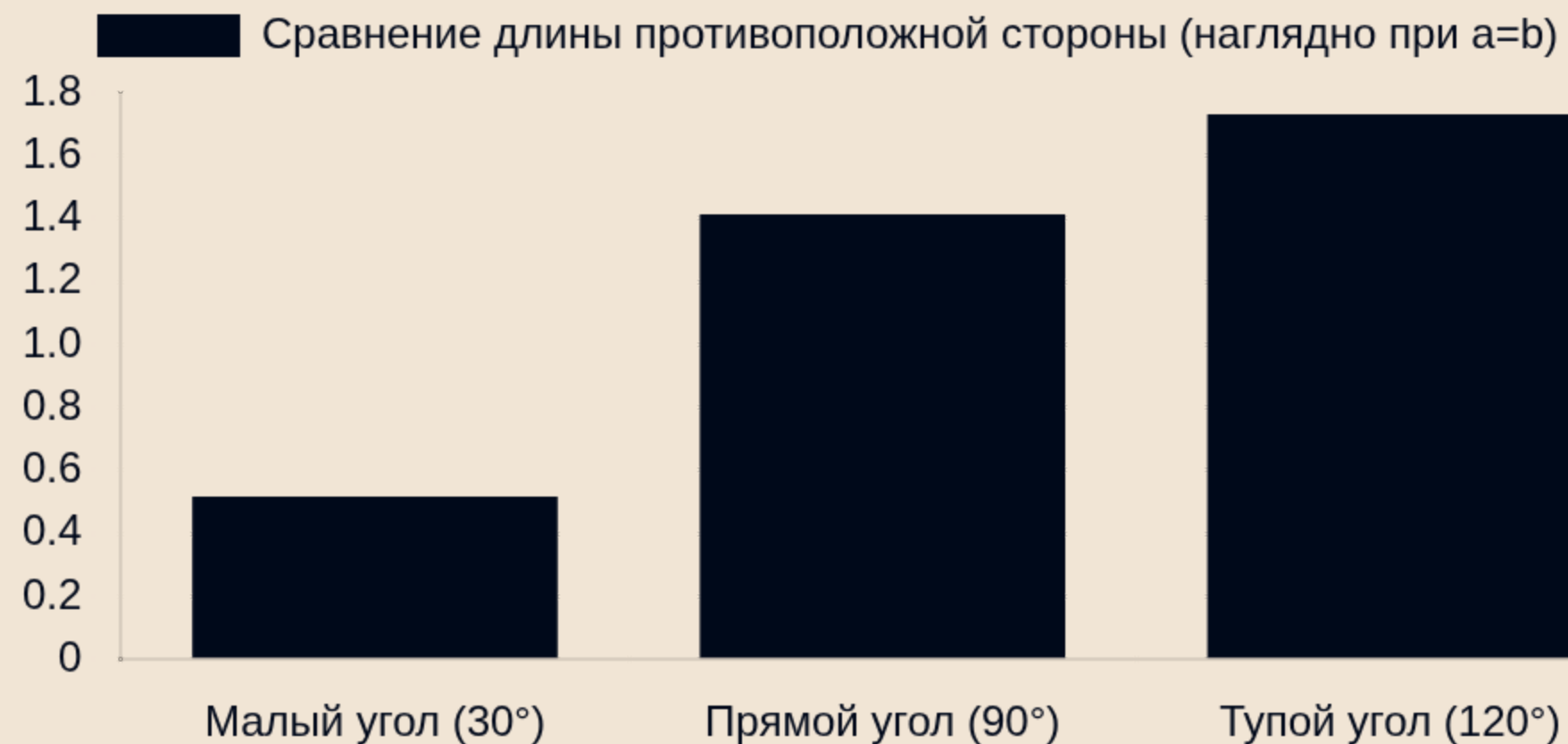
На картах и в задачах навигации точки могут быть соединены «напрямую» только теоретически. Теорема косинусов помогает найти расстояние между точками по треугольнику, если прямое измерение невозможно.

Как выбрать нужную формулу в задаче

Логика выбора зависит от того, какие данные даны: две стороны с углом или три стороны.



Проверка ответа по величине угла



Для быстрой самопроверки можно сравнить результат с ожиданием по углу. Если угол тупой, сторона должна получиться заметно длиннее, чем при 90° .

Смена знака $\cos$ при переходе от острого к тупому углу меняет размер c . Поэтому «разумность» ответа можно оценить ещё до записи финальных вычислений.



Иллюстрация по теореме косинусов; для наглядности условно принято $a=b=1$, $c^2=2-2\cos C$.

Краткая историческая справка

Развитие тригонометрии

Современная запись теоремы косинусов опирается на тригонометрические понятия. Связь углов с алгебраическими выражениями стала возможной благодаря развитию вычислительных методов.

Античность

Идеи, связанные с описанием треугольников через их стороны и углы, встречались задолго до современной формулы. Тогда акцент делали на геометрические рассуждения и вычисления в треугольниках.

Школьная математика

В школьном курсе теорема косинусов рассматривается как ключевой инструмент для произвольных треугольников. Она расширяет способы решения задач за пределы прямоугольных случаев.

Таблица значений косинусов для школьных задач



Угол	cos угла	Знак	Как влияет
0°	1	положительный	вычитаемое больше
60°	1/2	положительный	сильно уменьшает
90°	0	ноль	доп. член исчезает
120°	-1/2	отрицательный	с становится больше

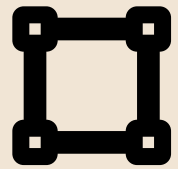
Короткая подсказка, чтобы быстро понимать знак и вклад $\cos C$ в формулу $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$.

Знак $\cos$ определяет поведение противоположной стороны: при $\cos > 0$ она уменьшается, при $\cos = 0$ получается «пифагорово» соотношение, при $\cos < 0$ — увеличивается.



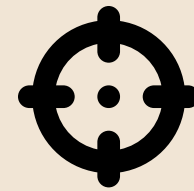
Таблица тригонометрических значений (школьный курс).

Что нужно запомнить по теме



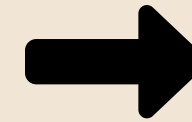
Связь сторон и углов

Теорема косинусов связывает любые стороны треугольника с углом между двумя из них. Благодаря $\cos$ можно перейти от геометрии к вычислениям по формуле.



Два сценария решения

Если известны две стороны и угол между ними — находят третью сторону. Если даны три стороны — находят угол через $\cos C$ и затем определяют сам угол.



Связь с прямоугольным треугольником

При угле 90° дополнительный член с $\cos$ обращается в ноль, и формула превращается в теорему Пифагора. Значит, она действительно работает для любых треугольников.



Проверка «здоровым смыслом»

По величине угла легко понять, должна ли сторона увеличиваться или уменьшаться. Такой контроль помогает заметить грубую ошибку ещё до финальной записи ответа.



Итог: универсальная формула для треугольников

Теорема косинусов делает любой треугольник удобным для вычислений, даже без прямого угла. Она объединяет геометрию и тригонометрию, помогает решать задачи и проверять ответы логикой.

