

Случайные величины: числовая модель неопределённости и

Как описать случайность с помощью чисел и формул?



Зачем изучать случайные величины в 10 классе?

- Эта тема соединяет вероятности, статистику и функции, помогая читать данные, анализировать эксперименты и понимать реальные ситуации — от тестов до ожидания автобуса.



Определение случайной величины

Числовое соответствие

Случайная величина — это правило, которое каждому исходу случайного опыта ставит в соответствие число. Именно поэтому её можно изучать средствами алгебры и теории вероятностей.

Обозначения

Чаще всего случайные величины обозначают буквами X , Y или Z . Такое обозначение удобно, когда нужно рассматривать несколько случайных процессов в одной задаче.

Зависимость от опыта

Значение величины определяется результатом опыта: числом орлов, суммой очков, количеством дефектов или временем ожидания. Один и тот же опыт может дать разные значения.

Роль множества значений

То, какие значения может принимать величина, определяет способ задания её распределения и выбор формул для вычисления вероятностей и числовых характеристик.



Основные виды случайных величин

— Тип величины определяют по множеству её значений: отдельные числа или весь промежуток. Это различие влияет на способ задания модели и вычисления вероятностей.

Счётные значения указывают на дискретную модель, а непрерывные измеряются на промежутках; именно от этого зависит дальнейший анализ.

— *Учебный пример по теме «Случайные величины»*

Дискретная случайная величина и её примеры

Конечный набор значений

Дискретная случайная величина принимает конечное или счётное число значений, которые можно перечислить заранее. Для каждого значения задают вероятность, а затем проверяют, что их сумма равна 1.

Примеры из практики

К дискретным величинам относятся число орлов при нескольких бросках монеты, количество учеников с оценкой «5» и число неисправных ламп в коробке с продукцией.

Таблица распределения

Для дискретной величины удобно составлять таблицу распределения: в ней рядом с каждым возможным значением указывают его вероятность. Такой формат делает задачу прозрачной и наглядной.

Столбчатая диаграмма

Значения дискретной случайной величины удобно изображать столбчатой диаграммой. По высоте столбцов легко сравнивать вероятности и быстро замечать наиболее вероятные исходы.



Закон распределения для числа орлов в двух бросках монеты

X	Вероятность
0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$

— В таблице показано, какие значения может принимать случайная величина X и с какой вероятностью они возникают в этом опыте.

Сумма вероятностей равна 1, а наиболее вероятный результат — 1 орёл. Это типичный пример закона распределения дискретной случайной величины.

— Классическая схема двух бросков монеты

Непрерывная случайная величина

1 Промежуток значений

Непрерывная случайная величина может принимать любые значения на некотором промежутке. К ней относятся длина детали, масса предмета, температура воздуха и время работы прибора.

2 Вероятность точки

Для непрерывной величины вероятность отдельного значения равна нулю. Поэтому в задачах рассматривают не точку, а отрезок или интервал значений.

3 Измерения и погрешности

Такие величины особенно важны в измерениях, где результат может немного колебаться из-за условий опыта. Именно здесь проявляется роль случайных отклонений.

4 Нужны специальные инструменты

Непрерывные величины изучают через функцию распределения и график плотности, потому что они описывают не отдельные исходы, а поведение на всём промежутке.



Функция распределения и её свойства

Функция распределения показывает, как накапливается вероятность при росте x . Её график помогает видеть, где вероятность быстро увеличивается, а где почти не меняется.

Возрастание $F(x)$ отражает накопление вероятности: чем правее точка, тем больше вероятность события $X \leq x$. Это основной инструмент для интервалов.

Схематический пример функции распределения

Как находят вероятность интервала



1 Непрерывный случай

Для непрерывной случайной величины вероятность интервала находят по формуле $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$. Здесь важна разность значений функции распределения.

2 Дискретный случай

Если величина дискретная, нужно сложить вероятности всех значений, которые попадают в нужный промежуток. Такой способ напрямую связан с таблицей распределения.

3 Почему точка не важна

В непрерывной модели вероятность отдельной точки равна нулю, поэтому главную роль играют именно интервалы. Это одно из ключевых отличий от дискретного случая.

4 Границы интервала

При решении задач всегда проверяют, включены ли границы и какой тип величины рассматривается. Ошибка в знаке неравенства может изменить ответ.

Плотность вероятности

— Не сама вероятность

Плотность вероятности $f(x)$ не означает вероятность отдельного значения. Она описывает, насколько вероятны значения в окрестности точки и как распределена вероятность по оси.

— Площадь под графиком

Вероятность интервала равна площади под графиком плотности на этом участке. Чем больше эта площадь, тем выше вероятность попасть в указанный промежуток.

— Нормировка и форма

Площадь под всей кривой плотности всегда равна 1. График может быть симметричным, асимметричным или колоколообразным — в зависимости от природы данных.



Математическое ожидание как среднее значение

Среднее значение показывает, какой результат чаще всего ожидается при многократном повторении опыта, даже если отдельные исходы различаются.

Здесь средний результат равен 1: вероятность срединного исхода выше, поэтому распределение сосредоточено вокруг него.

Учебный пример: число орлов в двух бросках монеты.

Числовые характеристики случайной величины

Характеристика	Что показывает	Единицы
Мат. ожидание	центр	как X
Дисперсия	разброс	квадрат X
σ	типичный отклон.	как X

Сравнение трёх основных характеристик помогает понять и положение центра, и разброс значений вокруг него.

Математическое ожидание описывает центр, дисперсия — изменчивость, а стандартное отклонение удобно для сравнения данных в исходной шкале.

Курс теории вероятностей, школьный уровень.

3

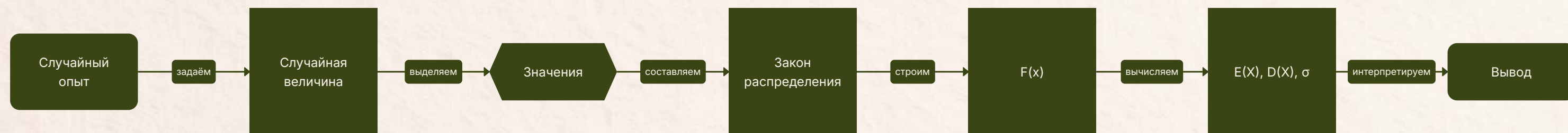
единицы составляет стандартное отклонение,
если дисперсия равна 9

Стандартное отклонение возвращает разброс к привычной
шкале измерения и поэтому удобнее для сравнения
результатов разных опытов.

Иллюстративный пример по формуле $\sigma = \sqrt{D(X)}$.

Алгоритм анализа случайной величины

Последовательность действий в школьных задачах по вероятности и статистике.



Две важные модели для счёта событий



Биномиальная схема

Используют, когда есть фиксированное число независимых испытаний и одинаковая вероятность успеха. Так считают правильные ответы, попадания в серии попыток и выигрышные билеты.



Редкие события

Распределение Пуассона описывает число событий на заданном промежутке времени или пространства. Подход подходит для звонков, ошибок, дефектов и других редких наблюдений.



Общий принцип

Обе модели помогают перевести реальную ситуацию в числовую форму, чтобы находить вероятности, сравнивать сценарии и делать выводы по данным без лишних предположений.



Практическая польза

С помощью таких распределений удобно строить прогнозы: оценивать ожидаемое число успехов, отклонения от среднего и вероятность необычно больших или малых результатов.

Нормальное распределение в реальных данных

Колоколообразная форма особенно заметна в измерениях, где на результат одновременно влияют многие независимые факторы и случайные погрешности.

Большая часть значений концентрируется около среднего, поэтому отклонения удобнее оценивать через стандартное отклонение, а не отдельные точки.

Правило 68–95–99,7; общеизвестная статистическая модель.

Где случайные величины встречаются каждый день



Контрольная и результаты класса

Учитель может рассмотреть число пятёрок, четвёрок и неудовлетворительных оценок как случайную величину. Затем удобно построить таблицу распределения и увидеть, как меняется результат от одного класса к другому.



Ожидание и время

Время выполнения задания, ожидание автобуса или срок службы батареи редко совпадают у разных людей. Такие данные помогают понять, насколько ситуация стабильна, и заранее оценить возможные отклонения от среднего.



Мини-исследование в проекте

Если собрать данные о количестве сообщений в день, посетителей кабинета или опозданий за неделю, получится наглядная модель для анализа. Она показывает, как математика помогает описывать привычную школьную жизнь.

Типичные ошибки при работе со случайными величинами

Ошибка	К чему ведёт	Что помнить
Точка вместо интервала	неверная вероятность	уточнять тип
Смещение моделей	ошибочная формула	проверять значения
Сумма не равна 1	некорректный закон	контролировать итог

- Ошибки чаще всего связаны не с вычислениями, а с неправильным выбором модели и невнимательностью к условию задачи.

Главная причина ошибок – игнорирование типа величины и условий задачи; сначала нужно выбрать модель, потом применять формулы.
- Методические рекомендации по теме «Случайные величины».

Зачем изучать случайные величины

1 Описывать неопределённость

Случайная величина превращает случайный опыт в число, с которым можно работать как с математической моделью. Это делает неопределённость измеримой и сравнимой.

2 Сравнивать варианты

Математические характеристики помогают сопоставлять несколько сценариев, даже если их результаты отличаются по разбросу. Так видно, где риск выше, а где результат стабильнее.

3 Работать с данными

Таблицы, графики и распределения позволяют анализировать результаты экспериментов, находить закономерности и делать выводы на основе наблюдений, а не догадок.

4 Готовиться к дальнейшему курсу

Тема соединяет вероятность, статистику и функции, поэтому она необходима для последующего изучения моделей, выборок и методов обработки данных в старших классах.



От случайного опыта к числовой модели

Случайные величины помогают описывать неопределённость строго и наглядно: через распределение, ожидание, разброс и интерпретацию данных. Именно поэтому они так важны в математике и в реальной жизни.