



Считаем варианты по шагам — быстро
и без полного перебора.

**Правило произведения:
как считать количество способов**

Зачем это нужно в 10 классе

Правило произведения помогает считать большие наборы вариантов, понимать комбинаторику и уверенно решать задачи на коды, маршруты и расписания, не выписывая все сочетания вручную.



Формулировка правила произведения

01 Последовательные этапы

Если действие состоит из нескольких шагов, каждый из которых выбирается отдельно, то число итоговых результатов находится поэтапно через умножение числа возможностей на каждом шаге.

02 Общая формула

При n_1 вариантах на первом этапе, n_2 на втором и n_k на последнем общее число способов равно $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$; порядок шагов сохраняется, а выборы рассматриваются последовательно.

03 Почему работает умножение

Каждый вариант первого шага сочетается со всеми допустимыми вариантами второго, затем — со всеми вариантами третьего, поэтому количество полных цепочек выбора накапливается как произведение.

04 Условие применимости

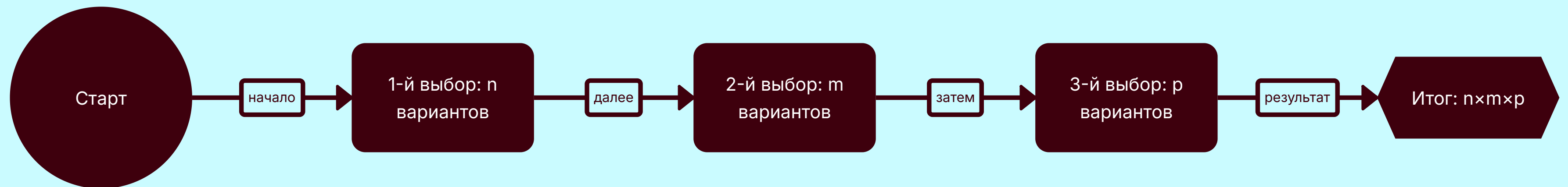
Формула верна, когда каждый этап даёт полный набор допустимых вариантов и предыдущий выбор не меняет количество возможностей на следующих шагах.

05 Что важно заметить

Если есть запреты, зависимость между шагами или неполный набор вариантов, правило произведения сохраняет идею последовательного подсчёта, но числа на этапах нужно пересматривать отдельно.

Последовательный выбор как схема подсчёта

Схема показывает, как число вариантов на каждом шаге перемножается в общий результат.



Дерево вариантов на простом примере



Рубашка и брюки

Ученик выбирает одну из двух рубашек и одну из трёх пар брюк. Дерево вариантов показывает две первые ветви, а затем по три продолжения из каждой ветви, поэтому легко увидеть все шесть комплектов без пропусков и повторов.



Проверка подсчёта

На схеме каждый вариант рубашки соединяется с каждой парой брюк, и никакая комбинация не теряется. Такая визуализация помогает быстро убедиться, что произведение 2×3 действительно даёт полный список возможных комплектов одежды.

Примеры, где применяется правило произведения

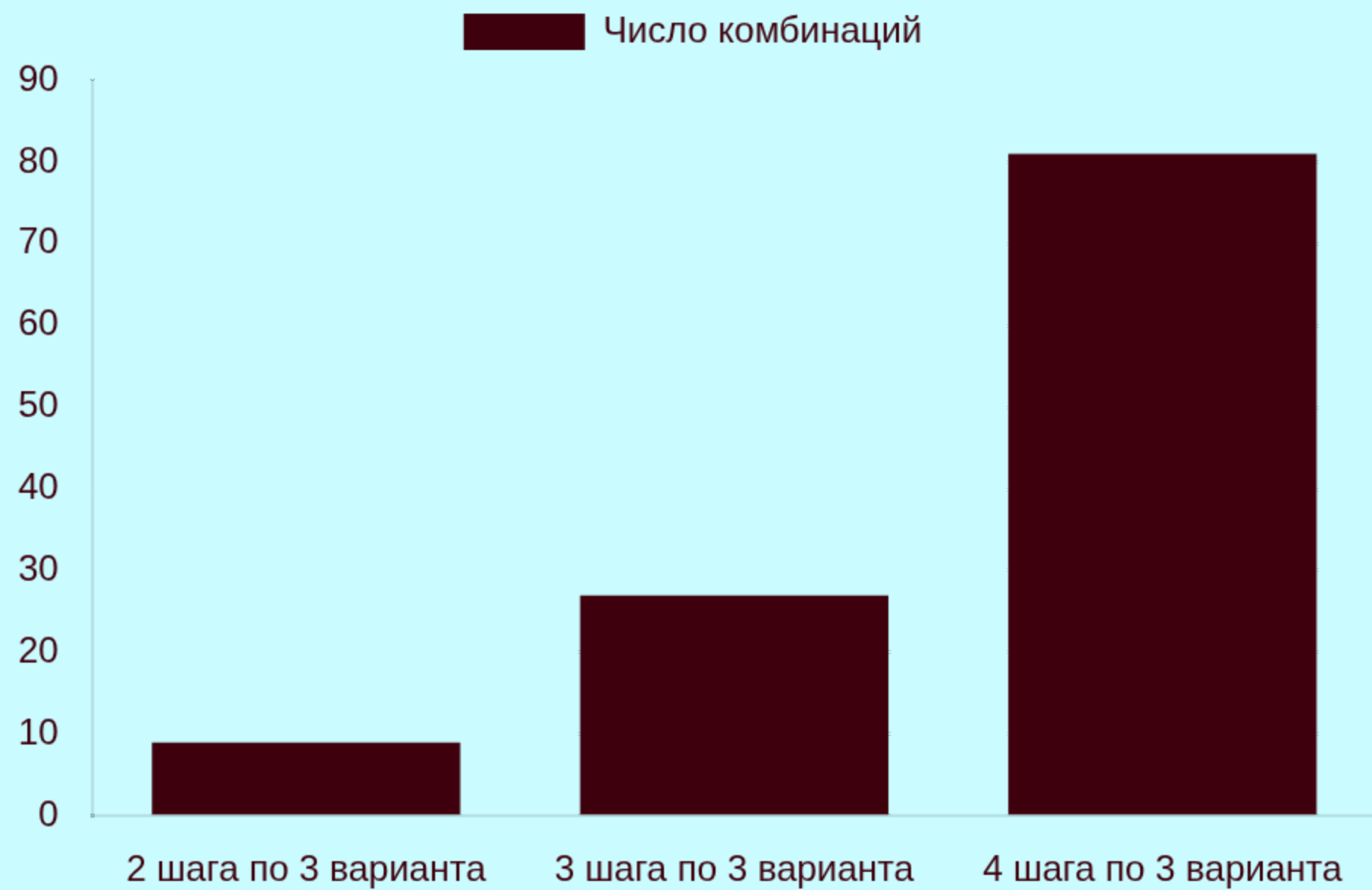
Ситуация	Этапы	Итог
Код из 3 цифр	3	$10 \times 10 \times 10$
Блюдо и напиток	2	3×4
Маршрут из 2 участков	2	2×3
Пароль из 4 символов	4	$10 \times 10 \times 10 \times 10$
Комплект одежды	2	2×3

Во всех строках итог получают умножением числа вариантов на каждом этапе.

Чем больше этапов или вариантов на каждом этапе, тем быстрее растёт общее число способов.

Учебные примеры по комбинаторике

Как растёт число вариантов при увеличении числа шагов



При одинаковом числе вариантов на каждом шаге рост становится особенно заметным уже после добавления одного этапа.

Увеличение числа шагов приводит к кратному, а не линейному росту результата.

Учебный пример: 3 варианта на каждом шаге

Когда правило произведения применимо

Шаги независимы

Правило работает, когда каждый этап выбора можно рассматривать отдельно, а предыдущий результат не ограничивает число допустимых вариантов на следующем шаге.

Все варианты допустимы

На каждом шаге должны быть учтены только разрешённые действия; если часть вариантов запрещена, число способов на этом этапе нужно уменьшать.

Порядок может иметь значение

Последовательность действий часто важна для результата, но сама схема подсчёта остаётся прежней: количество способов находят как произведение чисел по этапам.

Ограничения требуют уточнения

Если есть повторения, запреты или зависимость между шагами, формулу нельзя применять механически: сначала определяют новые числа вариантов, затем их перемножают.

Ограничения, которые меняют подсчёт

Запрет повторов

01

Если один и тот же объект нельзя выбрать снова, число вариантов на следующих шагах становится меньше, чем на первом, и произведение нужно считать уже по обновлённым числам.

Выбор без возвращения

02

Когда выбранный элемент не возвращают в набор, каждый следующий шаг имеет меньше доступных возможностей, поэтому дерево вариантов сужается после каждого выбора.

Обязательные условия

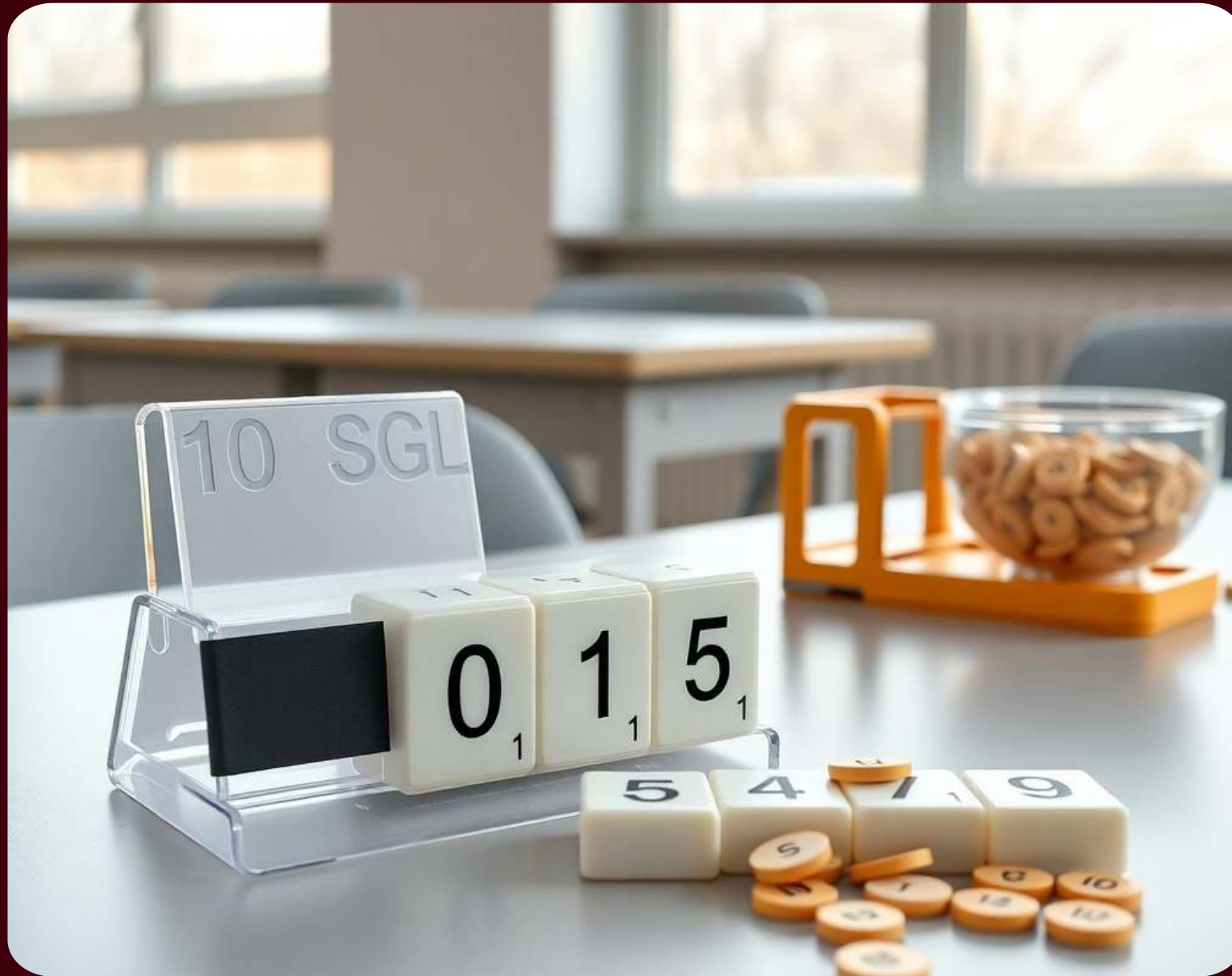
03

Если задача требует определённого признака или фиксированного элемента, часть ветвей исключается заранее, потому что не все комбинации удовлетворяют условию.

Зависимые выборы

04

В сложных задачах важно отличать независимые этапы от зависимых: во втором случае число способов меняется по ходу решения, и это нужно учитывать отдельно.



Пароль как пример применения правила

- **Без ограничений**

Если пароль состоит из четырёх цифр, и на каждую позицию можно поставить любую цифру от 0 до 9, получаем $10 \times 10 \times 10 \times 10$ вариантов.

- **Первая цифра не ноль**

Когда первая позиция не может быть нулём, первый шаг даёт только 9 вариантов, а остальные три — по 10, поэтому число способов меняется до $9 \times 10 \times 10 \times 10$.

- **Почему пример показателен**

Один маленький запрет сразу меняет итоговое число комбинаций, и это хорошо показывает, как правило произведения учитывает условия задачи на каждом этапе.

Правило произведения в повседневных задачах



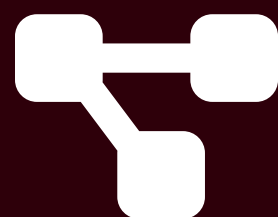
Завтрак без перебора

Если есть 3 напитка и 4 блюда, каждый напиток можно сочетать с любым блюдом. Поэтому число возможных завтраков равно произведению вариантов на двух шагах: $3 \times 4 = 12$.



Маршрут туда и обратно

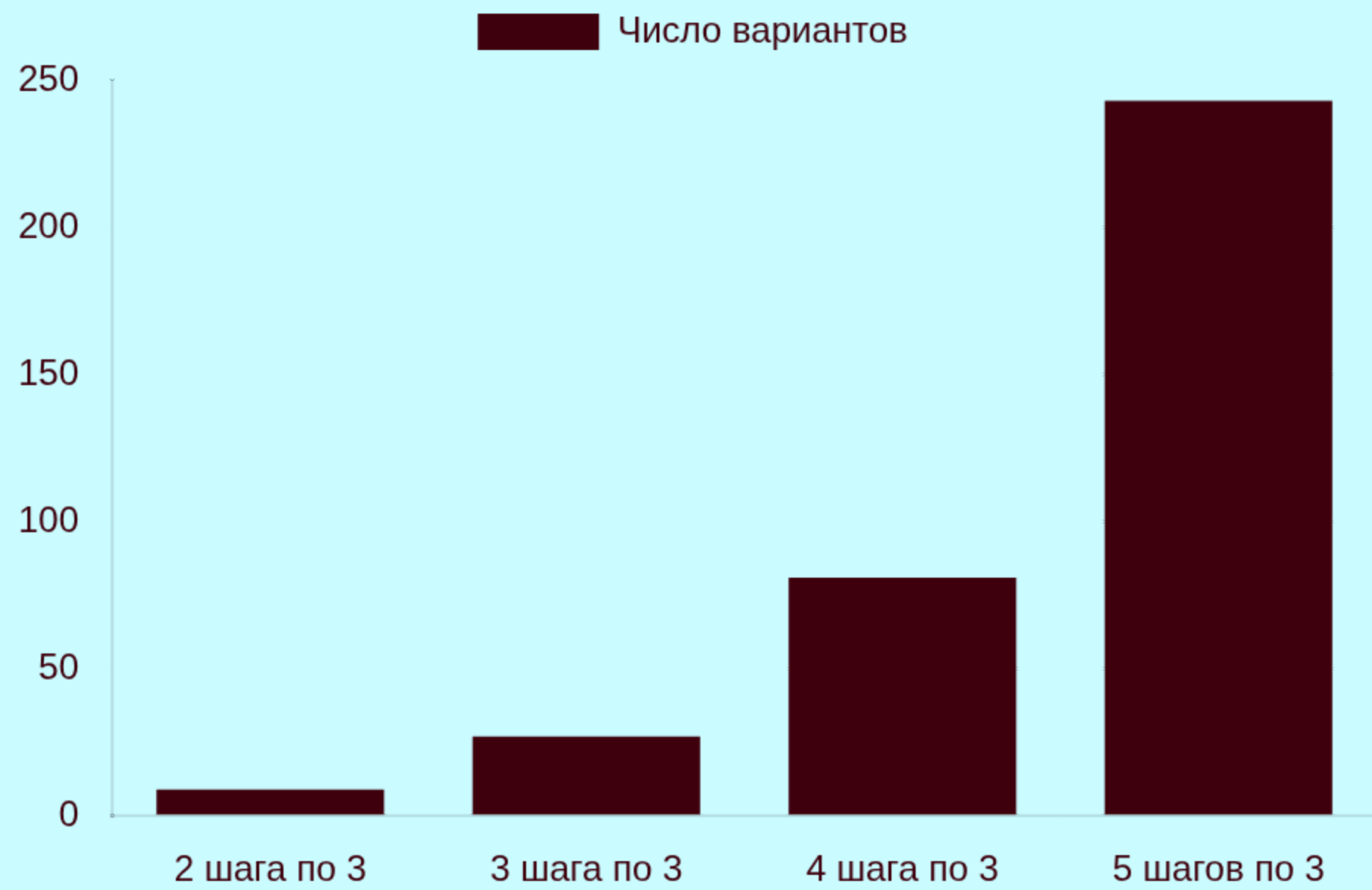
Когда в школу можно идти 2 дорогами, а возвращаться 3 способами, каждый путь туда соединяется с каждым вариантом обратно. Получается $2 \times 3 = 6$ разных маршрутов.



Проект и форма работы

Если тема проекта выбирается из 2 направлений, а форма выполнения — из 4 вариантов, общее число сочетаний равно $2 \times 4 = 8$. Подсчёт идёт без полного перечисления.

Сравнение числа вариантов в учебных примерах



Все примеры построены на одном основании — одинаковом числе вариантов на каждом шаге. Это удобно для быстрого сравнения роста без громоздких вычислений.

Чем больше последовательных этапов, тем быстрее растёт число результатов: зависимость носит мультипликативный, а не линейный характер.

Учебные примеры, составленные по правилу произведения

**Число конечных ветвей
дерева совпадает
с числом всех допустимых
комплектов. Если дерево
построено верно, оно
сразу показывает,
не пропущен ли какой-либо
вариант.**

Учебный пример: 2 рубашки × 3 пары брюк

6

конечных листьев получается
в примере с двумя рубашками
и тремя парами брюк.

Мини-практикум по подсчёту вариантов

Во всех строках итог находится одинаково: число вариантов на каждом этапе перемножается, а результат показывает общее количество решений.

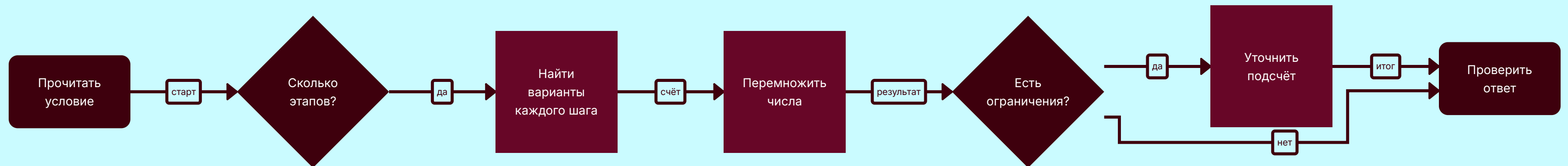
Разные по смыслу задачи сводятся к одной схеме подсчёта, если выбор идёт по этапам и каждый этап даёт полный набор допустимых вариантов.

Ситуация	Вычисление	Ответ
2 футболки и 5 брюк	2×5	10
3 напиток и 2 десерта	3×2	6
4 кабинета и 3 времени	4×3	12
2 языка и 4 темы	2×4	8

Учебные примеры, составленные по правилу произведения

Алгоритм решения задач на правило произведения

Последовательность рассуждений при решении комбинаторных задач на несколько шагов.



Частые ошибки при применении правила

Путают два правила

Иногда сумму используют там, где нужно произведение, и наоборот. Если действия выполняются последовательно, а не выбираются как альтернативы, подсчёт должен строиться по этапам, а не через сложение.

Игнорируют ограничения

Часто забывают, что условия задачи могут исключать часть вариантов: например, запрет повторов или недопустимый ноль в первой позиции кода. Тогда исходное произведение нужно корректировать.

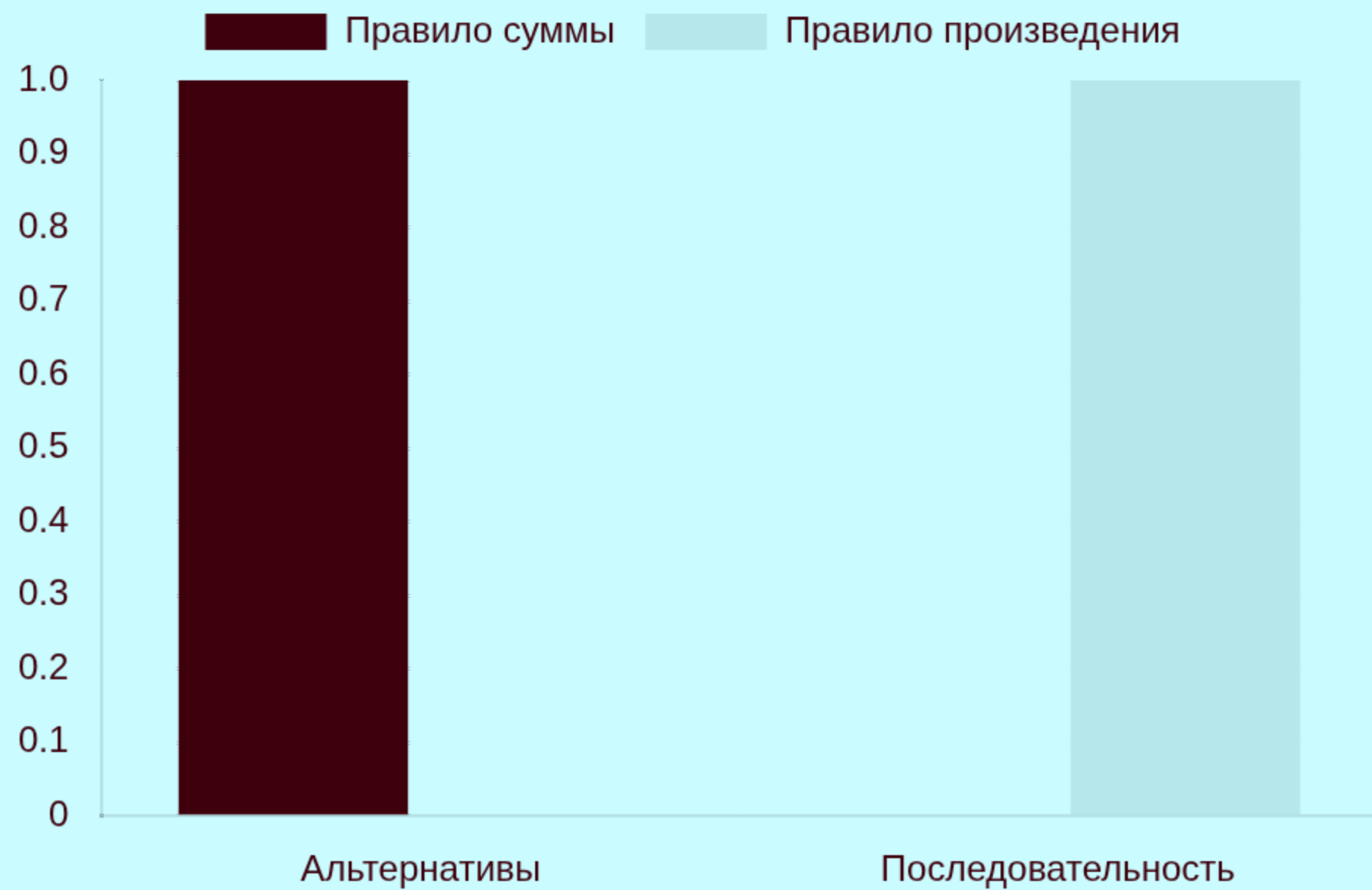
Сбиваются на одном шаге

Ошибка возникает, когда неправильно считают число вариантов на первом или последнем этапе. Из-за этого всё произведение становится неверным, хотя сама схема рассуждения выбрана правильно.

Не проверяют ответ

Полезно сверять результат с деревом вариантов или хотя бы с логикой задачи. Такая проверка помогает заметить пропущенные ветви, лишние комбинации и неестественно большой ответ.

Правило суммы и правило произведения



Оба принципа описывают подсчёт вариантов, но делают это по-разному: один складывает альтернативы, другой соединяет последовательные шаги в единый результат.

Если задача спрашивает «или», обычно работает сумма; если требуется выполнить несколько действий подряд, нужен принцип умножения.

Связь с перестановками и размещениями



01 Перестановка как последовательный выбор

Если нужно упорядочить все n объектов без повторений, на первом месте есть n вариантов, на втором — $n-1$, затем $n-2$ и так далее. Именно так возникает произведение последовательных чисел.

02 Размещения как частный случай

Когда выбирают не все объекты, а только часть и учитывают порядок, схема остаётся той же: на каждом шаге число допустимых вариантов уменьшается. Это и есть размещение без повторений.

03 Основа формул комбинаторики

Правило произведения объясняет, почему более сложные формулы строятся из простого поэтапного подсчёта. Сначала считают варианты на каждом месте, а затем объединяют их в одно выражение.

Значение правила произведения в науке и технике

Криптография

01

При оценке стойкости шифров важно понимать, сколько существует возможных ключей. Правило произведения позволяет быстро оценить размер пространства перебора и сложность взлома.

Программирование

02

В алгоритмах часто подсчитывают число состояний, маршрутов или комбинаций параметров. Это помогает оценить, насколько велико пространство поиска и где возникают вычислительные трудности.

Статистика

03

При анализе признаков и выборок нужно учитывать сочетания нескольких факторов. Поэтапный подсчёт помогает заранее оценить количество возможных конфигураций данных.

Планирование экспериментов

04

В научных исследованиях важно понять, сколько вариантов условий можно проверить. Правило произведения упрощает выбор схемы эксперимента и делает планирование более точным.

Оценка масштаба задачи

05

Во многих цифровых и инженерных задачах полный перебор невозможен. Тогда именно правило произведения показывает, насколько быстро растёт число вариантов при добавлении новых условий.

Считать сложное через простое

Правило произведения показывает, как многоэтапную задачу можно свести к умножению вариантов на каждом шаге. Оно помогает считать точно, рассуждать последовательно и уверенно решать комбинаторные задачи.