

Производная произведения, частного и композиции функций

Три правила, которые раскрывают сложные производные



Почему без специальных правил не обойтись

Таблицы производных помогают только для простых функций. Когда выражение состоит из произведения, дроби или вложенных скобок, нужны отдельные правила. Именно они позволяют уверенно исследовать функции, строить касательные и решать прикладные задачи.



Производная произведения: формула и условия применения

1

Основная формула

Если $y=f(x)g(x)$, то производная равна $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.

Формула показывает, что меняются оба множителя, поэтому нельзя заменять её произведением производных.

2

Когда применяется

Правило используют тогда, когда обе функции зависят от x . Оно подходит для выражений с многочленами, тригонометрическими, показательными и логарифмическими функциями, если они перемножаются между собой.

3

Типовые примеры

Классические случаи: $y=x^2\sin x$, $y=(x+1)(x^3-2)$, $y=e^x\cdot\ln x$.
В каждом примере сначала находят производную одного множителя, затем другого и складывают полученные вклады.

Смысл правила произведения на примере площади

Площадь как модель

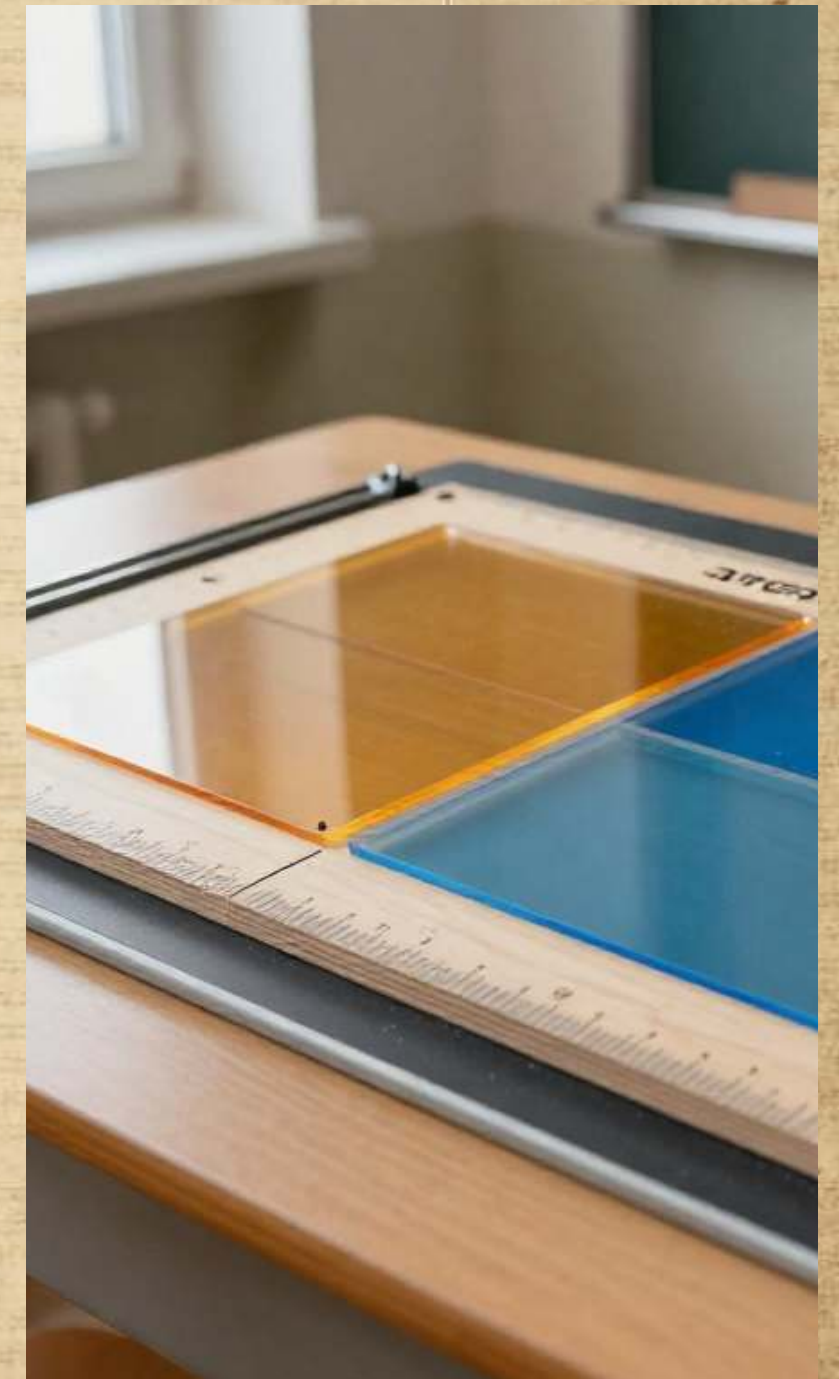
Площадь прямоугольника $S=a \cdot b$ меняется уже при изменении одной стороны. Если обе стороны зависят от x , то площадь реагирует на каждое изменение отдельно, а затем эти эффекты суммируются.

Два вклада в изменение

Первый вклад связан с тем, как меняется $a(x)$, второй — с изменением $b(x)$. Поэтому в производной появляются два слагаемых: $a'b$ и ab' , а не одно произведение производных.

Геометрический смысл

Схема с прямоугольником помогает увидеть, что правило произведения описывает не абстрактную формулу, а реальное сложение двух независимых причин изменения величины.

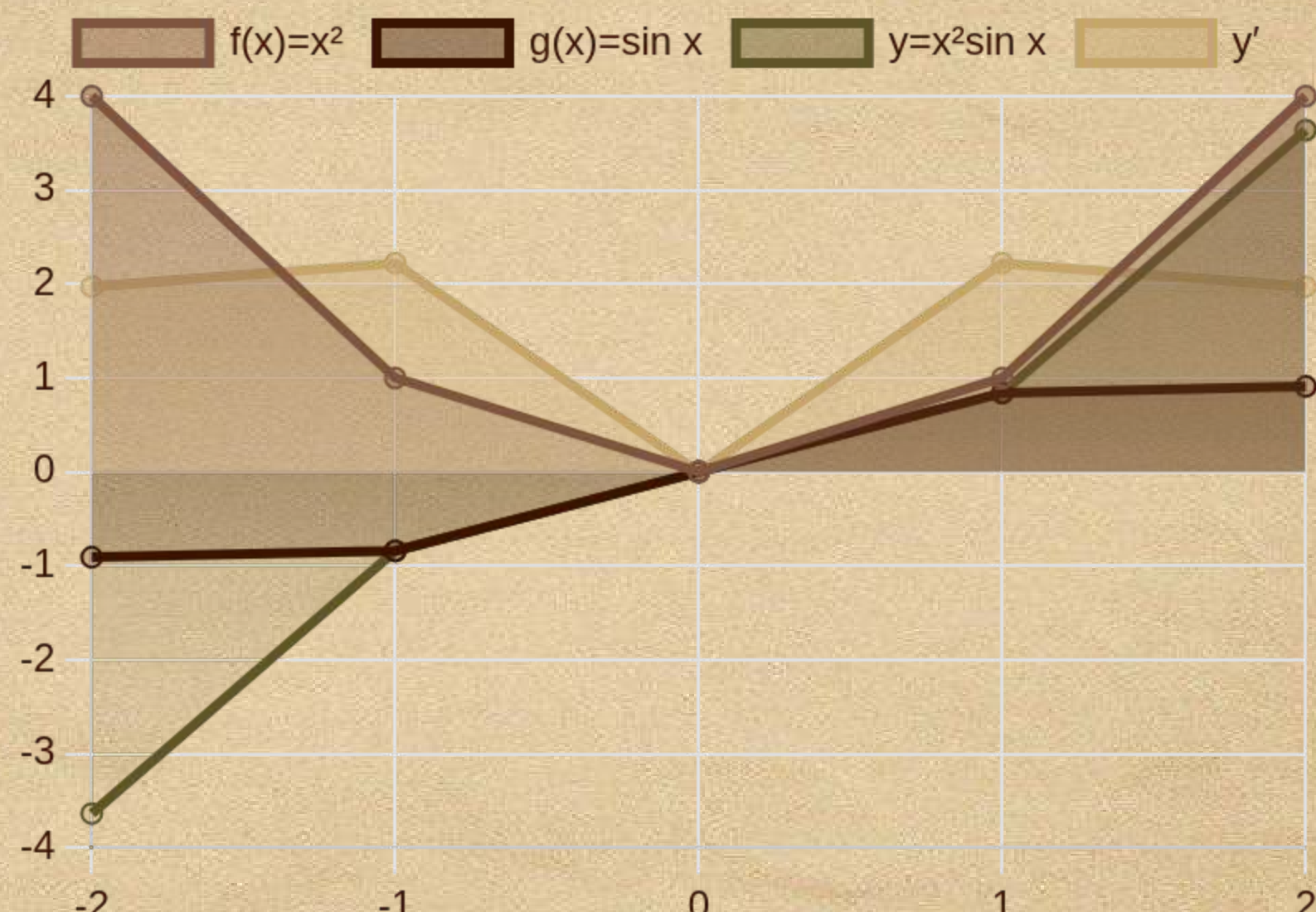


Сравнение исходной функции и её производной при произведении

На одном графике видно, что произведение и его производная ведут себя по-разному, хотя связаны одной формулой.

Производная отражает вклад обоих множителей; её график нельзя заменить ни исходной функцией, ни произведением отдельных производных.

Вычисления по формулам $f(x)=x^2$, $g(x)=\sin x$ и $y'=2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x$; точки рассчитаны для $x=-2, -1, 0, 1, 2$.



Производная частного: формула и ограничения

Основная запись

Если $y=f(x)/g(x)$, то $y'=(f'(x)g(x)-f(x)g'(x))/g^2(x)$.

В формуле обязательно учитываются и числитель, и знаменатель, а знаменатель после дифференцирования оказывается в квадрате.

1

Почему появляется минус

Знак минус связан с тем, что изменение знаменателя уменьшает значение дроби. Поэтому вклад второй части формулы вычитается, а не прибавляется, как в случае произведения.

2

Условие применения

Правило работает только при $g(x) \neq 0$, иначе исходная дробь не определена. Это особенно важно для дробно-рациональных выражений, где знаменатель может обращаться в ноль.

3

Практическая роль

Формула часто встречается при дифференцировании рациональных выражений, функций с корнями в знаменателе и задачах, где нужно исследовать поведение дроби при изменении x .

4

Частное: структура формулы на типовых примерах

Таблица показывает, как в разных случаях сохраняется одна и та же логика: производные обеих частей, разность в числителе и квадрат знаменателя.

Выражение	Схема	Итог
f/g	$u'v - uv'$	v^2
$1/g$	$-g'$	g^2
$x^2/(x+1)$	$2x(x+1) - x^2$	$(x+1)^2$

Во всех примерах видно одинаковое строение ответа: учитываются обе функции, а не только одна из них.

Стандартное правило дифференцирования частного, школьный курс алгебры 11 класса

Цепное правило для композиции функций

1

1. Внешняя функция

Сначала определяют, какая часть выражения действует последней: степень, корень, тригонометрическая или показательная функция.

2

2. Внутренняя функция

Затем выделяют выражение внутри скобок или под знаком функции. Именно оно является аргументом и тоже зависит от x .

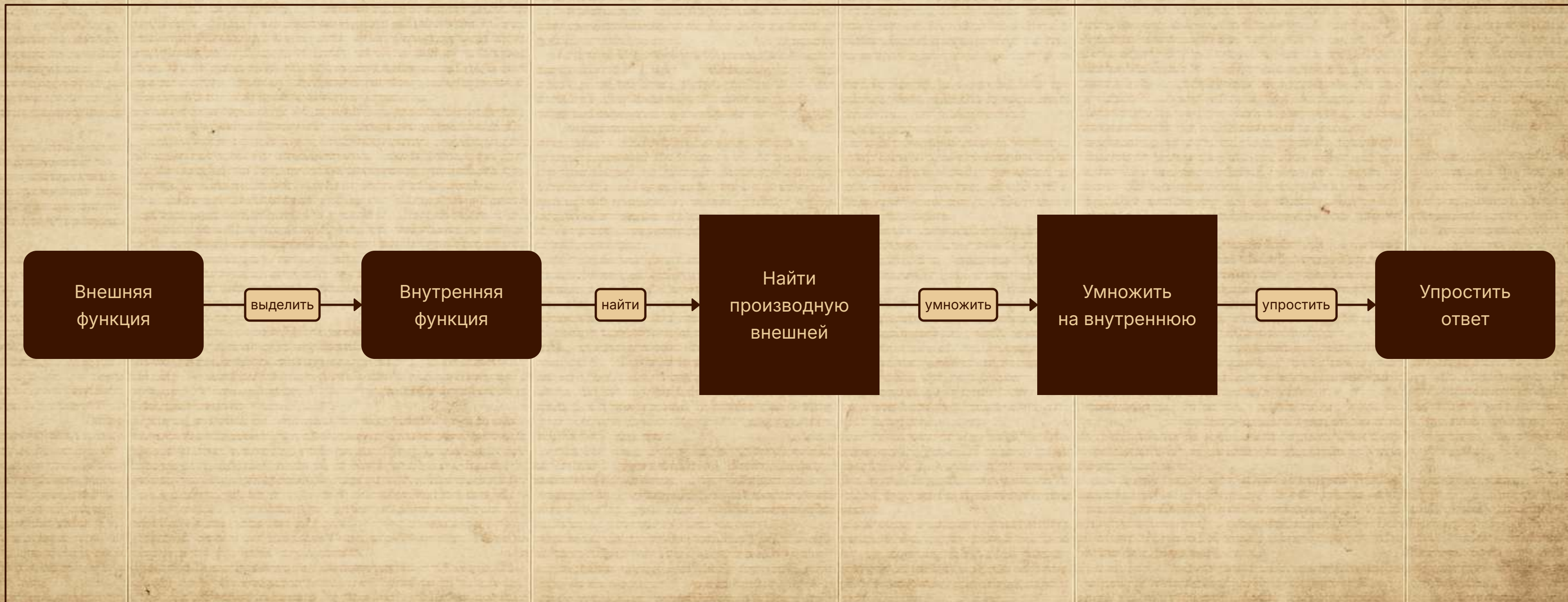
3

3. Умножение производных

После нахождения производной внешней функции по внутреннему аргументу результат умножают на производную внутренней функции. Так получается цепное правило: $y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Алгоритм нахождения производной композиции

Последовательность действий для выражения $(3x^{2+1})^5$



Внутренняя и внешняя функция на графике

Переход от x к u

На схеме удобно ввести вспомогательную переменную $u=x^2+1$. Так внутренняя часть выражения становится отдельной функцией, которую можно анализировать независимо от внешней степени.

Переход от u к y

После этого записывают $y=u^3$ и находят производную внешней зависимости по u . Затем обязательно учитывают, как быстро изменяется сама внутренняя функция.

Смысл визуализации

График помогает увидеть, что рост внутренней функции усиливается внешней степенью. Именно поэтому при дифференцировании появляется множитель от внутренней производной.



Сложные выражения, где правила комбинируются

1

Сначала определяют структуру

Прежде чем дифференцировать, нужно понять, что именно перед нами: произведение, дробь, композиция или их сочетание. Это позволяет выбрать правильную последовательность действий и избежать лишних преобразований.

2

Произведение и цепочка

В выражении $(x^2+1)\sin(3x)$ сначала применяется правило произведения, а затем к $\sin(3x)$ — цепное правило. Так производная сохраняет компактный вид и не теряет зависимость от x .

3

Дробь со степенью в знаменателе

В формуле $(x^2-1)/(x+1)^3$ удобно использовать правило частного, а степень в знаменателе раскрывать через цепное правило. Такой порядок делает вычисление короче и нагляднее.

4

Смешанные случаи

Если в одном выражении встречаются сразу несколько операций, правила применяются последовательно, от внешней структуры к внутренней. Именно поэтому $x \cdot (2x-1)^5$ требует и произведения, и цепного правила.

Производные типовых функций и появление внутренней производной

Диаграмма показывает, что у стандартных функций производная имеет короткую форму, а у составной появляется дополнительный множитель, связанный с внутренним аргументом.

Вложенность функции добавляет ещё один шаг вычисления, поэтому цепное правило становится обязательным уже на простых примерах.

Учебная иллюстрация по правилам дифференцирования; данные отражают структуру формул, а не измерения



Сводная таблица трёх правил дифференцирования

Правило	Формула	Ошибка	Пример
Произведение	$f'g+fg'$	$f'g'$	$x^2\sin x$
Частное	$(f'g-fg')/g^2$	Нет минуса	$(x^2+1)/(x-1)$
Композиция	$f'(g)\cdot g'$	Нет g'	$(2x+5)^4$

Таблица показывает, как распознавать тип выражения, какую формулу применять и какие ошибки встречаются чаще всего.

Во всех трёх случаях производная учитывает не один фрагмент выражения, а все его изменяющиеся части.

Типичные ошибки при нахождении производной

Неверная формула произведения

Самая распространённая ошибка — заменить правило произведения записью $f'g'$.

В результате теряется вклад каждого множителя, и ответ перестаёт соответствовать исходной функции.

Ошибки в частном

При дифференцировании дроби часто забывают минус, квадрат знаменателя или производную знаменателя. Особенно легко ошибиться, если выражение содержит несколько скобок и степеней.

Потерянная внутренняя производная

В цепном правиле нередко находят только производную внешней функции и забывают умножить на производную внутреннего выражения. Тогда исчезает зависимость от x , которая должна остаться.

Слабая проверка ответа

Полезно упрощать результат и подставлять простое значение x . Такая проверка помогает заметить неверный знак, лишнюю степень или отсутствие нужного множителя ещё до сдачи работы.

Как выбрать нужное правило по виду выражения

Последовательность распознавания структуры и выбора формулы дифференцирования



Связь темы с физикой и реальными процессами

Скорость изменения

В физике производная показывает, как быстро меняется величина во времени. Поэтому правила для произведения и композиции нужны там, где одна характеристика зависит сразу от нескольких факторов.

1

Путь и скорость

Если скорость меняется, то путь можно рассматривать как результат умножения и последующего дифференцирования. Такие задачи учат видеть, какие части формулы зависят от времени.

2

Электрические величины

В выражении мощности $P(t)=U(t)I(t)$ обе величины могут изменяться одновременно, поэтому для анализа используют правило произведения. Это напрямую связывает алгебру с физическим смыслом процесса.

3

Модели роста

В моделях концентрации, температуры или численности часто встречаются вложенные зависимости вида $f(g(t))$. Здесь цепное правило помогает корректно описать влияние внутреннего процесса на итоговый результат.

4



Сравнение сложности вычислений для разных типов функций

Диаграмма показывает не только формулы, но и объём действий: чем больше операций в выражении, тем внимательнее нужно выбирать порядок дифференцирования.

Сложность растёт от простой степени к комбинациям правил, поэтому сначала стоит распознавать структуру, а уже потом вычислять производную.

Учебная схема, основанная на последовательности применения правил дифференцирования



Три эталонных примера вычисления производной

1

Произведение

Для $(x^{2+1})(x^3-4)$ производная находится по правилу произведения: сначала дифференцируется первый множитель, затем второй, после чего складываются два полученных слагаемых.

2

Частное

В выражении $(x^{2+1})/(x-1)$ важно не забыть квадрат знаменателя и минус в числителе. Такой пример хорошо показывает, что дробь требует учёта обеих частей.

3

Композиция

Для $(2x+5)^4$ сначала берётся производная степени как внешней функции, а затем умножается на производную внутреннего линейного выражения. Именно так проявляется цепное правило.

Самопроверка ответа: признаки правильной структуры

Таблица помогает быстро проверить, соответствует ли найденная производная типу исходного выражения и не потеряны ли обязательные элементы формулы.

Тип	Структура	Ошибка	Проверка
Произведение	$A \cdot B$	Только $A \cdot B$	Есть два слагаемых
Частное	$(A \cdot B) / g^2$	Нет квадрата	Знаменатель в квадрате
Композиция	$f' \cdot g'$	Нет внутренней	Есть множитель g'

Если структура ответа не совпадает с типом выражения, ошибка обычно связана со знаком, степенью или пропущенной внутренней производной.

Announcement

Offered

[illegible]

Итог урока: единая логика трёх правил

Произведение, частное и композиция дифференцируются по одной идее: нужно учесть все части, зависящие от x . Именно эта логика делает вычисления точными, а анализ функций — осмысленным и уверенным.

Bus

Trade Re

They [illegible]
[illegible] [illegible]
[illegible] [illegible]
[illegible] [illegible]
[illegible] [illegible]
[illegible] [illegible]
[illegible] [illegible]

Issue

Making A

THE PLAN MAN