

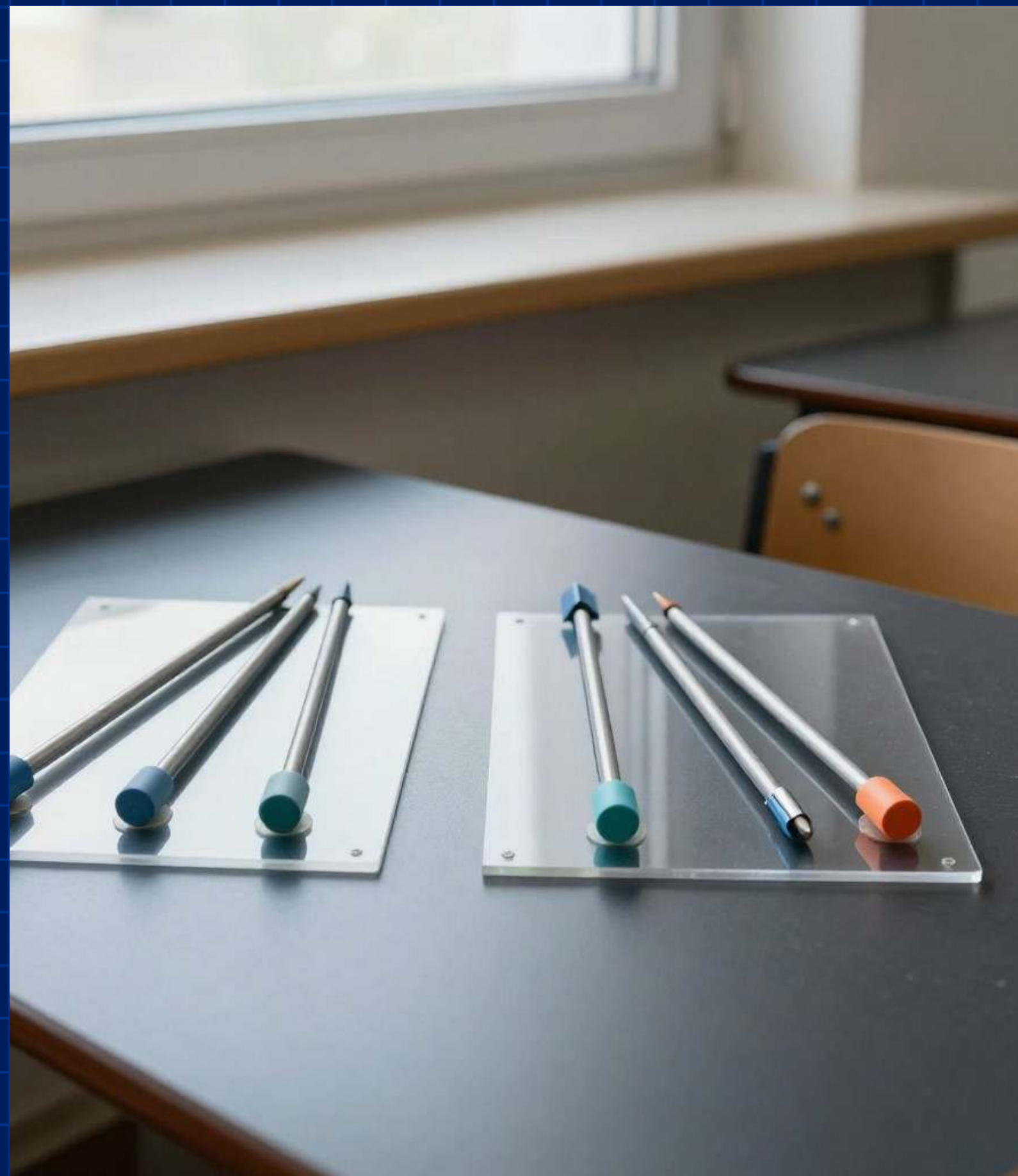
Компланарные векторы в геометрии 11 класса

Урок о том, как отличать «плоскость векторов» от «пространства» и проверять это вычислениями.

1 ÷ 2

log

8



Место темы в курсе стереометрии

4 1 2 9

В 11 классе компланарные векторы связывают планиметрию и стереометрию: они позволяют описывать плоские конфигурации в пространстве. Понятие напрямую применяют при работе с плоскостью, параллельностью и задачами на координаты.

6 7



Определение компланарных векторов

Компланарные векторы — это векторы, лежащие в одной плоскости или параллельные одной и той же плоскости. Такая «плоскостная» принадлежность задаёт общий геометрический смысл всей конфигурации.

Любые два вектора всегда компланарны: через две пересекающиеся или параллельные прямые можно провести плоскость. Поэтому для двух векторов вопрос о компланарности решается автоматически.

Для трёх векторов компланарность означает, что один из них представим через два других линейной комбинацией. Иными словами, вся тройка «умещается» в одной плоскости благодаря алгебраической связи.



Геометрический смысл компланарности

1

log



Плоскость как «каркас»

В пространстве компланарность показывает, что рассматриваемая конфигурация не выходит в третье измерение. Это важно именно тогда, когда привычных «плоских» чертежей недостаточно.



Грани параллелепипеда

Если три вектора «расположены» на одной грани куба или параллелепипеда, то они компланарны. Диагонали такой грани и направления рёбер естественно описываются в одной плоскости.



Радиус-векторы точек

Когда точки лежат в одной плоскости, их радиус-векторы тоже компланарны. Конфигурация будто сохраняет общий плоский «профиль», позволяя применять координатные проверки.

2

x

Примеры компланарных и некомпланарных векторов

1

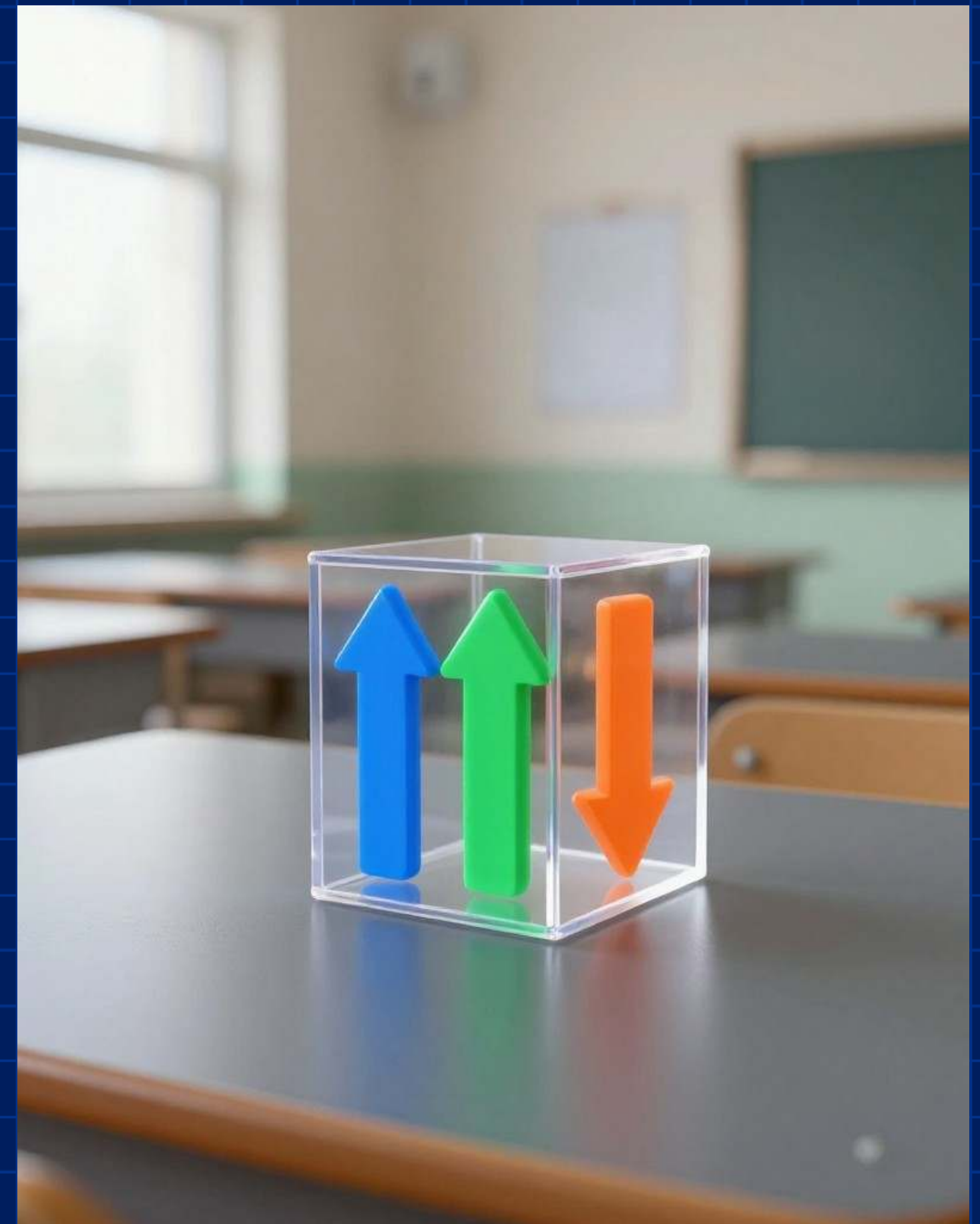
2

Компланарные случаи

Два любых вектора можно считать компланарными: плоскость всегда найдётся. Три вектора, лежащие на одной грани куба, тоже компланарны, так как все их направления описываются в одной плоскости.

Некомпланарные случаи

Если взять три ребра куба, исходящие из одной вершины, они обычно образуют объёмную тройку и не лежат в одной плоскости. Аналогично, три вектора, задающие такой «объём», некомпланарны – их нельзя свести к одной плоскости.



Признаки компланарности

Геометрический	Алгебраический	Координатный
Две плоскости? нет: в одной	Один через два	$\det 3 \times 3 = 0$
(Для двух векторов) всегда компланарны		$[a, b, c] = 0$

Согласование признаков для трёх векторов в школьной стереометрии

Три разных подхода – геометрический, алгебраический и координатный – дают единый ответ о принадлежности одной плоскости.

Для трёх векторов признаки взаимосвязаны: компланарность равносильна равенству нулю смешанного произведения и определителя 3×3 .

Смешанное произведение и объем



Учебная интерпретация смешанного произведения и формулы объёма параллелепипеда (школьная стереометрия)

Нулевое смешанное произведение означает, что «ориентация» тройки не даёт объёма параллелепипеда: значит, векторы компланарны.

График подчёркивает качественный переход: ноль соответствует плоской конфигурации, ненуль — выходу в пространство и некомпланарности.



Координатный признак удобно применять,
когда даны x, y, z : достаточно проверить
детерминант 3×3 для трёх векторов.

0

**Если этот определитель
равен нулю, значит
смешанное произведение
также равно нулю.**

Свойства определителя и смешанного произведения в координатной геометрии

Алгоритм проверки компланарности в задаче

Проверяем тройку векторов через определитель 3×3 (или эквивалентно смешанное произведение).



Линейная зависимость и плоскость

1 Если три вектора компланарны, то они линейно зависимы: один из них выражается через два других. Так алгебра фиксирует геометрическую «плоскость» этой тройки.

2 Два неколлинеарных компланарных вектора определяют базис плоскости. Любой вектор, лежащий в той же плоскости, представляется через них с помощью двух коэффициентов, отражающих нужные направления.

3 Эта связь помогает решать задачи без громоздких чертежей: вместо поиска плоскости выполняют проверку линейной зависимости и затем находят коэффициенты разложения при необходимости.

Разложение вектора по двум базисным векторам

sin

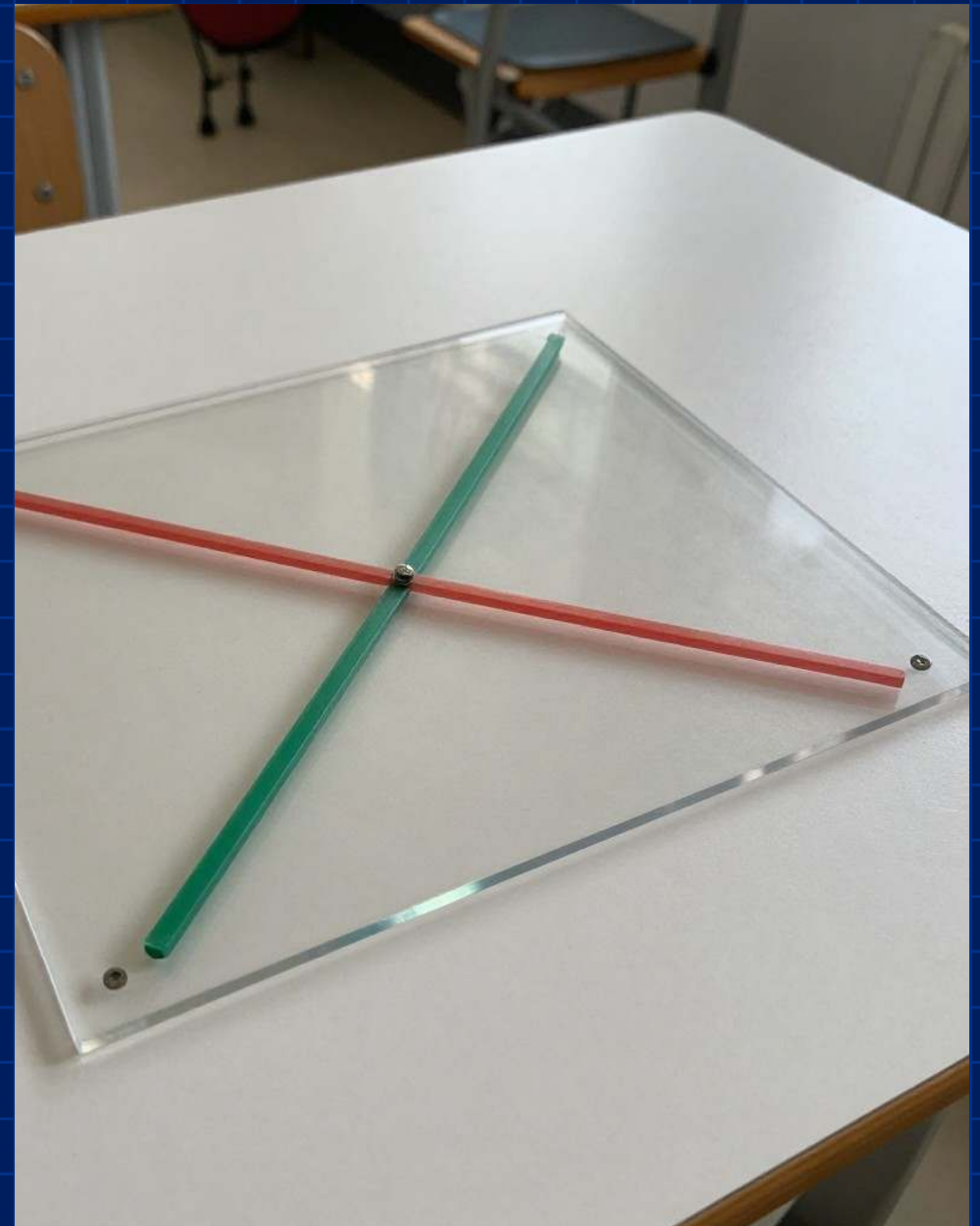


x

y

z

- Если два неколлинеарных вектора a и b лежат в одной плоскости, то любой вектор p этой плоскости можно разложить по ним: $p = \alpha a + \beta b$. Коэффициенты α и β задают, «в каком направлении» и «в каком масштабе» складывается p .
- На схеме обычно показывают два базисных вектора плоскости, координатную сетку и результирующую диагональ. Изменяя α и β , получают разные векторы плоскости, но все они остаются в пределах одной и той же плоскости.



Сколько векторов нужно проверять



Условная учебная схема на основе критериев компланарности (формулы в школьном курсе, без внешних данных)

Для двух векторов решение не требует проверки: плоскость всегда найдётся. Для трёх — ключевое условие нулевости определителя или смешанного произведения, для четырёх и более важно, что все они должны лежать в одной плоскости.

Диаграмма подчёркивает рост сложности: с добавлением векторов пространство «настаивает» на третьем измерении, и именно поэтому появляется необходимость в алгебраической проверке.

Основные формулы и критерии

Ситуация	Признак	Что следует
2 вектора	всегда	компланарны
3 вектора	$\det = 0$	компланарны
3 вектора	$[a,b,c] = 0$	компланарны
3 вектора	линейная завис.	компланарны
2 неколлинеарн.	—	базис плоскости
Вывод	алгебраически точно	проверяем плоские/пространственные конфигурации

Учебная систематизация по определениям и стандартным критериям (определитель/смешанное произведение, линейная зависимость)

Таблица систематизирует критерии компланарности и связанные алгебраические факты: от универсального случая для двух векторов до проверки для трёх и обобщения через линейную зависимость.

Все перечисленные критерии для трёх векторов сводятся к единому проверяемому условию: плоская конфигурация соответствует нулевому смешанному произведению и $\det = 0$.

Связь с уравнением плоскости

Задание плоскости через направления

Плоскость описывают точкой и двумя направляющими векторами, либо точкой и нормальным вектором. Это превращает геометрию в работу с координатами и векторами.

Использование компланарности трёх векторов

Если три вектора компланарны, то они могут быть направляющими одной плоскости. Тогда их удобно применять, чтобы выбрать два направляющих и построить уравнение плоскости.

Проверка принадлежности точек плоскости

Координаты векторов позволяют проверять, лежит ли точка в плоскости: достаточно подставить её в полученное уравнение или оценить согласованность направляющих с вектором от опорной точки.

Типичные ошибки в задачах

Часто путают компланарность и коллинеарность: коллинеарные векторы лежат на одной прямой, а компланарные – на одной плоскости. В задачах с определителем это приводит к неверному выводу о пространственной тройке.

Ещё одна ошибка – забывать очевидный факт: любые два вектора всегда компланарны, потому что через две пересекающиеся или параллельные прямые можно провести плоскость. Поэтому проверка нужна только при трёх и более векторах.

Наконец, критично аккуратно вычислять определитель 3×3 или смешанное произведение: одна ошибка в знаках или порядке строк способна изменить нулевое значение на ненулевое и «перевернуть» ответ о плоской конфигурации.

$$x^2 + 4x - 8$$

Объем как числовой признак некомпланарности



Учебная связь смешанного произведения и объема параллелепипеда (школьная математика); числовые значения отражают знаковый/качественный признак

Смысл смешанного произведения особенно нагляден: оно связано с объемом параллелепипеда, построенного на трёх векторах. Нулевое значение означает отсутствие «выхода» в третье измерение.

Если объем равен нулю, три вектора не образуют пространственную тройку и являются компланарными. Если объем положителен, они некомпланарны.

Применения компланарности в задачах



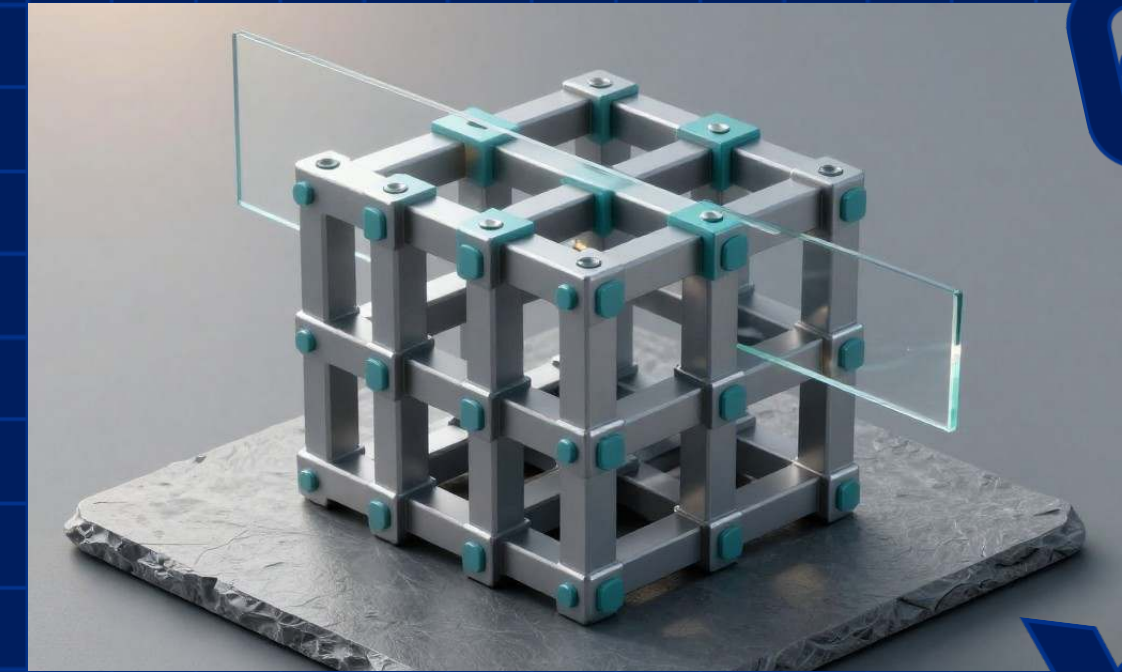
Доказать, что точки лежат в одной плоскости

На рисунке отмечены точки, и по их координатам нужно понять: «плоская» ли конфигурация. Компланарность векторов, составленных от опорной точки, помогает строго обосновать принадлежность плоскости без лишних чертежей.



Силы на одной плоскости: когда можно сводить модель

Представьте, что несколько сил направлены вдоль векторов, описывающих действие на деталь. Если эти векторы компланарны, модель можно анализировать в одной плоскости, упрощая вычисления и выводы о суммарном эффекте.



3D-модель: проверка «не уехала ли» фигура в пространство

При построении объёмной модели важно понять, осталось ли выбранное сечение плоским. Условие компланарности позволяет проверить, соответствуют ли элементы одной плоскости, и избежать ошибок при сборке или проектировании.

Стандартный способ решения задач



Шаг 1: выпишите векторы и их координаты

Сначала определите, какие именно векторы даны, и запишите их координаты. Если векторы выражены через точки, удобнее начинать с вычисления разностей координат.



Шаг 2: выберите критерий компланарности

Далее используйте подходящий критерий: определитель 3×3 , смешанное произведение или линейную зависимость. Для трёх векторов эти методы согласуются и дают проверяемый результат.



Шаг 3: сделайте вывод и при необходимости разложите

После вычислений сформулируйте вывод: компланарны или нет. Если нужно подтвердить плоскую структуру, выразите один вектор через два других и найдите коэффициенты.



Краткая памятка для проверки

Условие	Результат	Вывод
$\det = 0$	—	векторы компланарны
$\det \neq 0$	—	векторы некомпланарны
$[a, b, c] = 0$	—	компланарность
один вектор = $\alpha b + \beta c$	есть	линейная зависимость
2 вектора	всегда	компланарны

Учебные критерии компланарности: определитель, смешанное произведение и линейная зависимость

Краткая таблица помогает быстро выбрать нужную проверку: для трёх векторов смотрят определитель или смешанное произведение, для общего случая опираются на линейную зависимость, а два вектора проверять не нужно.

Все рабочие проверки сходятся к одной идее: компланарность трёх векторов равносильна нулевому объёму (смешанному произведению) и $\det = 0$.

Компланарность — точный мост между геометрией и алгеброй

Компланарность объединяет геометрию, координаты и алгебру: для двух векторов плоскость существует всегда, а для трёх важно проверить $\det$ и смешанное произведение. Это ускоряет решения, помогает различать плоские и пространственные конфигурации и уверенно работать с уравнением плоскости.



cos

sin

1

tg

ctg