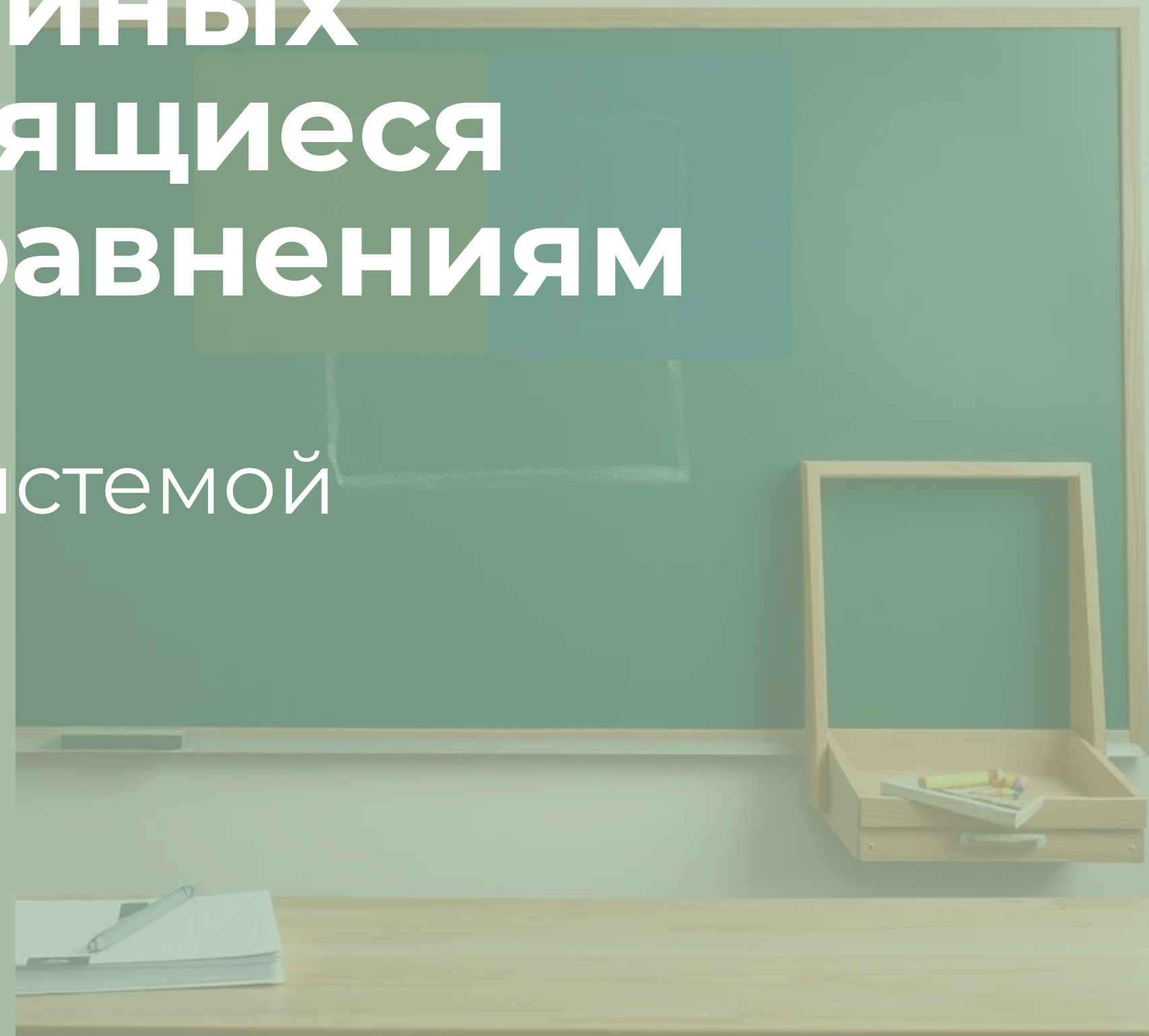


Системы нелинейных уравнений, сводящиеся к квадратным уравнениям

Как увидеть квадрат за системой уравнений?





Зачем это нужно в 8 классе

Эта тема показывает, как сложная система превращается в знакомое квадратное уравнение. Здесь пригодятся подстановка, теорема Виета и проверка корней — навыки, которые помогают решать задачи аккуратно и уверенно.

Какие системы сводятся к квадратным уравнениям

01 Одна переменная легко выражается
Если в одном уравнении удобно выразить y через x или наоборот, подстановка быстро сокращает систему до одного уравнения второй степени.

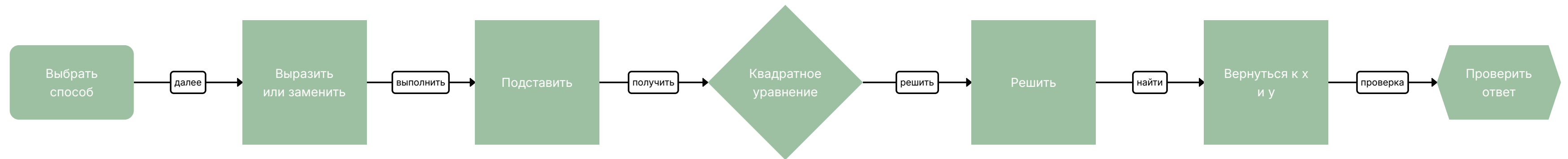
02 Есть сумма и произведение
Когда встречаются выражения $x+y$ и xy , их можно использовать как готовые данные для составления квадратного уравнения с нужными корнями.

03 Повторяется одно и то же выражение
Если в обеих частях системы много раз встречается одинаковая запись, её удобно заменить буквой t , чтобы упростить преобразования и вычисления.

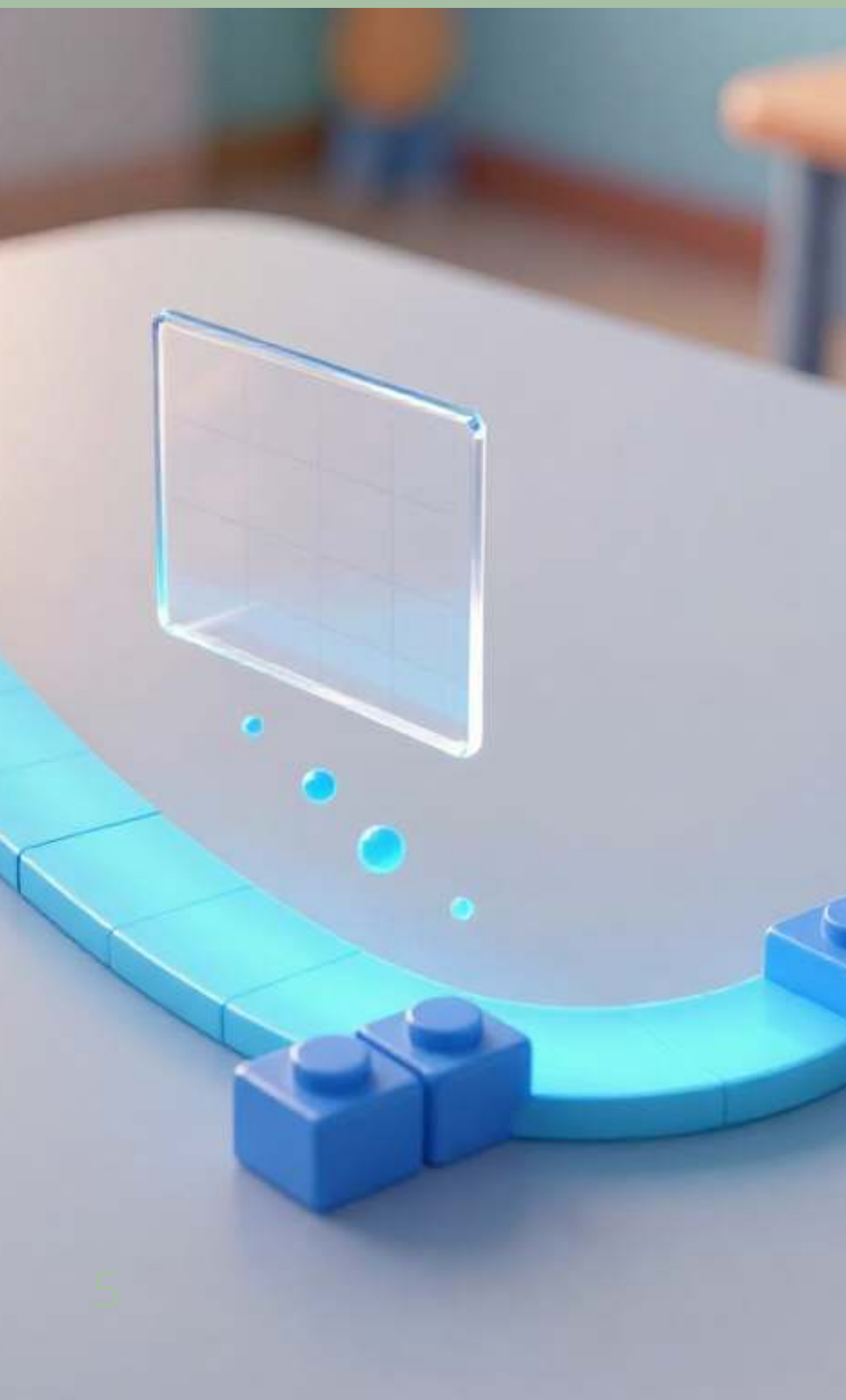
04 После преобразований остаётся квадратное уравнение
В итоге получается уравнение вида $ax^2+bx+c=0$ или уравнение для новой переменной, которое решается знакомыми способами.

Как решать такую систему

Путь от исходной системы к квадратному уравнению и обратно к ответу



Подстановка на простом примере



Когда y уже
выражено

Если одно уравнение сразу даёт $y=x+1$, не нужно искать сложный путь. Достаточно заменить y в другом уравнении и получить выражение только с x , которое уже решается как обычное квадратное уравнение.



От двух переменных
к одной

После подстановки $x^2+y^2=25$ превращается в $x^2+(x+1)^2=25$. Теперь система исчезает, а остаётся одно уравнение, где нужно только аккуратно раскрыть скобки и привести подобные члены.

3 шага

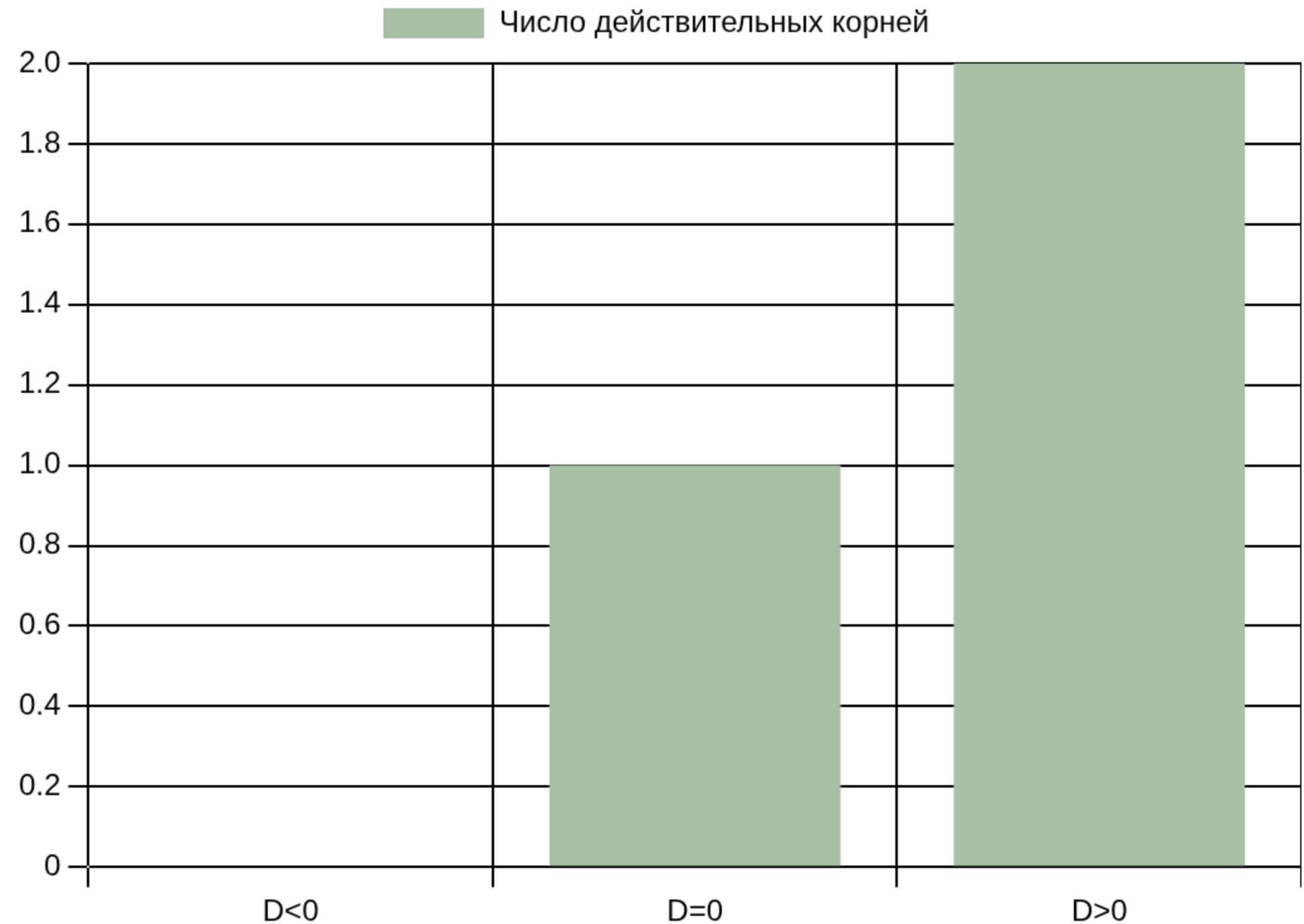
обычно достаточно,
чтобы из системы
получилось уравнение
второй степени.

Сначала раскрывают скобки, затем
переносят всё в одну часть
и собирают подобные слагаемые.

Связь дискриминанта и числа решений

Дискриминант помогает заранее понять, сколько корней имеет квадратное уравнение, ещё до полной записи ответа.

Чем больше дискриминант, тем больше действительных корней; но после проверки их число в исходной системе может уменьшиться.



Формула дискриминанта квадратного уравнения



Три способа свести систему к квадратной

Сравнение основных приёмов решения.

Выбор способа зависит от записи системы: чем заметнее повтор или простая связь между переменными, тем быстрее получается квадратное уравнение.

Способ	Когда удобен	Что получается
Подстановка	Одну переменную легко выразить	Уравнение второй степени
Замена переменной	Повторяется одно выражение	Квадратное уравнение для t
Сумма и произведение	Известны $x+y$ и xy	Уравнение для корней

Метод замены переменной



Упростить запись

Когда одно и то же выражение повторяется несколько раз, его заменяют буквой t . Так система становится короче, а вычисления — понятнее и аккуратнее.



Получить новое уравнение

После замены часто возникает обычное квадратное уравнение относительно t . Его решают привычными способами, не отвлекаясь на длинные исходные выражения.



Вернуться к исходным переменным

Найдя t , выполняют обратную замену и восстанавливают значения x и y . Затем обязательно проверяют, подходят ли они обеим строкам системы.

Система с суммой и произведением

01 Из суммы и произведения

Если известны $x+y$ и xy , то эти числа можно рассматривать как корни квадратного уравнения. Это превращает систему в знакомую задачу на поиск корней.

02 Составить уравнение

При $s=7$ и $p=10$ получаем $z^2-7z+10=0$. Такое уравнение удобно решать разложением на множители, а не длинными вычислениями.

03 Записать ответ системы

Корни равны 2 и 5, значит исходная система имеет пары (2; 5) и (5; 2). Порядок не важен, потому что сумма и произведение остаются теми же.



Проверка корней обязательна

■ Сверяем каждый ответ

Найденные значения нужно подставить в оба исходных уравнения, а не только в преобразованное. Так сразу видно, какие корни действительно удовлетворяют системе и не были получены случайно после преобразований.

■ Особенно после преобразований

Проверка обязательна, если в решении было возведение в квадрат, деление на выражение или замена переменной. Эти шаги могут изменить множество решений и привести к появлению лишних корней.

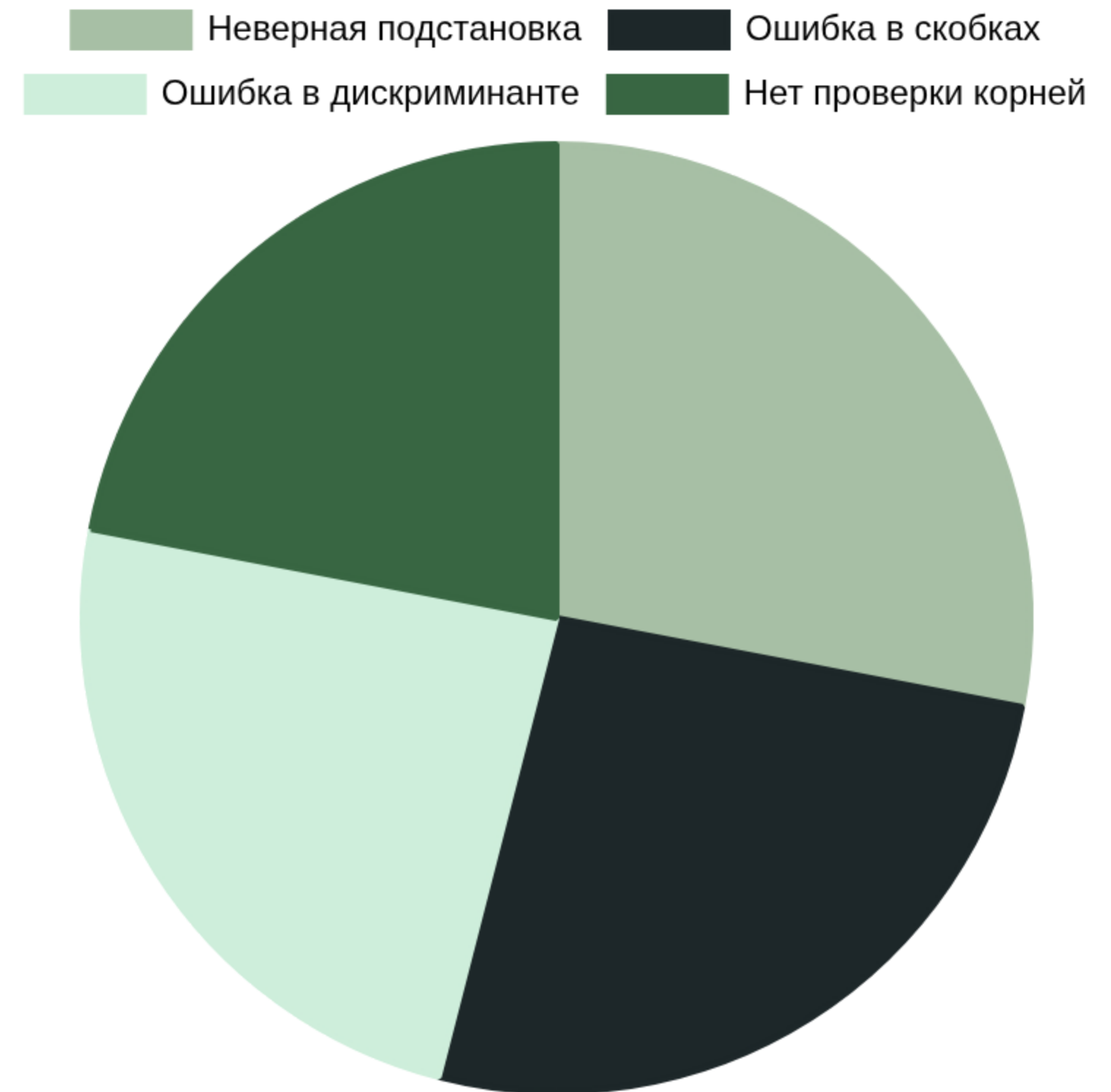
■ Посторонний корень

Посторонним называют корень, который подходит для полученного уравнения, но не подходит для исходной системы. Такой ответ нельзя записывать, даже если он найден правильно по формуле или разложению на множители.

Где чаще всего возникают ошибки

Чаще всего трудности появляются не в самой идее решения, а в аккуратности вычислений и проверке. Именно поэтому полезно проходить систему по шагам.

Все четыре причины ошибок связаны с внимательностью: достаточно одной неточности, чтобы получить неверный ответ. Проверка и запись каждого шага заметно снижают риск.



Обобщение типичных ошибок при решении систем нелинейных уравнений, 8 класс.

Пример решения системы через сумму и произведение

01 1. Записываем данные

Из условий сразу видим сумму и произведение: $x+y=7$ и $xy=10$. Это удобный случай, когда числа можно искать через квадратное уравнение для неизвестного z .

02 2. Составляем уравнение

По связи суммы и произведения получаем $z^2-7z+10=0$. Здесь z играет роль одного из корней, а коэффициенты уравнения показывают, как связаны оба числа системы.

03 3. Находим корни

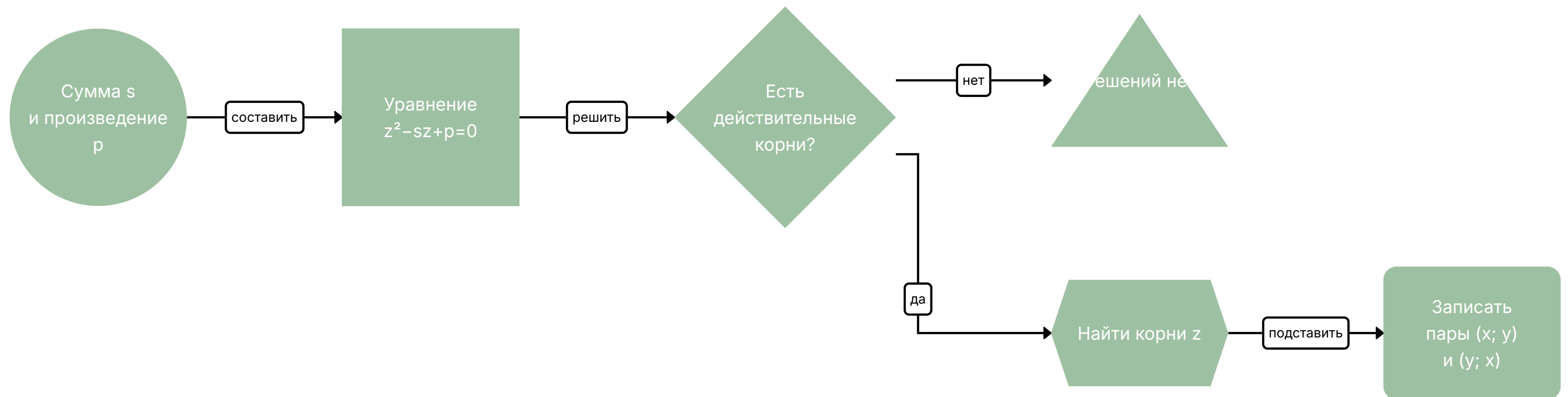
Разложим на множители: $(z-2)(z-5)=0$. Отсюда $z=2$ или $z=5$, значит, подходящие числа — 2 и 5 в любом порядке.

04 4. Записываем ответ

Итак, исходная система имеет две пары решений: (2; 5) и (5; 2). Этот пример показывает, как быстро работает теорема Виета, когда известны сумма и произведение.

От суммы и произведения к ответу

Схема показывает, как данные о корнях превращаются в квадратное уравнение, а затем — в пары решений системы.



От линейного уравнения к квадратному

1. Выбираем опору

Сначала удобно взять линейное уравнение: из него легко выразить одну переменную и сократить запись. Это помогает быстрее перейти к одному неизвестному.

3. Возвращаемся к ответу

Решив уравнение, находят значения переменных и проверяют их в исходной системе. Такой способ особенно часто встречается в задачах про стороны, периметр и площадь.

2. Подставляем выражение

Затем найденное выражение подставляют в уравнение с квадратами. После раскрытия скобок и приведения подобных членов получается квадратное уравнение.

Пошаговая схема решения

Шаг	Действие	Результат
1	Выбрать уравнение	Удобный путь
2	Выразить или ввести t	Одна переменная
3	Составить квадратное	Одно уравнение
4	Решить его	Корни
5	Подставить назад	Проверка
6	Записать ответ	Подходящие решения

Короткая схема помогает не пропустить ни одного действия и не потерять найденные корни.

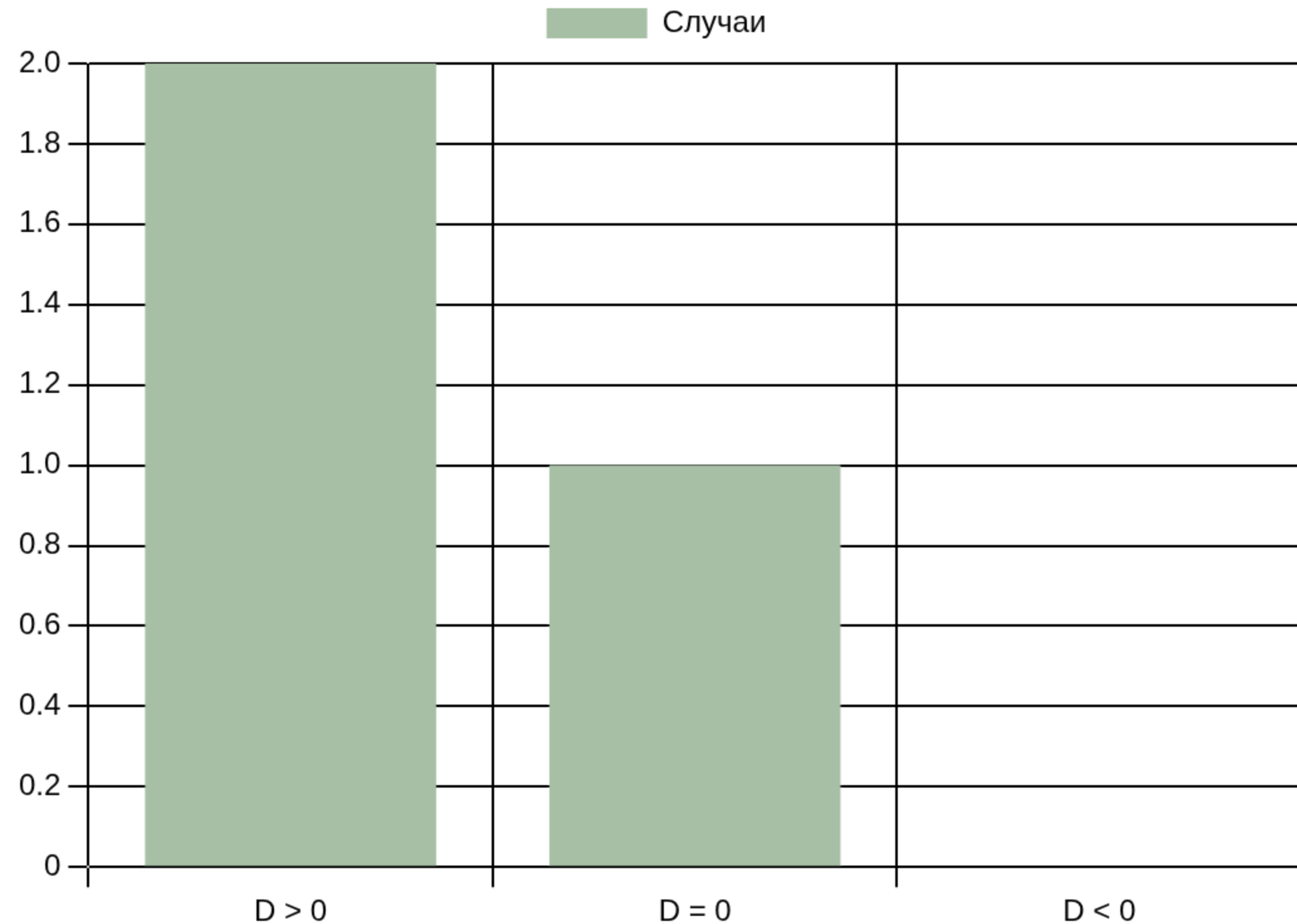
Успех решения зависит от последовательности: сначала упрощение, затем вычисления, потом обязательная проверка. Пропуск любого шага может привести к лишнему или неверному ответу.

Обобщённый алгоритм решения систем, сводящихся к квадратному уравнению.

Как число решений связано с графиком

Графическая картина помогает понять, почему квадратное уравнение может иметь два, одно или ни одного действительного корня. Это напрямую связано с положением графиков.

Чем больше точек пересечения, тем больше действительных решений. Если общих точек нет, алгебраический результат тоже даёт отсутствие действительных корней.



Связь дискриминанта квадратного уравнения с числом действительных корней.

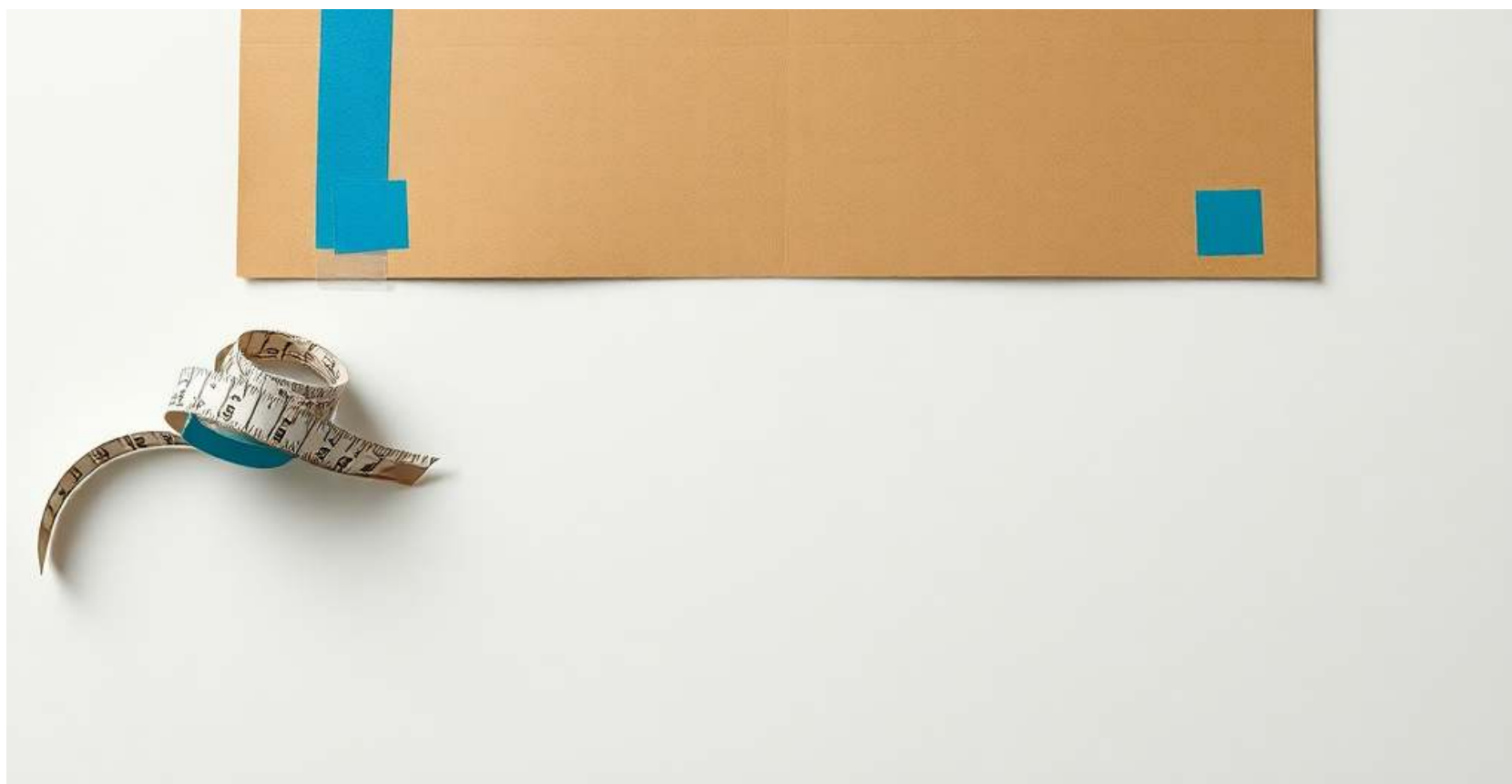
Задача из практики: прямоугольник и его размеры

Стороны в одной переменной

В практической задаче длину и ширину удобно обозначить через одну переменную. Тогда по формуле периметра и по условию площади получается система, которую можно свести к квадратному уравнению. На чертеже сразу видны обе стороны и их связь.

Почему это полезно

Такие задачи учат переводить текст в алгебру: сначала записать формулы, потом выразить неизвестные и проверить найденные размеры. Именно поэтому прямоугольник — один из самых удобных примеров для отработки темы.



Что нужно запомнить перед самостоятельной работой

01 1. Найти удобный путь

Сначала посмотрите, что проще: подстановка, замена переменной или связь суммы и произведения. Правильный выбор способа экономит время и делает решение гораздо короче.

02 2. Дойти до квадратного

После преобразований должна получиться знакомая форма с одним неизвестным второй степени. Затем используйте разложение на множители или дискриминант, чтобы найти корни без лишних шагов.

03 3. Обязательно проверить

Последний шаг нельзя пропускать: подставьте найденные значения в исходную систему. Только ответы, которые подходят обоим уравнениям, можно считать верными.

Главное о системах, сводящихся к квадратным

Сегодня мы увидели, что сложную систему можно упростить до квадратного уравнения с помощью подстановки, замены переменной или связи суммы и произведения. Главное — решать аккуратно и обязательно проверять ответы.