

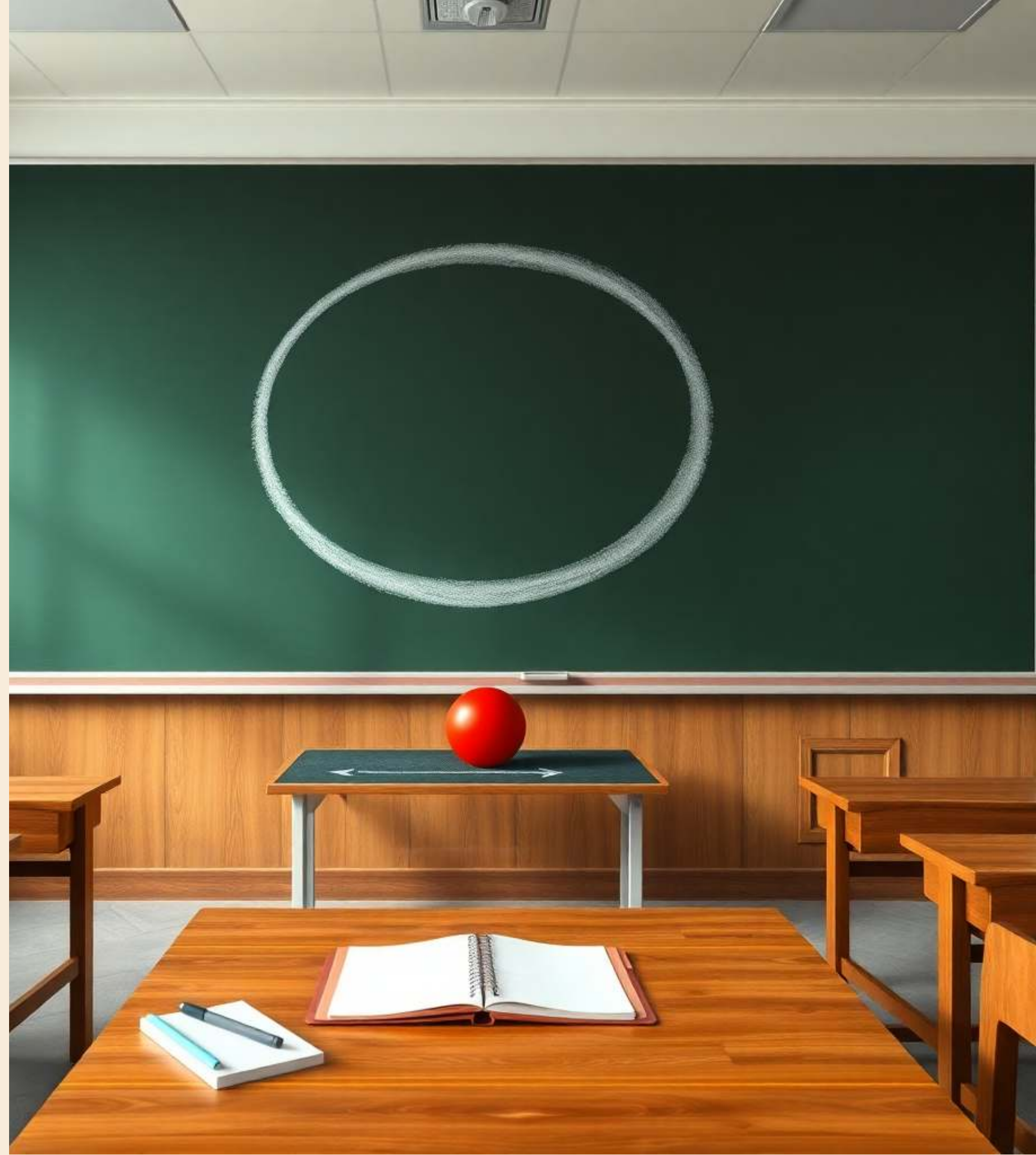
Квадратичная функция и её график: от формулы к параболе

От формулы к графику:
как коэффициенты создают параболу.



Зачем изучать квадратичную функцию в 9 классе

Эта тема соединяет формулы, графики и уравнения. Она помогает увидеть, как меняется парабола, научиться находить её вершину, ось симметрии и корни, а затем применять эти знания в задачах алгебры и смежных предметов.



Определение квадратичной функции

Общий вид

01

Квадратичная функция записывается так: $y=ax^2+bx+c$. Здесь a , b и c — коэффициенты, а переменная x может принимать любые действительные значения.

Главное условие

02

Число a не должно быть равно нулю. Если $a=0$, выражение теряет квадратный член и превращается в линейную функцию, а не в квадратичную.

Роль коэффициентов

03

Старший коэффициент a задаёт основное поведение графика, а коэффициенты b и c уточняют его положение. Именно их сочетание определяет вид параболы.

Область определения

04

Для квадратичной функции область определения всегда включает все действительные числа. Это значит, что подставлять можно любое значение x без ограничений.

Роль коэффициентов a , b и c

Каждый коэффициент влияет на график по-своему и задаёт его важные свойства.

По коэффициентам можно заранее предсказать форму и положение параболы, не строя график полностью.

Коэффициент	Что задаёт	Влияние
a	ветви и ширину	вверх/вниз
b	ось симметрии	сдвиг вершины
c	пересечение с Oy	точка $(0; c)$

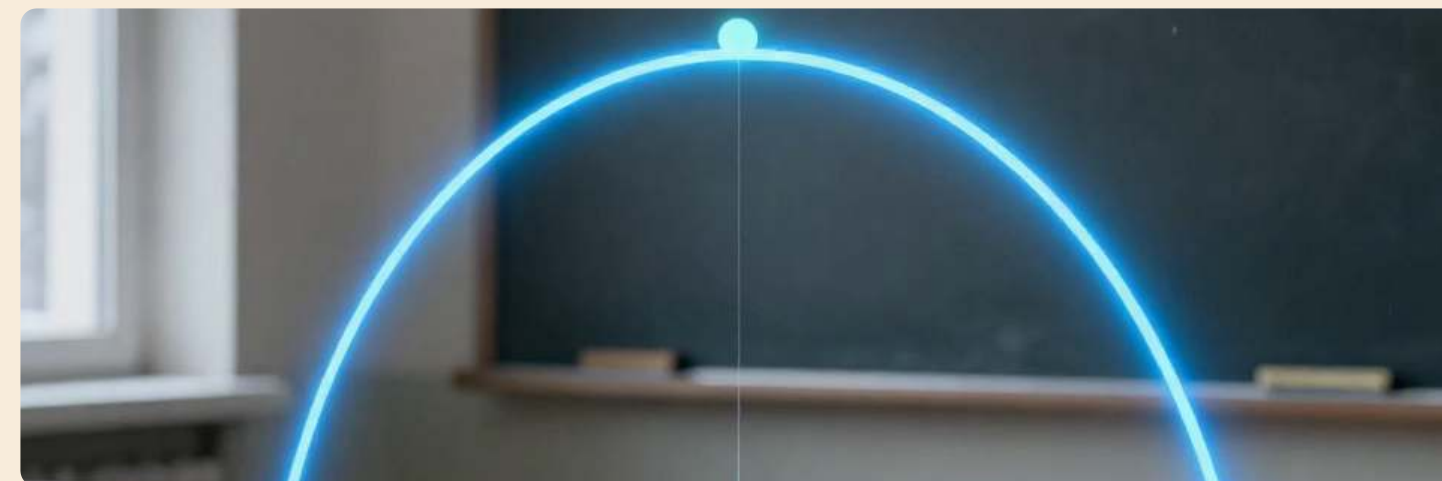
График квадратичной функции — парабола

Форма графика

График функции $y=ax^2+bx+c$ всегда имеет форму параболы. У неё две ветви, одна вершина и ось симметрии, которая делит график на две равные части.

Направление ветвей

Если $a>0$, парабола открывается вверх. Если $a<0$, её ветви направлены вниз. Этот знак сразу показывает, где будет наибольшее или наименьшее значение функции.



Опорные точки

Для построения особенно важны вершина, пересечения с осями координат и симметричные точки. Они помогают быстро представить график без длинной таблицы значений.

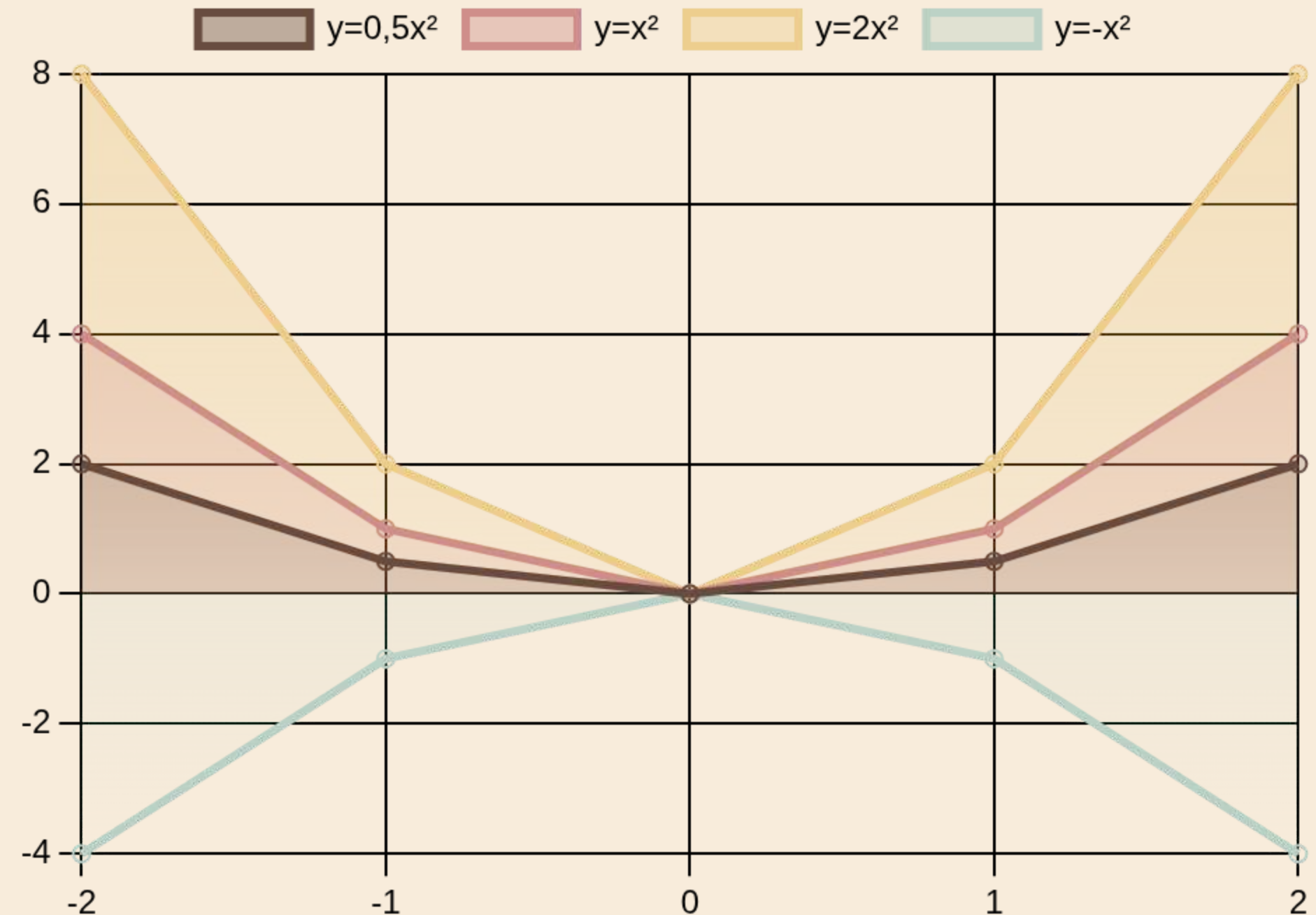
Что показывает рисунок

На схеме видно, как координатные оси, вершина, ось симметрии и точки пересечения с осями связываются в единый образ параболы.

Как коэффициент a меняет форму параболы

Чем больше $|a|$, тем быстрее растёт или убывает функция рядом с вершиной. На графике это видно по разной «крутизне» парабол.

Коэффициент a одновременно определяет направление ветвей и степень растянутости графика: его модуль меняет ширину, а знак — ориентацию.



Вершина параболы и ось симметрии

1

Самая важная точка

Вершина — это точка, где парабола достигает наибольшего или наименьшего значения. Именно она помогает понять, как расположен весь график относительно осей.

2

Ось симметрии

Через вершину проходит ось симметрии. Она делит параболу на две одинаковые части, поэтому точки слева и справа от неё располагаются зеркально.

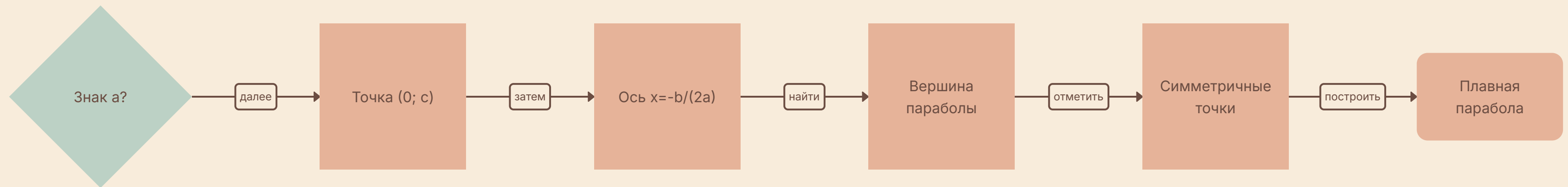
3

Как найти вершину

Для функции $y=ax^2+bx+c$ координата вершины по x вычисляется по формуле $x=-b/(2a)$. Затем найденное значение подставляют в формулу, чтобы получить координату по y .

Алгоритм построения параболы по формуле

Последовательность действий основана на свойствах квадратичной функции и её симметрии.



Нули функции и пересечение с осью Ox

Что такое нули

01

Нулями функции называют такие значения x , при которых $y=0$. На графике это точки, где парабола пересекает или касается оси Ox.

Как их находят

02

Чтобы найти нули, нужно решить уравнение $ax^2+bx+c=0$. Это обычное квадратное уравнение, связанное с графиком одной и той же функции.

Возможные случаи

03

У квадратичной функции может быть два корня, один корень или ни одного действительного корня. Каждый случай по-разному отражается на графике.

Связь с графиком

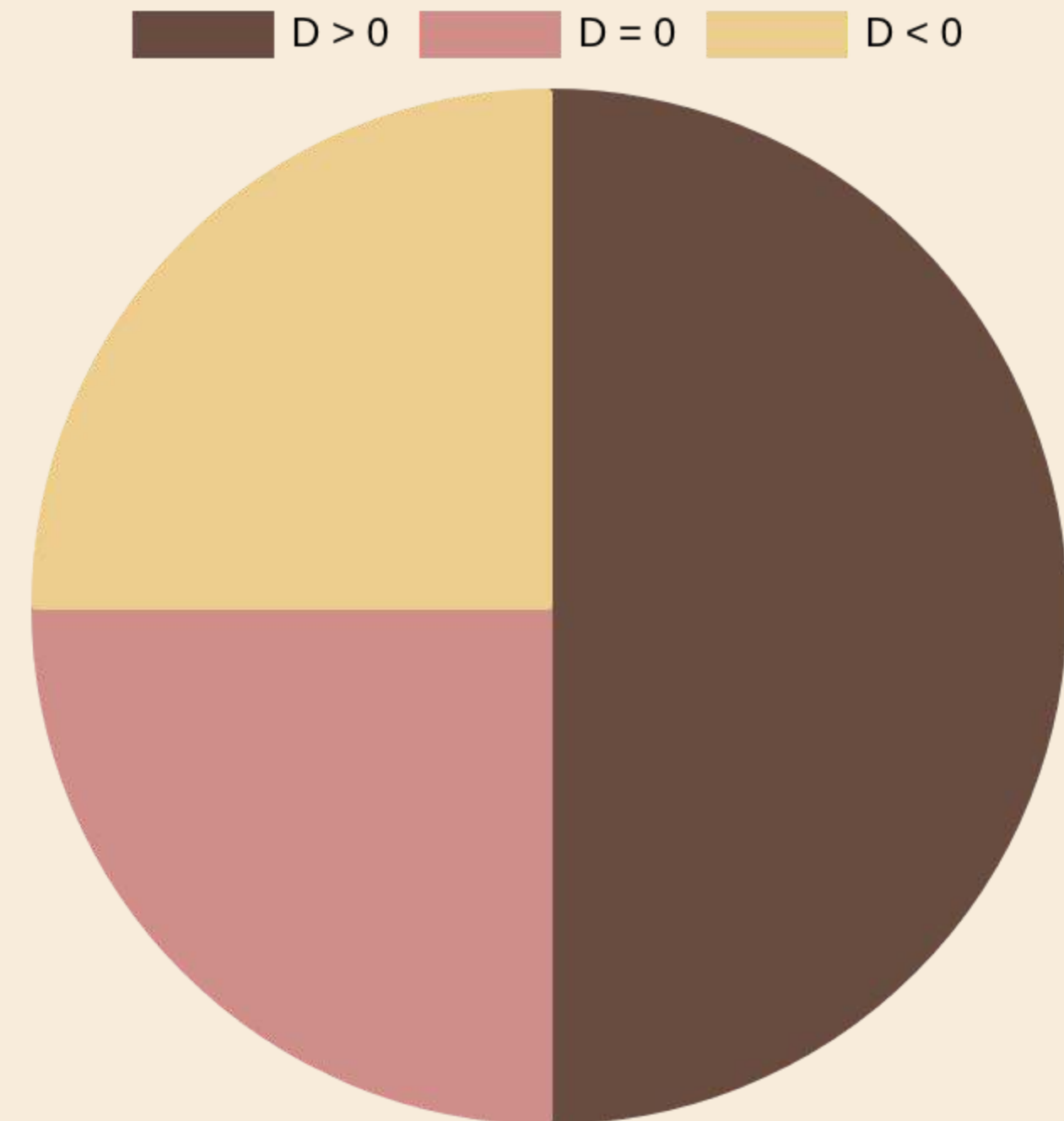
04

Если корни существуют, они показывают точки пересечения с осью Ox. Если корней нет, парабола не имеет общих точек с этой осью.

Дискриминант и число корней квадратного уравнения

Дискриминант помогает заранее понять, сколько точек пересечения будет у параболы с осью Ox .

Знак D напрямую связан с графиком: пересечение, касание или отсутствие общих точек с осью Ox .



Вершина как точка минимума или максимума



Парабола смотрит вверх

Когда коэффициент a положителен, ветви параболы поднимаются вверх. Вершина становится самой нижней точкой графика, поэтому именно в ней функция принимает наименьшее значение. По одной формуле уже можно предсказать поведение всей кривой.



Парабола смотрит вниз

Если a отрицателен, график переворачивается: ветви направлены вниз. Тогда вершина превращается в самую высокую точку, а значение функции в ней оказывается наибольшим. Изменение только знака a меняет весь характер параболы.

Как найти вершину параболы

Шаг	Действие	Результат
1	$x_v = -b/(2a)$	x вершины
2	Подставить x_v	y
3	Записать точку	(x_v ; y)
4	Построить график	Проверка

Алгоритм помогает быстро определить вершину по формуле и проверить симметрию графика.

Вершина находится точно по формулам, поэтому график можно строить без догадок и отмечать симметричные точки.

Канонический вид квадратичной функции

1

Запись с вершиной

Форма $y=a(x-p)^2+q$ сразу показывает координаты вершины: это точка $(p; q)$. Такой вид удобен, когда нужно быстро понять, куда сдвинут график и как он расположен на координатной плоскости.

2

Сдвиг по оси Ox

Число p отвечает за горизонтальное смещение параболы. Если p положительно, график сдвигается вправо, а если отрицательно — влево. При этом сама форма кривой не меняется.

3

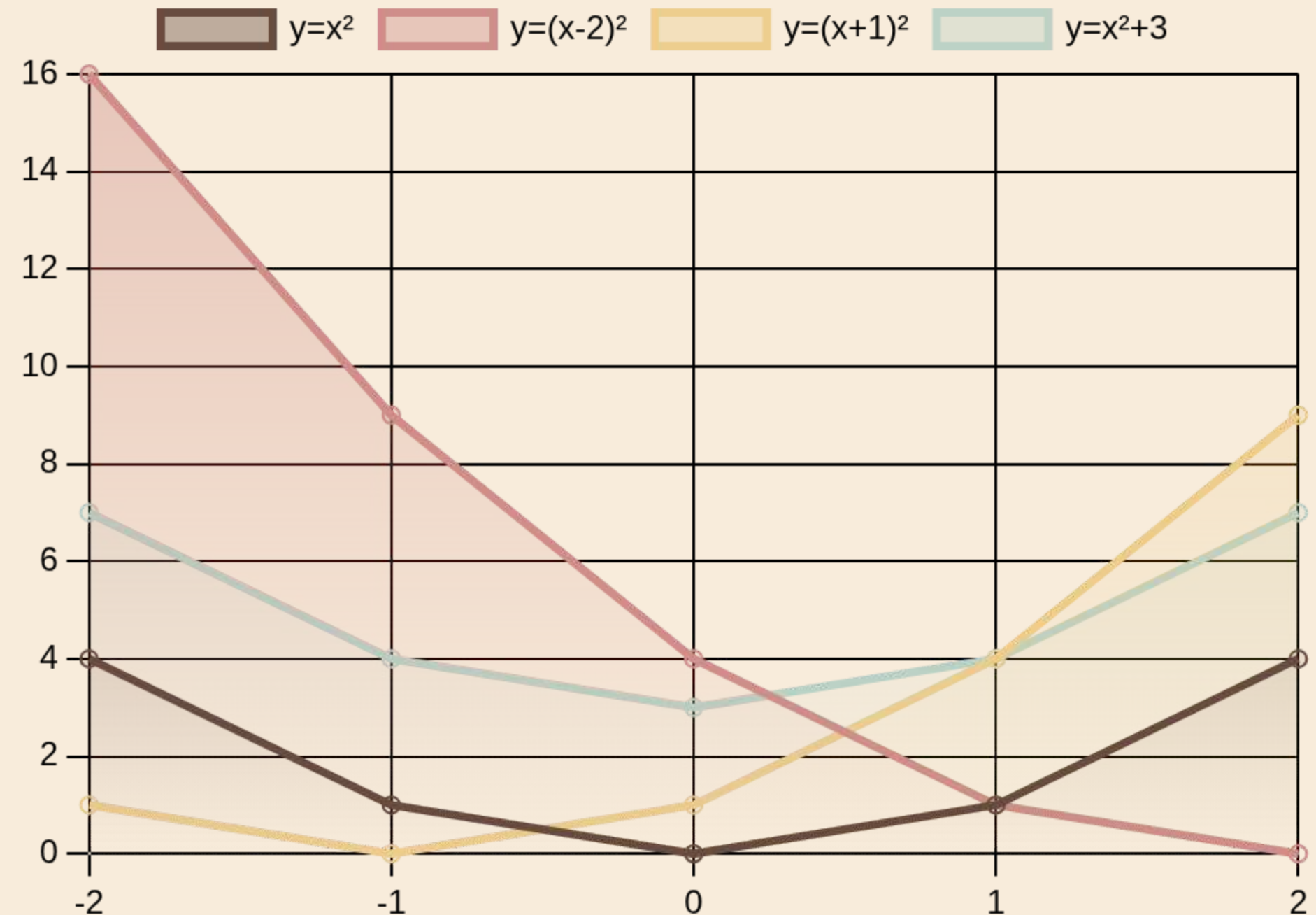
Сдвиг по оси Oy

Число q задаёт вертикальное перемещение графика. Положительное q поднимает параболу вверх, а отрицательное опускает вниз. Благодаря этому канонический вид удобно сравнивать со стандартной формой функции.

Сдвиги графика параболы

Парабола сохраняет одинаковую форму при $a=1$, но её вершина меняет положение. На графике удобно видеть, как формулы задают смещение вправо, влево и вверх.

Сдвиг зависит от числа внутри скобок и свободного члена: один меняет положение по x , другой — по y .



Как меняется функция по обе стороны от вершины

Ветви вверх

Если $a > 0$, то слева от вершины значения функции постепенно уменьшаются, а справа — увеличиваются. Вершина становится точкой минимума и разделяет график на два разных участка поведения.

Ветви вниз

При $a < 0$ картина обратная: до вершины функция возрастает, а после неё убывает. Вершина в этом случае является точкой максимума, и именно от неё удобно отсчитывать изменения.

Роль оси симметрии

Ось симметрии проходит через вершину и помогает сравнивать две половины параболы. Значения функции на одинаковом расстоянии от оси равны, поэтому график выглядит зеркально.

Практический смысл

Зная вершину, можно сразу определить, где функция растёт и где убывает, не строя таблицу значений. Это особенно полезно при решении задач и анализе графиков в 9 классе.

Мяч в полёте: знакомая парабола

Начало движения

Когда мяч только подброшен вверх, его высота быстро растёт. На графике это соответствует подъёму параболы к вершине, где движение ещё продолжается, но уже замедляется.

Самая высокая точка

Вершина параболы показывает момент, когда мяч находится выше всего. В физической ситуации это удобный ориентир: по ней можно определить максимальную высоту полёта.



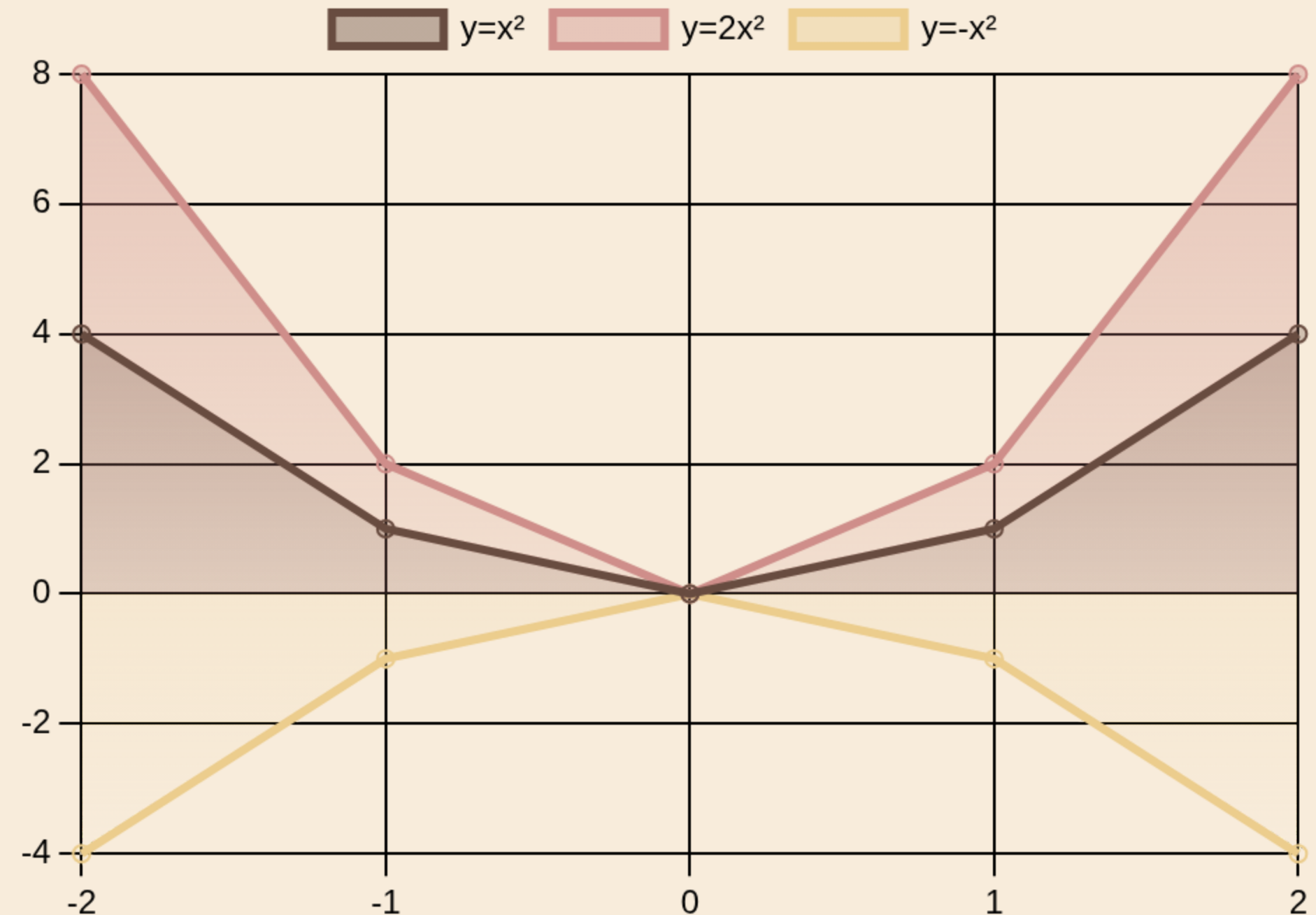
Падение вниз

После вершины высота начинает уменьшаться, и мяч опускается к земле. Такая часть графика помогает увидеть, что квадратичная функция описывает не только числа, но и реальные процессы.

Сравнение трёх парабол

Все три графика имеют одну и ту же основу, но коэффициент a меняет их вид. Чем больше модуль a , тем сильнее сжат график, а отрицательный знак переворачивает его.

Сравнение показывает: значение и знак старшего коэффициента одновременно определяют ширину параболы и направление её ветвей.



На что чаще всего ошибаются

Условие $a \neq 0$

01

Нельзя забывать, что квадратичная функция существует только при $a \neq 0$. Если этот коэффициент равен нулю, формула уже описывает не параболу, а другую, более простую зависимость.

Знак в оси симметрии

02

Формулу $x = -b/(2a)$ легко перепутать из-за минуса. Ошибка в знаке сразу смещает ось симметрии, а вместе с ней неправильно находится и вершина параболы.

Вычисление вершины

03

Сначала находят координату x вершины, затем подставляют её в исходную формулу. Если пропустить второй шаг, вершина будет неполной, а график построится неверно.

Корни и нули функции

04

Нули функции ищут по уравнению $ax^2 + bx + c = 0$, а не по пересечению с осью Oy . Пересечение с Oy всегда связано со значением c , а не с корнями.

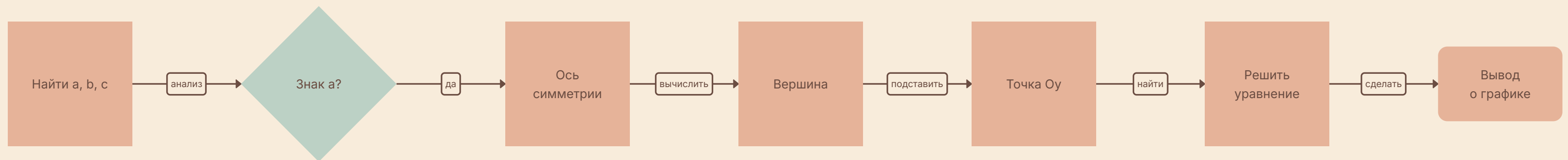
Внимание к скобкам

05

При чтении формулы важно точно замечать скобки и знаки коэффициентов. Даже одна невнимательная запись меняет расчёты, поэтому каждое действие нужно проверять по исходной формуле.

Порядок исследования квадратичной функции

Последовательность показывает, как по формуле получить полное описание графика.



Парабола, которую можно понять по формуле

Квадратичная функция связывает формулу и рисунок: по коэффициентам можно предсказать форму параболы, найти вершину, ось симметрии и нули функции. Это делает тему удобной для решения задач и изучения графиков.