

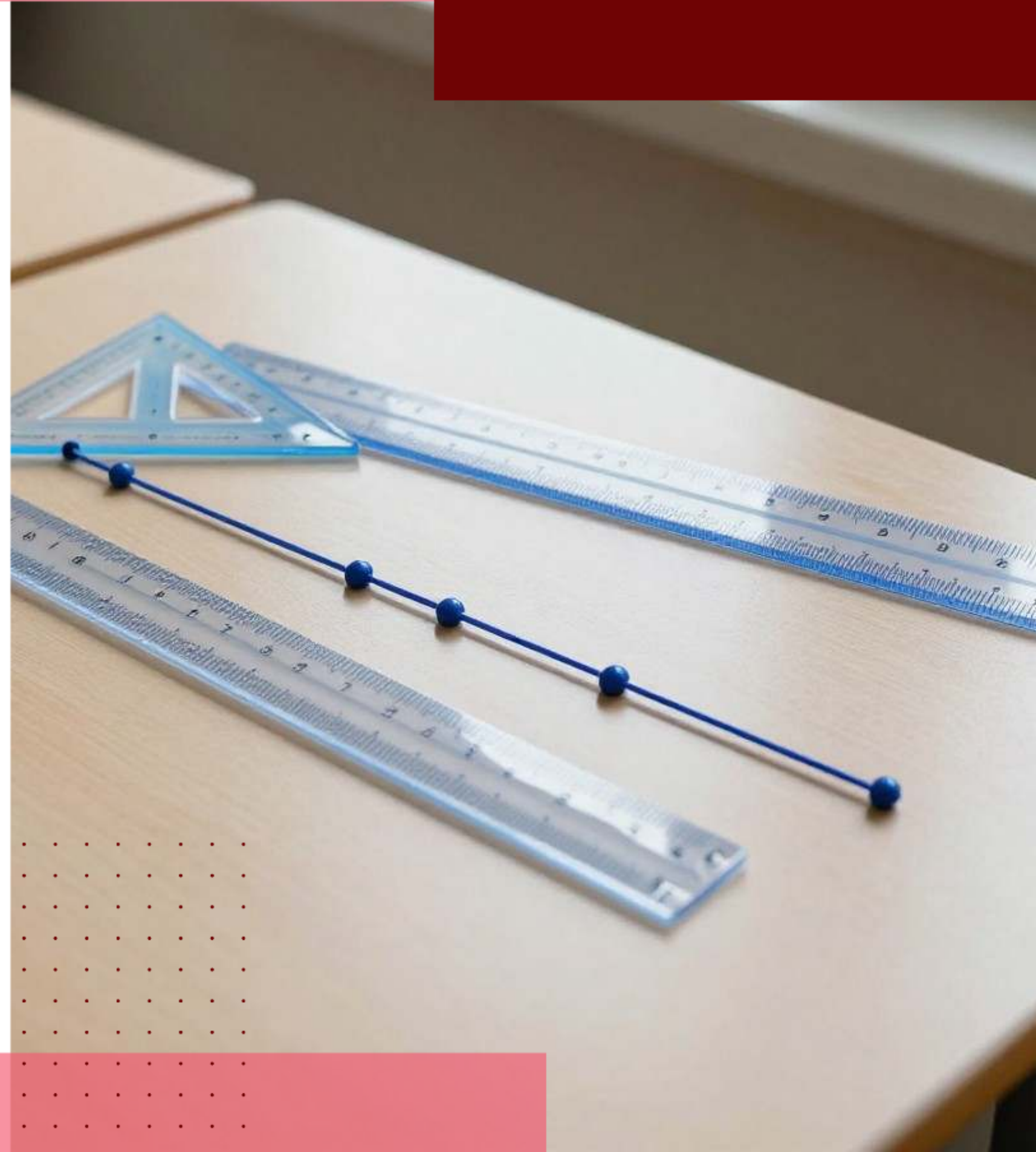
Пропорциональные отрезки в геометрии

Отношения длины приводят к точным ответам в задачах.



Зачем нужны пропорции

Пропорции помогают сравнивать длины, читать масштаб и решать геометрические задачи. Сегодня мы научимся понимать запись отношений, делить отрезок на части и использовать параллельные прямые в треугольнике.



Отношение и пропорция на отрезках

Что сравнивают

Если два отрезка соотносятся одинаково с другими, их называют пропорциональными. Это значит, что важна не только длина, но и сравнение одной длины с другой через отношение.

Одинаковое отношение

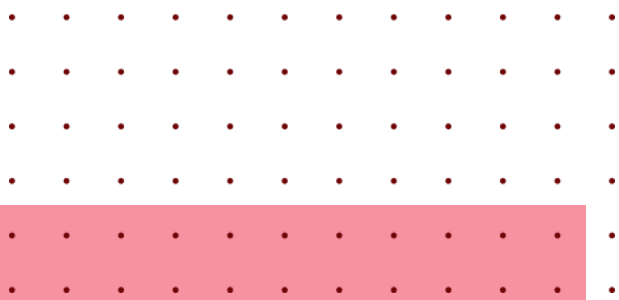
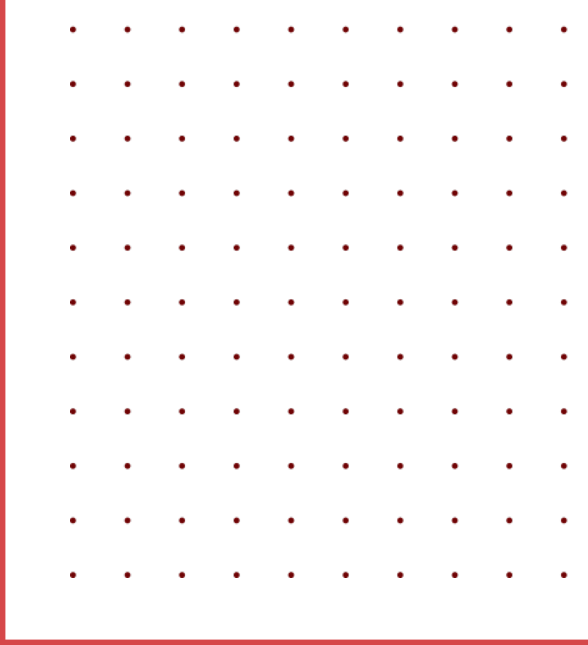
Запись 2:4 и 3:6 описывает один и тот же тип сравнения. В обоих случаях первая длина вдвое меньше второй, поэтому отношения можно сокращать до одинакового вида.

Запись пропорции

Пропорция записывается как $a/b = c/d$. Она показывает, что две пары величин сохраняют одно и то же соотношение, а значит, могут быть связаны одной геометрической ситуацией.

Практический смысл

Для отрезков это особенно удобно: можно сравнивать не сами числа, а их связь. Так проще находить неизвестную длину, если известны другие части целого отрезка.





2/3

**показывает, что один
отрезок короче другого
на треть.**

Пример из условия

Когда длины сравнивают, важна не только разница
в сантиметрах, но и их соотношение.

Деление отрезка в заданном отношении

Две части одного отрезка

Точка D разбивает отрезок AB на две части: AD и DB. Вместе они составляют весь отрезок, поэтому любая часть должна согласовываться с общей длиной и заданным отношением.

Считаем доли

Если отношение равно 2:3, это значит, что первая часть занимает две доли, а вторая — три доли. Всего получается пять равных долей, из которых складывается весь отрезок.

Переходим к длинам

Зная общую длину, можно сразу понять, сколько сантиметров приходится на одну долю. После этого легко найти обе части и проверить, совпадает ли их сумма с исходным отрезком.

Формула точки деления

1. Записываем отношение

Сначала обозначают отношение $AD:DB$ как $m:n$. Эти буквы показывают, сколько долей получает каждая часть отрезка, но сами длины ещё не известны.

2. Общее число долей

Затем находят, сколько долей всего содержит отрезок AB . Это сумма $m+n$, и именно она связывает условие задачи с полной длиной.

3. Получаем ответ

После этого длины частей вычисляют по формулам $AD = AB \cdot m / (m+n)$ и $DB = AB \cdot n / (m+n)$. Так отношение сразу превращается в конкретные сантиметры.

Пример 1: найти длины частей



1.

Считываем условие

Дано: $AB = 15$ см, а отношение $AD:DB$ равно $2:3$. Сначала нужно понять, сколько всего долей содержит весь отрезок, чтобы распределить длину правильно.

2.

Находим одну долю

Всего получается $2 + 3 = 5$ долей. Тогда одна доля равна $15 / 5 = 3$ см, и это ключ к вычислению обеих частей.

3.

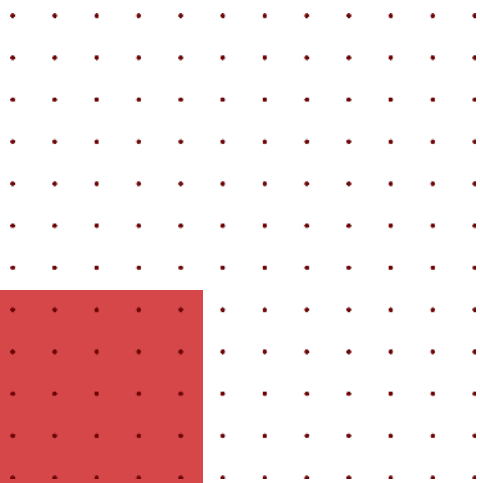
Вычисляем части

Первая часть равна $2 \cdot 3 = 6$ см, а вторая — $3 \cdot 3 = 9$ см. Каждая длина соответствует своему числу долей, поэтому ответ получается без догадок.

4.

Проверяем результат

Проверка показывает: $6 + 9 = 15$ см, а отношение $6:9$ сокращается до $2:3$. Значит, решение верно и полностью согласуется с условием.



Пример 2: найти отношение по длинам

1. Смотрим на части

Известно, что $AD = 4$ см и $DB = 10$ см. Нужно не искать длины, а понять, какое отношение образуют эти части одного отрезка.

2. Сокращаем пропорцию

Записываем отношение $4:10$ и сокращаем его до $2:5$. Так видно, что в задаче важна не абсолютная длина, а соотношение частей.

3. Связываем с целым

Если весь отрезок равен 14 см, то точка D делит его в отношении $2:5$. Это помогает сразу видеть структуру отрезка и использовать её в новых задачах.

Главные ловушки



Не путать с равенством

Пропорция не означает равенство частей. При отношении 1:3 одна часть лишь в три раза меньше другой, а не равна ей или отличается на 3 сантиметра.



Не путать с суммой

Важно отличать отношение от разности и суммы. Запись 1:3 не говорит, что части складываются в 4 см, пока не известна общая длина отрезка.



Проверка ошибки

Перед ответом всегда проверяй смысл чисел. Если получилась часть больше целого, значит, отношение или вычисления были записаны неверно.

История о параллельной прямой

Параллель внутри треугольника

В треугольнике рисуют отрезок, параллельный одной стороне, и сразу появляются два похожих по форме треугольника. Их стороны соотносятся одинаково, поэтому по одной известной длине можно найти другую без лишних построений.



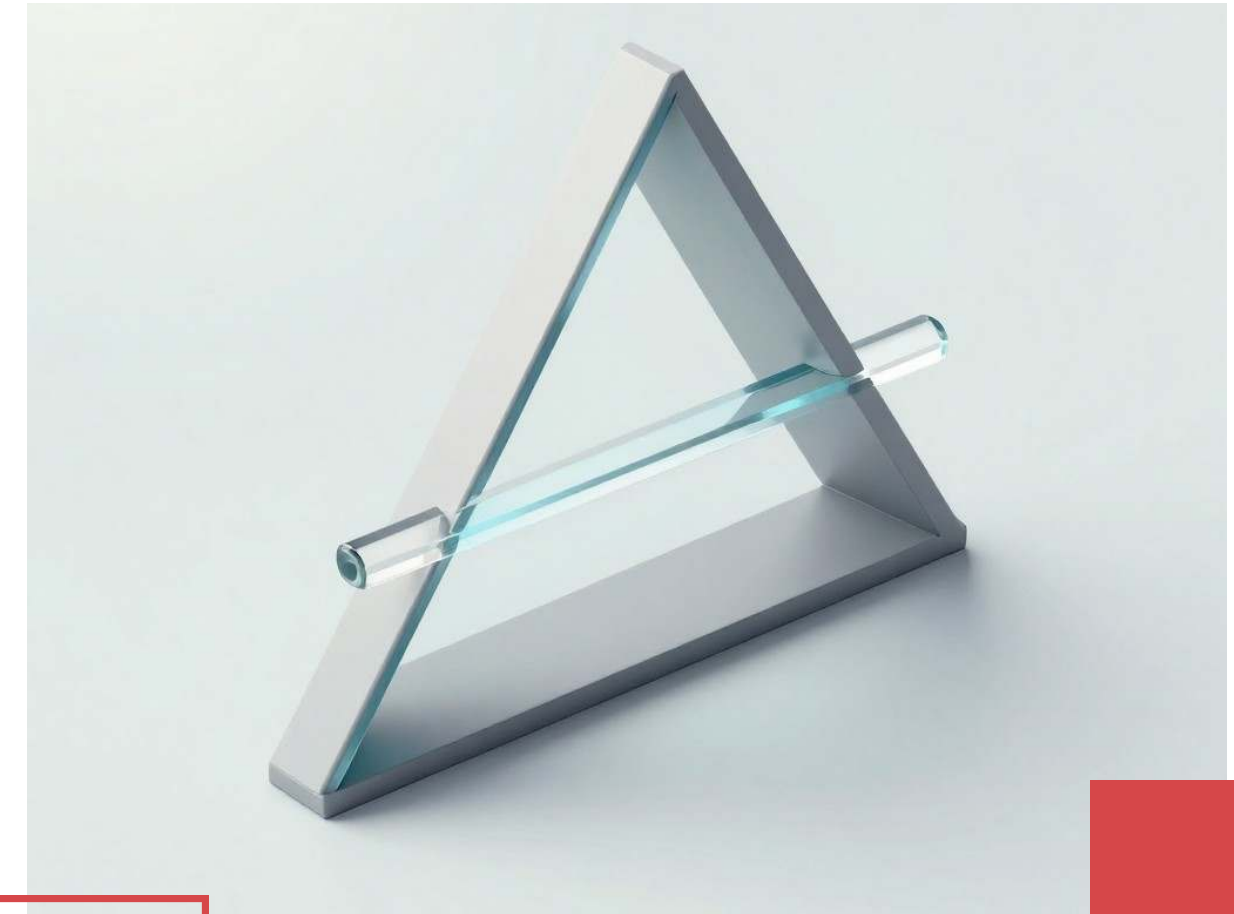
Измерения на сторонах

На чертеже это выглядит как простая линия, но за ней скрывается строгая связь между частями сторон. Если измерить отрезки на двух боковых сторонах, можно записать пропорцию и вычислить неизвестный кусок.



От рисунка к ответу

Такой приём особенно полезен в задачах, где даны не все длины, а только часть рисунка. Параллельная прямая превращает геометрическую схему в набор связанных отношений, которые удобно проверять и использовать.



Теорема о пропорциональных отрезках

1.

Параллельность и отношения

Теорема связывает параллельность с отношениями на сторонах треугольника. Если через точки D и E проведена прямая, параллельная BC, то соответствующие части сторон оказываются пропорциональными.

2.

Равные углы

Из-за равных углов при пересечении параллельных прямых секущими получаются одинаковые углы в двух треугольниках. Это и создаёт нужные пропорции между сторонами большого и малого треугольника.

3.

Что даёт теорема

Поэтому можно находить неизвестные длины не измерением, а вычислением. Достаточно знать одну сторону, часть другой стороны и факт параллельности, чтобы восстановить остальные отрезки.

Пример 3: применяем теорему

1. Дано

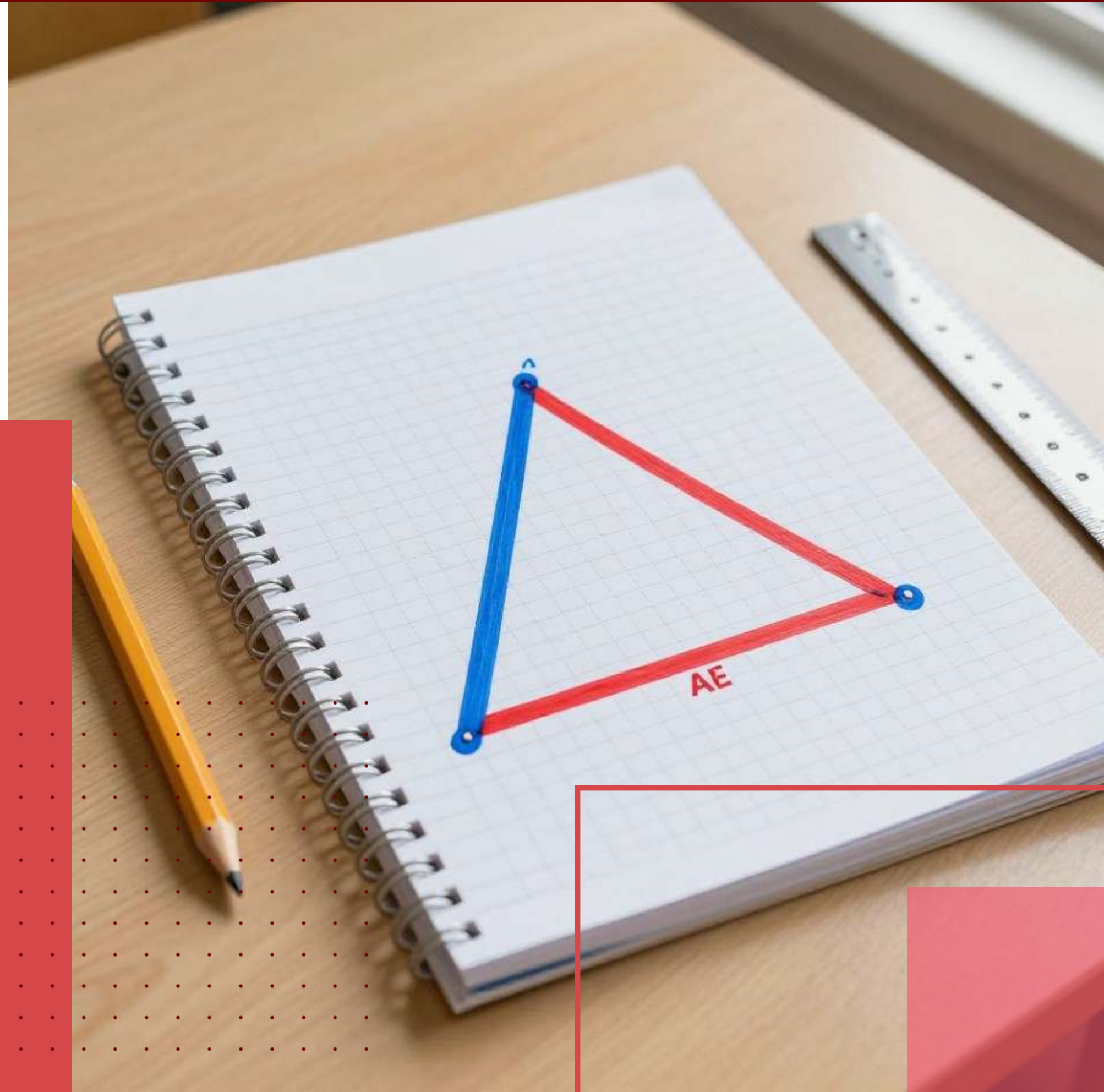
Рассмотрим треугольник ABC, где DE параллельна BC. Известно, что $AD = 4$, $DB = 6$ и $AE = 5$. Нужно найти длину EC, используя пропорцию частей сторон.

2. Составляем пропорцию

Записываем отношение соответствующих отрезков: $AD/DB = AE/EC$. Подставляем числа: $4/6 = 5/EC$. После преобразования получаем $EC = 7,5$ см.

3. Проверяем ответ

Проверка проста: если $EC = 7,5$, то $5:7,5 = 4:6$. Значит, найденное значение согласуется с условием и соответствует теореме о пропорциональных отрезках.



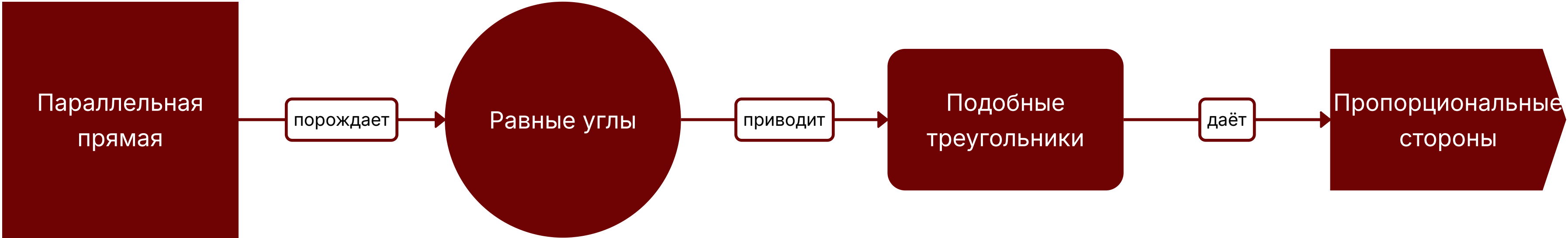
Откуда берётся пропорция

Последовательность показывает, как параллельность приводит к пропорциональным отношениям сторон.



Связь с подобными треугольниками

Схема показывает логическую цепочку, из которой выводится формула пропорций без лишнего запоминания.



Практика А: деление отрезка

А1

Для $AB = 12$ см и отношения 1:2 вся длина делится на три равные доли. Одна доля равна 4 см, значит части составляют 4 см и 8 см.

А2

При $AB = 21$ см и отношении 2:5 сначала находим сумму долей: 7. Одна доля равна 3 см. Тогда отрезки равны 6 см и 15 см.

А3

Если $AD = 3$ см и $DB = 9$ см, отношение частей равно 3:9, то есть 1:3. После сокращения легко увидеть, как распределяются доли отрезка.



Практика В: параллель в треугольнике

В1

В задаче В1 используем пропорцию $AD/DB = AE/EC$. Подставляем значения $3/5 = 6/EC$ и находим $EC = 10$ см. Здесь важно не перепутать соответствующие части.

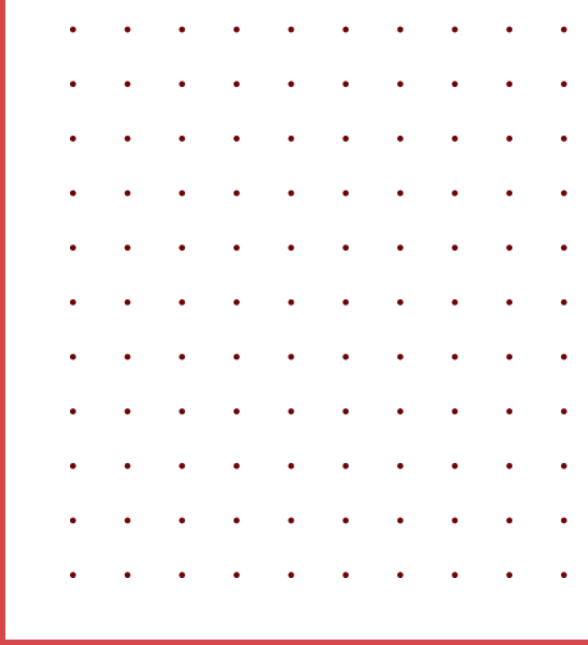
В2

В задаче В2 отрезок $AB = 10$, а $AD = 4$. Значит, коэффициент деления равен $4:10$, или $2:5$ после сокращения. Это и есть искомое отношение.

В3

В задаче В3 полезно сначала найти, какие стороны соответствуют друг другу. Затем записать пропорцию по рисунку и проверить, что все значения согласуются с параллельностью.

Находим неизвестное отношение

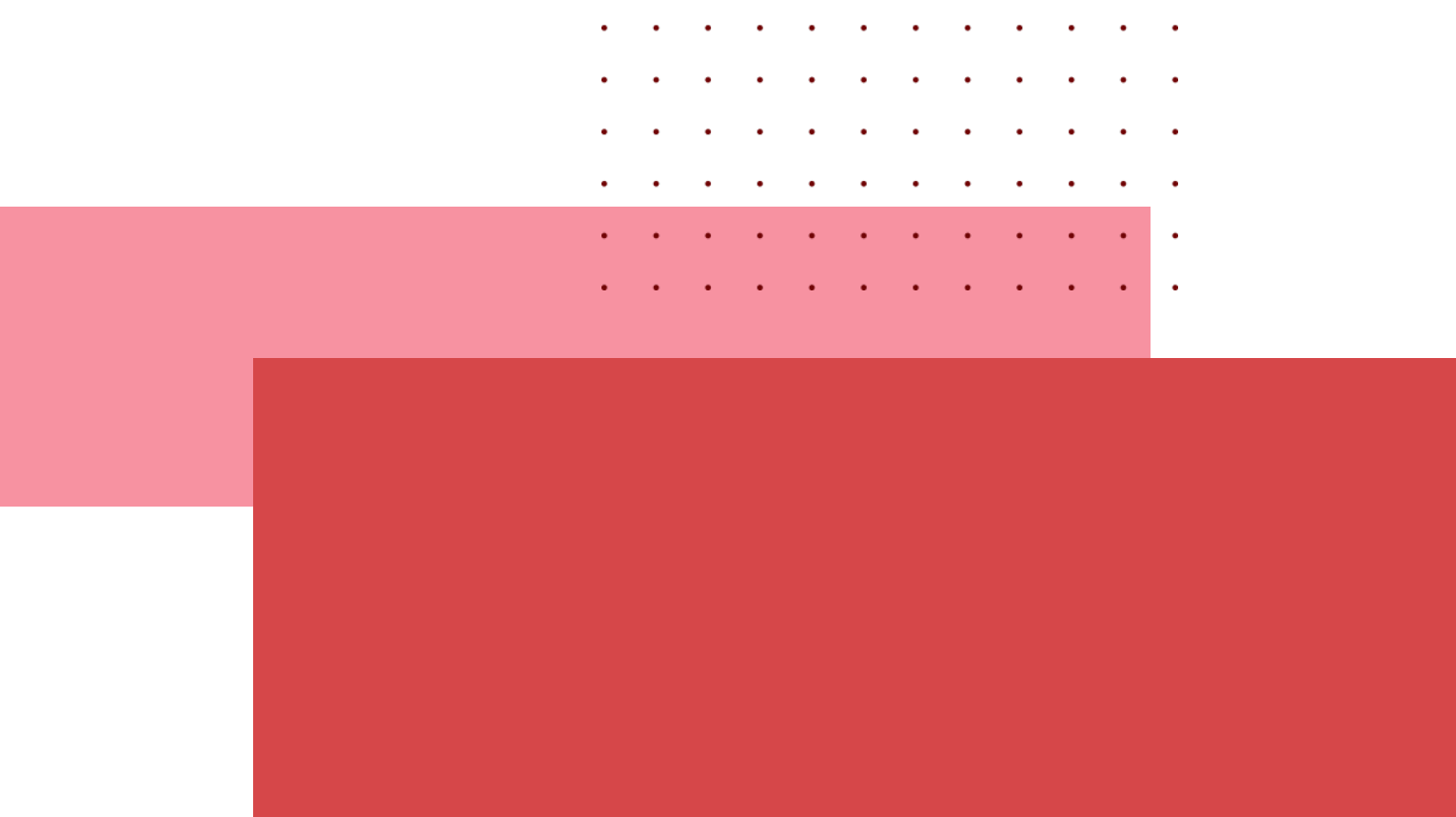


Разность частей

Если одна часть на 7 см больше другой, удобно обозначить меньшую часть за x , а большую за $x + 7$. Затем составляют уравнение по сумме и находят отношение.

Сумма и доли

Когда сумма частей равна 20 см, а отношение 3:7, всего получается 10 долей. Одна доля равна 2 см, поэтому части равны 6 см и 14 см.



Проверка смысла ответа



Единицы измерения

Проверьте, совпадают ли единицы измерения. Если в задаче нужны сантиметры, а в ответе получилось число без единиц или другие величины, решение надо пересмотреть.



Сумма частей

Сложите найденные части и сравните с целым отрезком. Если сумма не совпадает, где-то допущена ошибка в пропорции, вычислениях или сокращении отношения.



Здравый смысл

Оцените, правдоподобен ли результат. Часть отрезка не может быть больше целого, а при отношении 1:3 одна часть должна быть заметно меньше другой.

Где это встречается в жизни

Масштаб

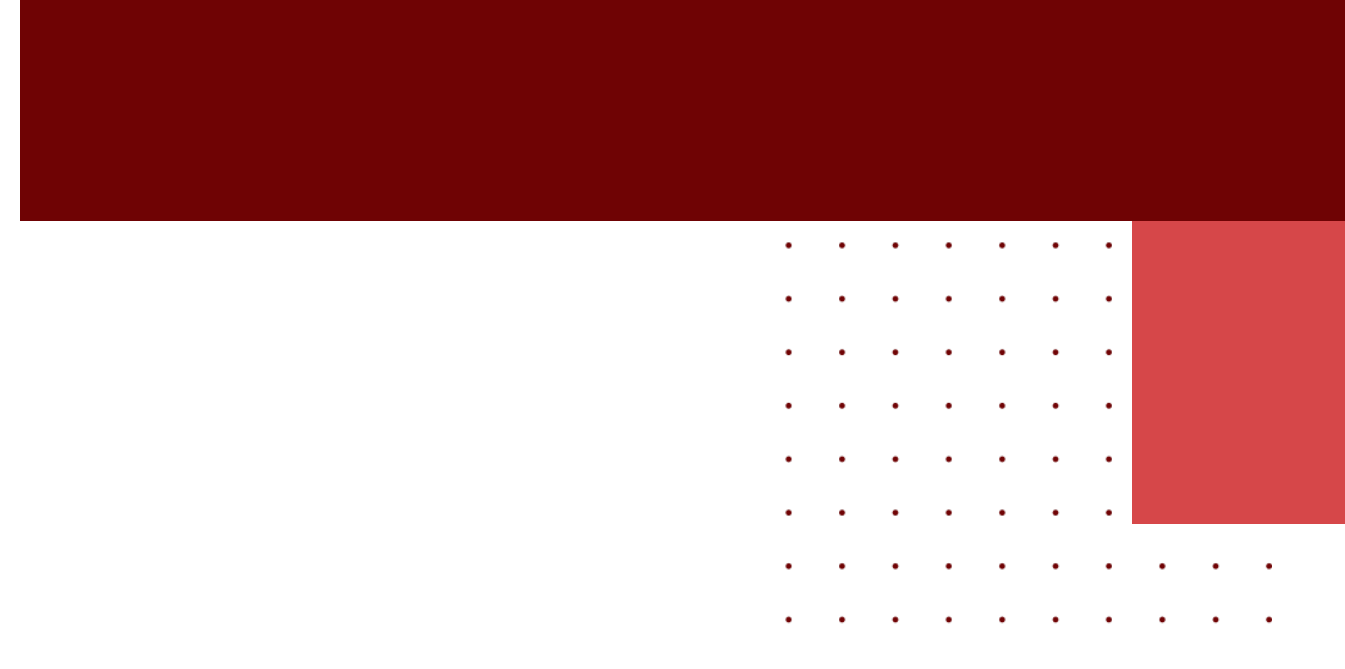
На картах и планах используют постоянный масштаб: один сантиметр на листе соответствует определённому числу метров или километров на местности. Это прямое применение пропорций.

Чертежи и планы

В чертежах и схемах важно сохранять отношения длин, чтобы объект можно было точно восстановить. Поэтому одинаковый коэффициент пересчёта используется для всех отрезков.

Похожие фигуры

Похожие фигуры тоже строятся на пропорциях: если форма сохраняется, то соответствующие стороны меняются в одном и том же отношении. Это помогает сравнивать размеры без лишних измерений.



Итоги: что уже умеем

Теперь вы умеете делить отрезок в заданном отношении, находить неизвестные части и применять теорему о пропорциональных отрезках. Эти идеи помогают понимать масштаб, чертежи и построения в геометрии.

