

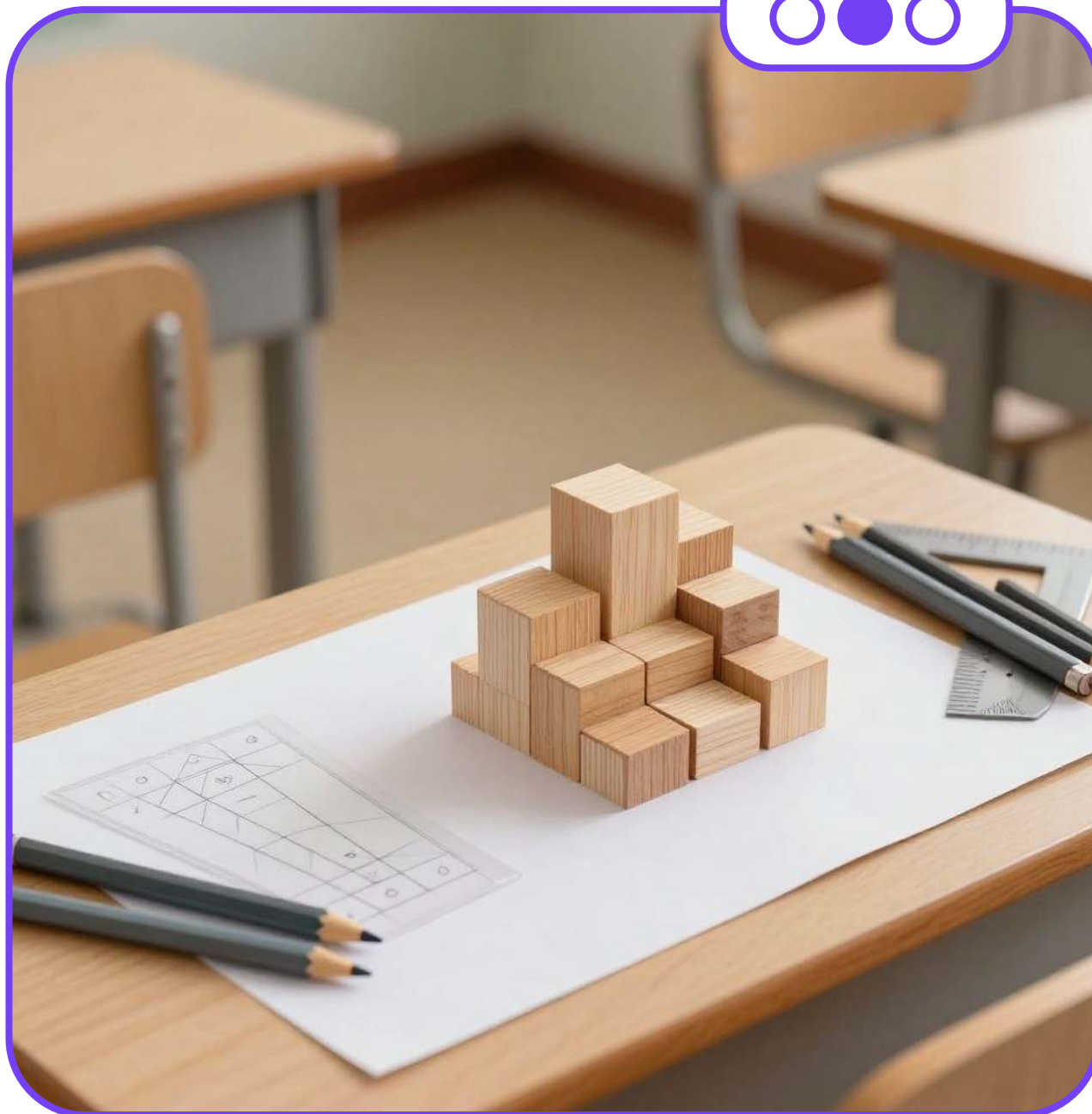
Изометрии: движения, которые сохраняют форму



Изометрии сохраняют расстояния и углы, а значит — форму и размеры фигур при перемещении.



Почему изометрии начинают изучать в 9 классе



В 9 классе изометрии помогают увидеть, как геометрические свойства связаны с координатами и симметрией. Эти знания нужны, чтобы сравнивать треугольники, находить образы точек и уверенно решать задачи на равенство фигур.

Что сохраняет изометрия

01

При изометрии длины всех отрезков сохраняются: расстояние между любыми двумя точками остаётся прежним. Поэтому фигуры не «сжимаются» и не «растягиваются» после преобразования.

02

Остаются без изменений величины углов и периметр многоугольника, а также площадь фигуры. Это и объясняет, почему исходная фигура и её образ считаются равными.

03

Меняется только положение на плоскости, а иногда и ориентация. Например, при отражении «лево» может стать «право», хотя геометрические размеры остаются такими же.

Параллельный перенос: идея и координаты



Одинаковый сдвиг

Перенос сдвигает каждую точку фигуры на один и тот же вектор: одинаковое расстояние и в одном направлении. Поэтому фигура не вращается и не отражается.



Вектор определяет направление

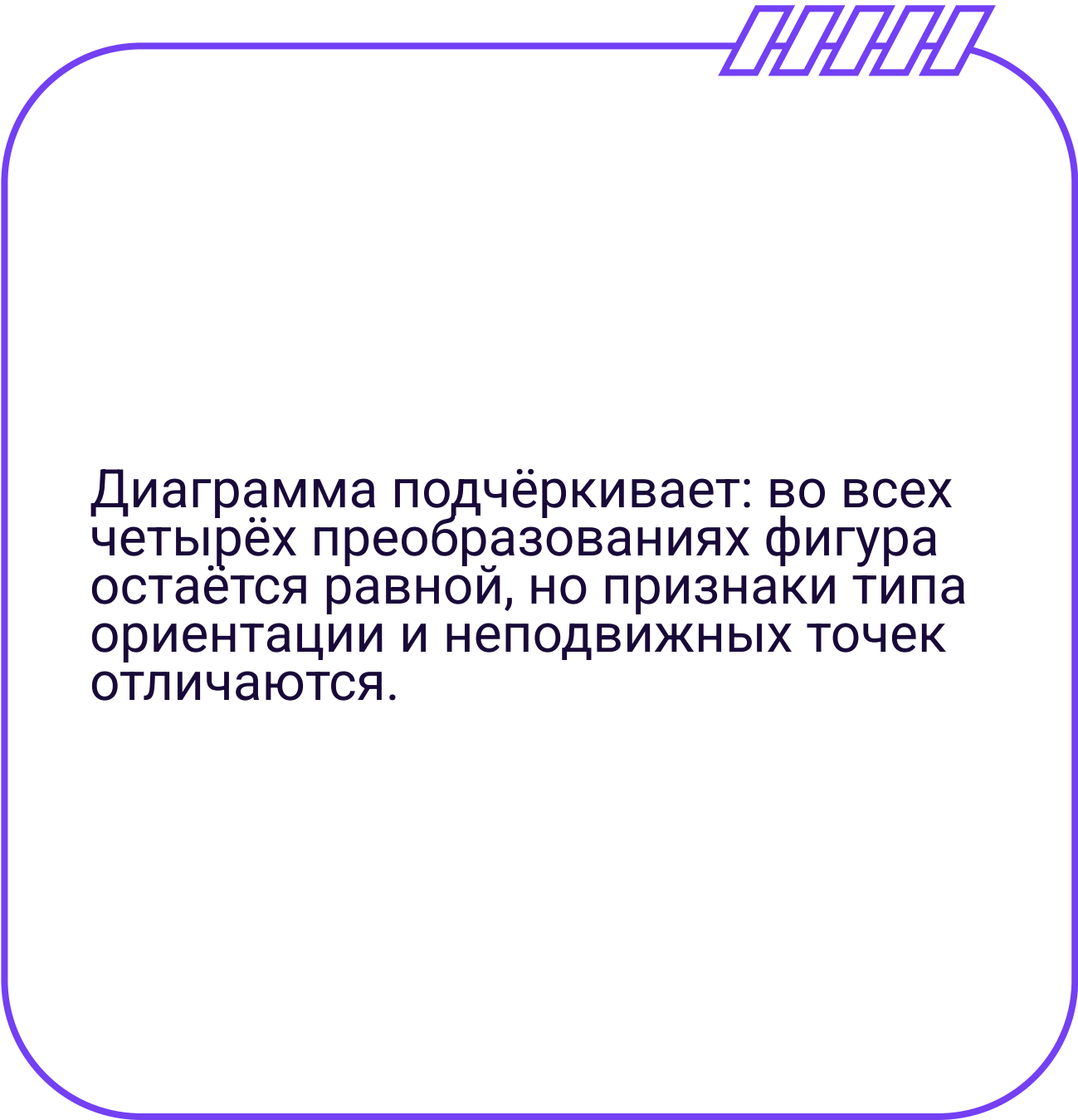
Вектор $(a; b)$ показывает, как меняются координаты: при переносе движение происходит по горизонтали на a и по вертикали на b . Это позволяет выполнить преобразование точно.



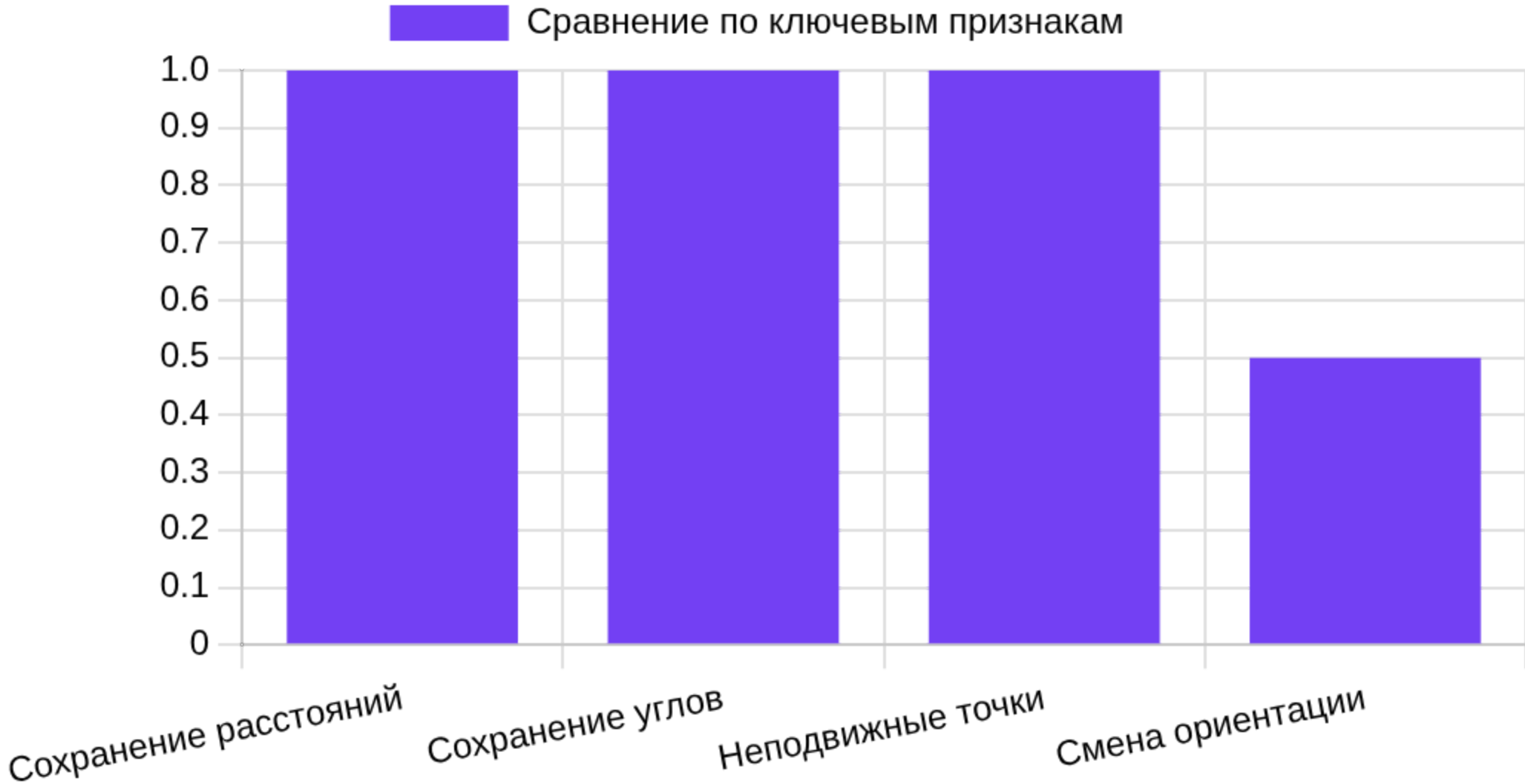
Правило для точек

Если точка $A(x; y)$ переходит в $A'(x + a; y + b)$, то образом становится каждая точка фигуры. По такому правилу удобно работать на координатной плоскости.

Основные виды изометрий: что у них общего и чем они различаются



Авторская сводная схема признаков по школьному курсу геометрии (без внешнего набора данных).



Общее свойство изометрий — сохранение формы и размеров. Различия связаны с тем, где «фиксируются» точки и как меняется направление фигуры относительно исходного положения.

Поворот вокруг точки

Поворот задают центром и углом: фигура «оборачивается» вокруг выбранной точки. Например, на 90° , 180° или 270° положение каждой вершины меняется строго по правилу.

1

При повороте каждая точка движется по окружности с одним и тем же центром поворота. Радиусы от центра до точек остаются прежними, значит длины отрезков не изменяются.

2

Углы и форма сохраняются: исходная фигура равна образу. Меняется лишь её расположение и, в зависимости от угла, может измениться ориентация относительно наблюдателя.

3

Осевая симметрия

01

При осевой симметрии каждой точке фигуры соответствует точка по другую сторону от оси. Расстояние до оси у точки и её образа одинаковое.

02

Ось симметрии — это серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему точку и её отражение. Поэтому ось «разрезает» отрезок пополам.

03

В результате форма и размеры сохраняются, а углы остаются теми же. Фигура просто разворачивается относительно оси, как в зеркале.

04

Осевая симметрия встречается в реальных объектах: многие буквы, снежинки, листья растений и элементы орнаментов имеют отражение относительно оси.

Центральная симметрия



- При центральной симметрии точка и её образ лежат на одной прямой, проходящей через центр симметрии. Центр является серединой отрезка между ними.
- Это преобразование можно рассматривать как поворот на 180° вокруг центра. Значит, фигура оказывается в точке, противоположной относительно центра, без изменения размеров и углов.
- Центральная симметрия часто встречается в узорах и задачах на середины отрезков. По ней удобно находить образы точек и строить симметричные детали.



Сравнение свойств изометрий



Обобщение свойств преобразований из школьного курса геометрии (табличная структура по учебным признакам).



Таблица показывает, что изометрии сохраняют форму и размеры, но по-разному влияют на положение, ориентацию и наличие неподвижных точек.

Вид преобразования	Длины	Углы	Ориентация	Неподвижные точки	Задаётся
Параллельный перенос	Сохр.	Сохр.	обычно нет	нет	вектор
Поворот	Сохр.	Сохр.	обычно нет	центр	центр и угол
Осевая симметрия	Сохр.	Сохр.	может меняться	точки на оси	ось
Центральная симметрия	Сохр.	Сохр.	может меняться	центр	центр

Ключевой вывод: при любом изометрическом движении фигура остаётся равной. Но «механика» различна — где фиксируются точки и как может изменяться ориентация.

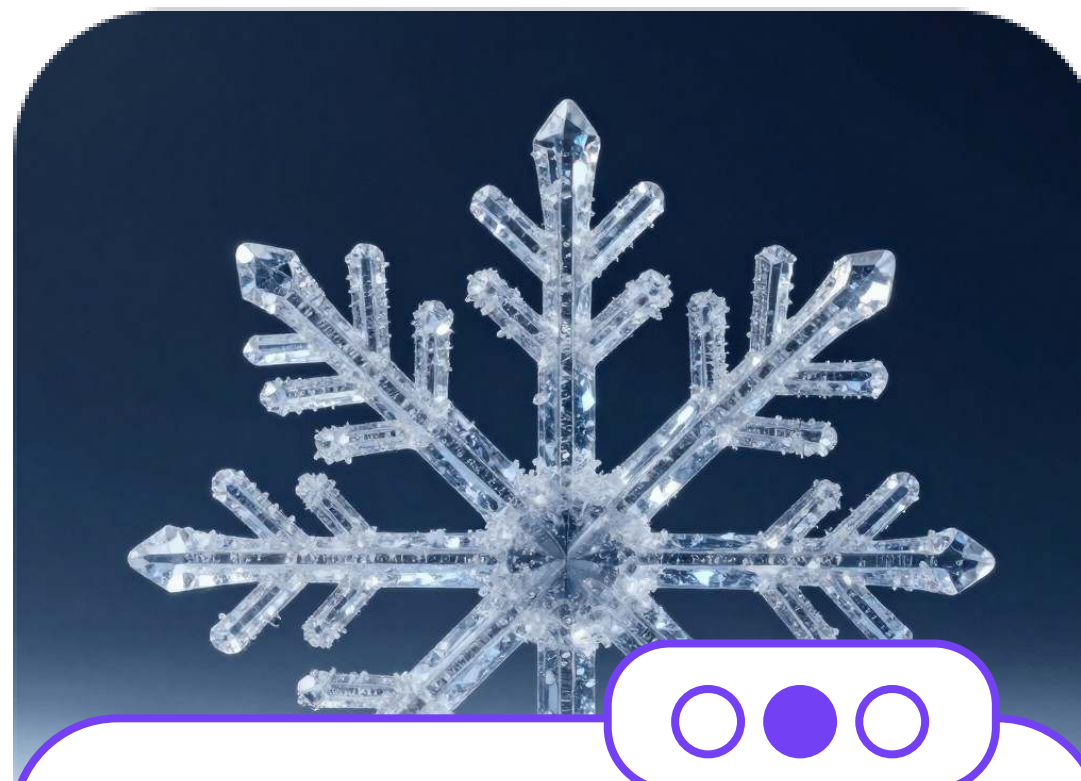


Изометрии в узорах, орнаментах и мозаиках



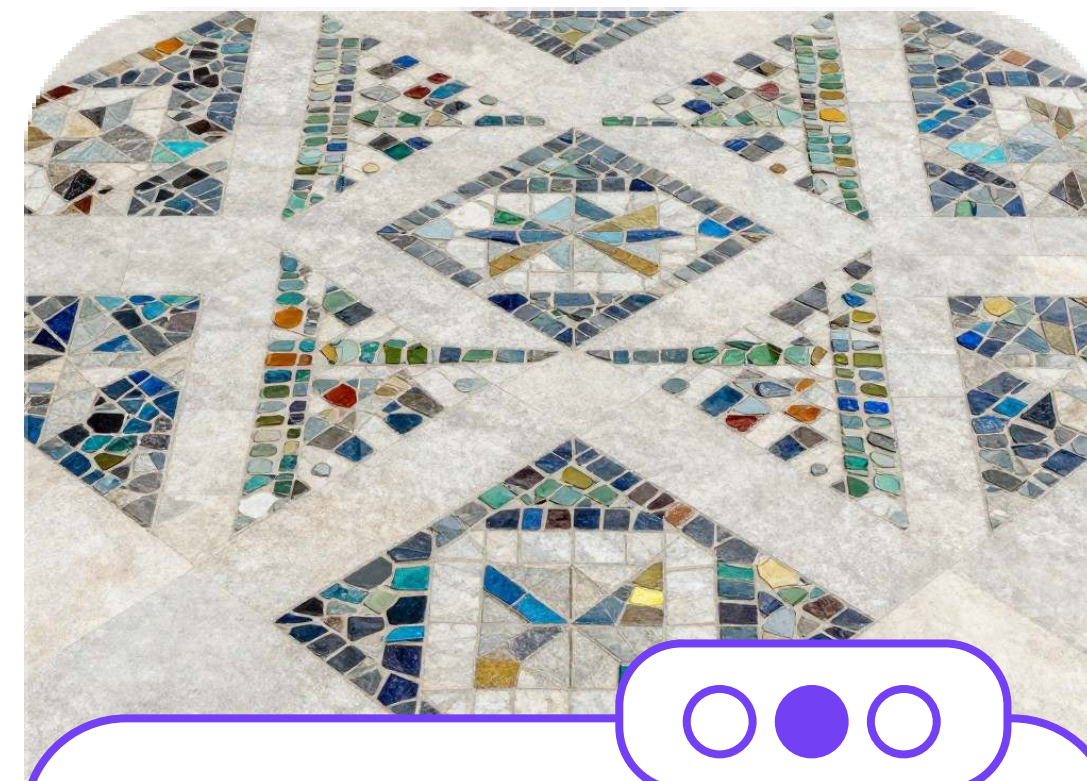
Почему орнаменты выглядят одинаково в разных местах

В орнаментах часто повторяются переносы и повороты: один и тот же мотив возвращается в композиции снова и снова. Благодаря сохранению размеров элементы не «плывут» и сохраняют форму при каждом повторе.



Снежинки как пример отражений и симметрий

У многих снежинок заметна осевая симметрия: части рисунка зеркально повторяют друг друга относительно линий. Это помогает строить узоры, где любая «ветвь» имеет парную по симметрии часть.

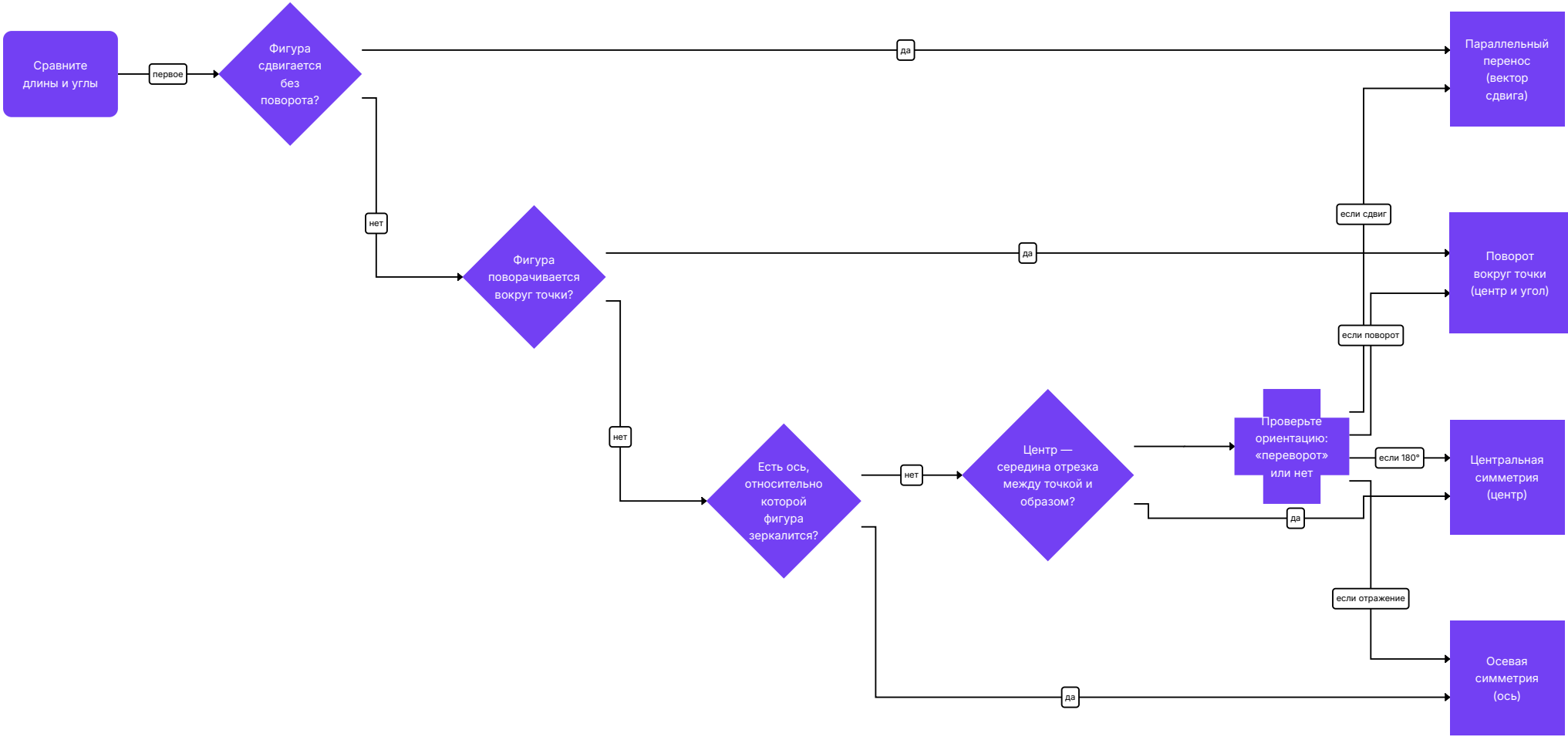


Мозаики: когда полезны и перенос, и поворот

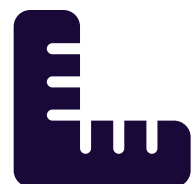
В мозаиках встречаются и переносы, и повороты, и отражения — поэтому рисунок получается регулярным. Изометрии дают возможность получать одинаковые детали в разных участках, не искажая их геометрию и пропорции.

Как определить вид изометрии по рисунку

Пошаговый анализ преобразования по свойствам точек, отрезков и ориентации фигуры.

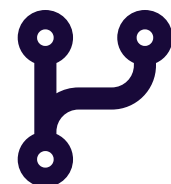


Изометрии на координатной плоскости



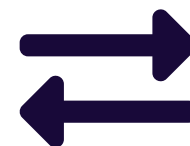
Параллельный перенос

При переносе на вектор $(a; b)$ каждая точка $A(x; y)$ переходит в $A'(x + a; y + b)$. Координаты просто «сдвигаются», форма и углы не меняются.



Симметрия относительно Ox

Если точка симметрична относительно оси Ox , то абсцисса остаётся прежней, а ордината меняет знак: $(x; y) \rightarrow (x; -y)$. Расстояния до оси сохраняются.



Симметрия относительно Oy

При симметрии относительно оси Oy меняется знак абсциссы: $(x; y) \rightarrow (-x; y)$. Ордината не меняется, а точка оказывается на таком же расстоянии от Oy .



Центральная симметрия

При центральной симметрии относительно начала координат меняются знаки обеих координат: $(x; y) \rightarrow (-x; -y)$. Это соответствует повороту на 180° вокруг начала координат.



Равные фигуры и наложение

Две фигуры равны, если одну можно совместить с другой так, чтобы все соответствующие стороны и углы совпали. В школе это удобно проверять наложением с помощью изометрии.

При наложении важно учитывать, что меняется только положение фигуры в плоскости: она не «растягивается» и не «сжимается». Тогда длины отрезков сохраняются автоматически.

Признак равенства работает и для многоугольников: достаточно установить взаимно-однозначное соответствие вершин и убедиться, что фигуры совпали при движении.

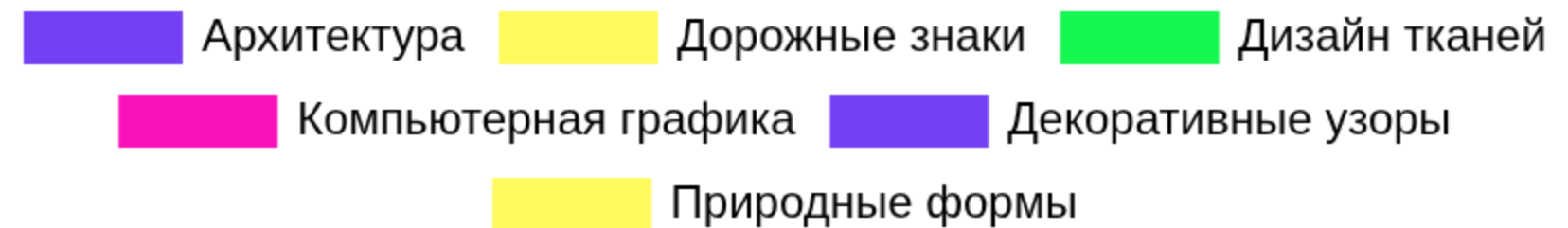
Если при попытке наложения обнаруживается изменение углов или длины стороны, значит, изометрия не подходит. Тогда нужно искать другое преобразование или считать фигуры неравными.

Где в жизни встречаются изометрии



На практике изометрии подсказывают, как повторять одинаковые элементы: фасады, орнаменты и изображения строятся так, чтобы размеры не «плыли».

Обобщение школьного курса геометрии: примеры областей применения симметрии и движений; условные равные значения (по 1).



Так как все перечисленные области опираются на повторяемость и сохранение формы, изометрии помогают организовать рисунок или модель без искажений.

Типичные ошибки при работе с изометриями

01

Часто путают поворот и отражение: при повороте фигура «вращается» вокруг центра, а при отражении появляется зеркальный эффект. Ориентацию можно проверять, сравнивая положение характерных вершин.

02

Ещё одна ошибка — неверно выбирать центр симметрии или ось отражения. Если центр не совпадает с серединой отрезка между точкой и образом, преобразование не будет изометрией.

03

Иногда забывают главное: при изометрии сохраняются длины и углы, поэтому менять сторону или величину угла нельзя. Убедитесь, что вычисления и построения не искажают размеры фигуры.

Примеры школьных задач по теме



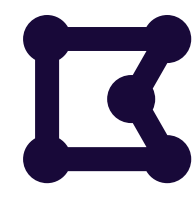
Построение образа точки

По заданному преобразованию нужно найти положение образа точки на плоскости. Обычно считают вектор сдвига, определяют центр поворота или фиксируют ось и симметрично переносят точку.



Образ отрезка и треугольника

В упражнениях требуется построить, куда перейдут концы отрезка и вершины треугольника. Важно связывать соответствующие точки и контролировать сохранение длины и углов.



Образ многоугольника на клетчатой бумаге

Клетки помогают аккуратно считать координаты. Нужно последовательно применить правило к каждой вершине и затем соединить их в том же порядке, чтобы форма сохранилась.



Поиск оси и центра преобразования

Если известны исходная и полученная фигуры, учащимся предлагается найти ось отражения или центр поворота/симметрии. Ответ проверяют: соответствующие точки должны располагаться симметрично или на одной окружности.

Что меняется и что не меняется при изометриях



Дополнительно удобно проверять ориентацию по «направлению» фигуры: отражение меняет её, а перенос и поворот обычно сохраняют. Это помогает избежать неверных выводов.

Свод правил изометрий из школьного курса геометрии; значения условные: 0 — не меняется, 1 — может меняться.

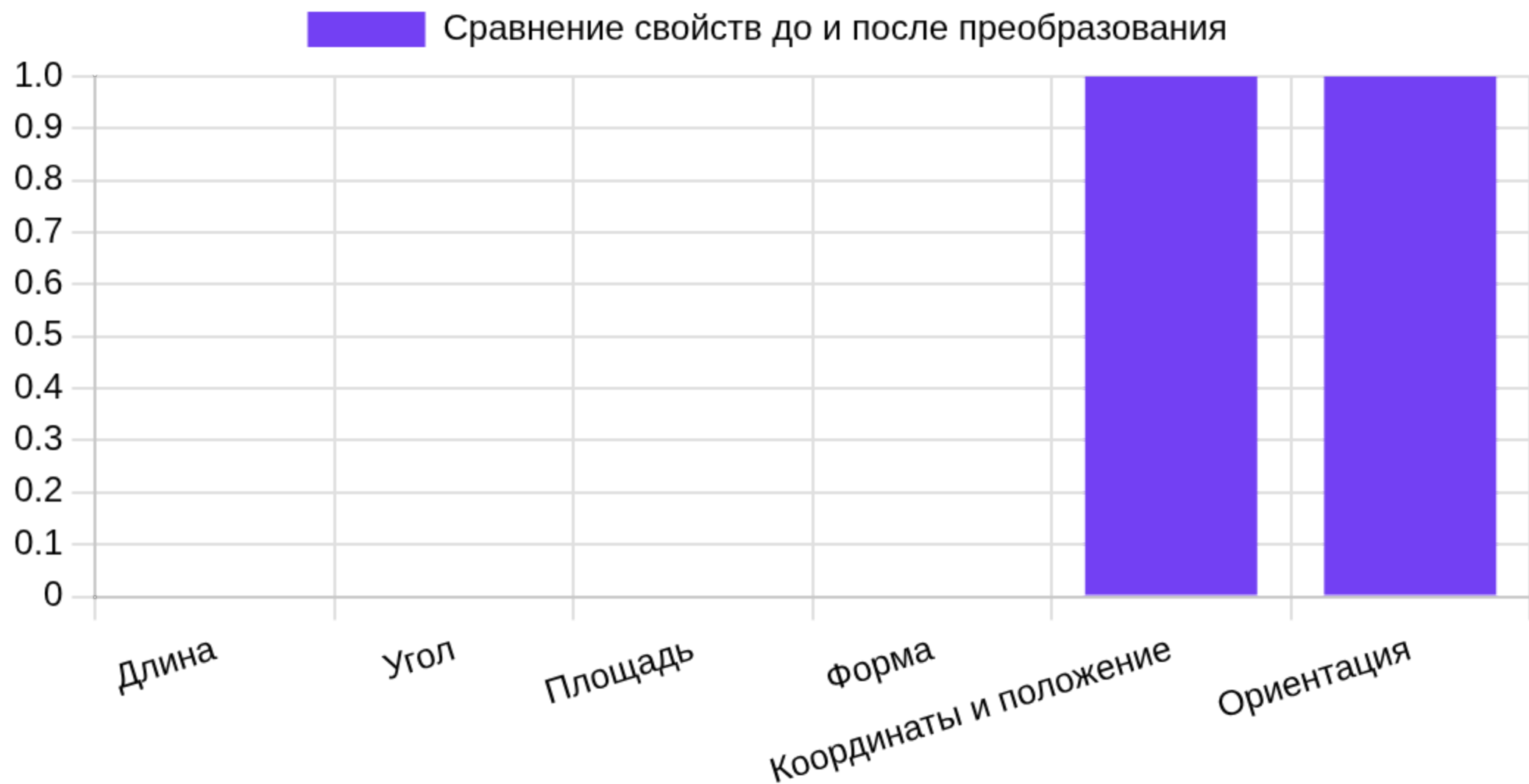


Диаграмма показывает: неизменными остаются длины, углы, площадь и общая форма, а меняются координаты и расположение на плоскости.

Изометрии в науке и технологиях

01

В компьютерной графике изометрии используют, чтобы переносить объекты по сцене без искажений. Это нужно, когда геометрия модели должна оставаться точной.

02

В робототехнике движения на плоскости часто описывают преобразованиями вокруг заданных центров. Изометрии помогают планировать траектории и корректно учитывать повороты.

03

При моделировании деталей и обработке изображений изометрические преобразования применяют для создания симметричных форм. Благодаря этому повторяющиеся элементы строятся быстрее и стабильнее.

04

Во многих программах для черчения и 3D-моделирования преобразования с сохранением формы помогают редактировать модели. Это делает работу с чертежами более точной и удобной.

4

Из четырёх основных видов изометрий легко проследить, как меняется положение фигур и что остаётся неизменным

Школьный курс геометрии (программа 9 класса):
параллельный перенос, поворот, осевая и центральная симметрия.

Изометрия – это преобразование, при котором сохраняются форма и размеры фигуры. Разные виды по-разному меняют расположение, но не искажают главные свойства.



Итоги: значение изометрий в геометрии 9 класса



Изометрии объединяют параллельный перенос, поворот и симметрии в единую тему о сохранении расстояний и углов. Они помогают доказывать равенство фигур, уверенно выполнять координатные построения и решать задачи.

