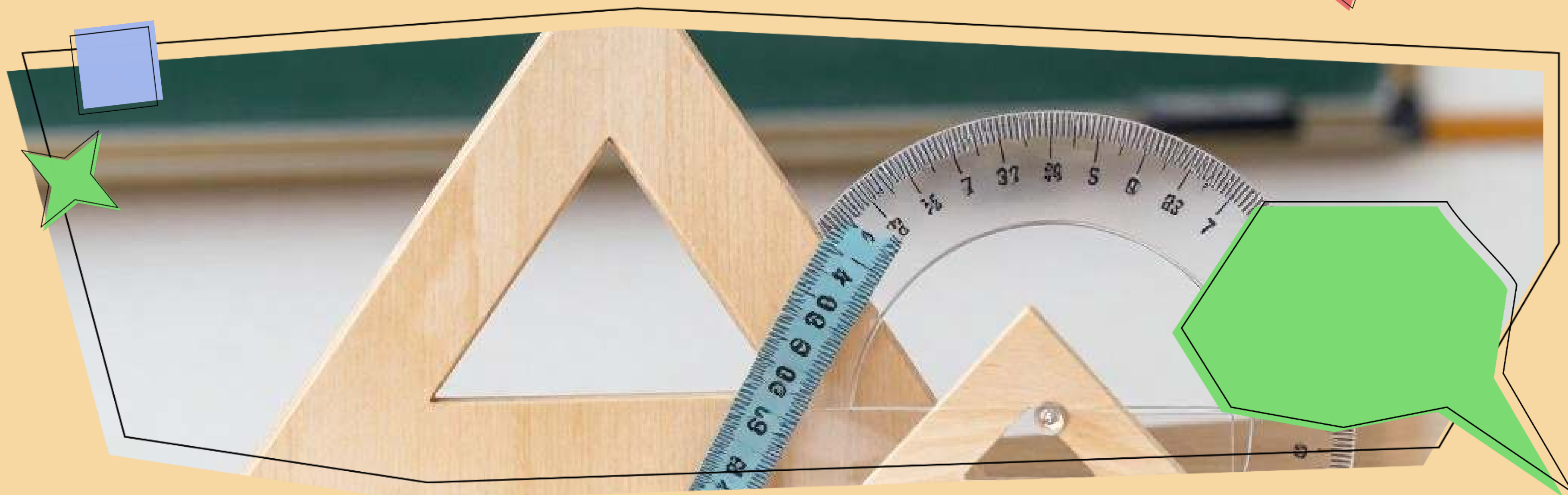


Тригонометрия: наука об измерении треугольников

Узнаем, как углы помогают измерять стороны
и решать задачи.



Зачем тригонометрия нужна в 9 классе

Тригонометрия помогает находить высоты, расстояния и наклоны там, где линейка бессильна. В 9 классе она связывает прямоугольный треугольник, теорему Пифагора, стандартные углы и координаты, закладывая основу для алгебры, физики и черчения.



Что изучает тригонометрия

1. Связь величин

Тригонометрия рассматривает, как углы в треугольнике связаны с длинами его сторон. Благодаря этому можно переходить от геометрического рисунка к точным вычислениям и получать ответ без прямого измерения.

2. Удобная модель

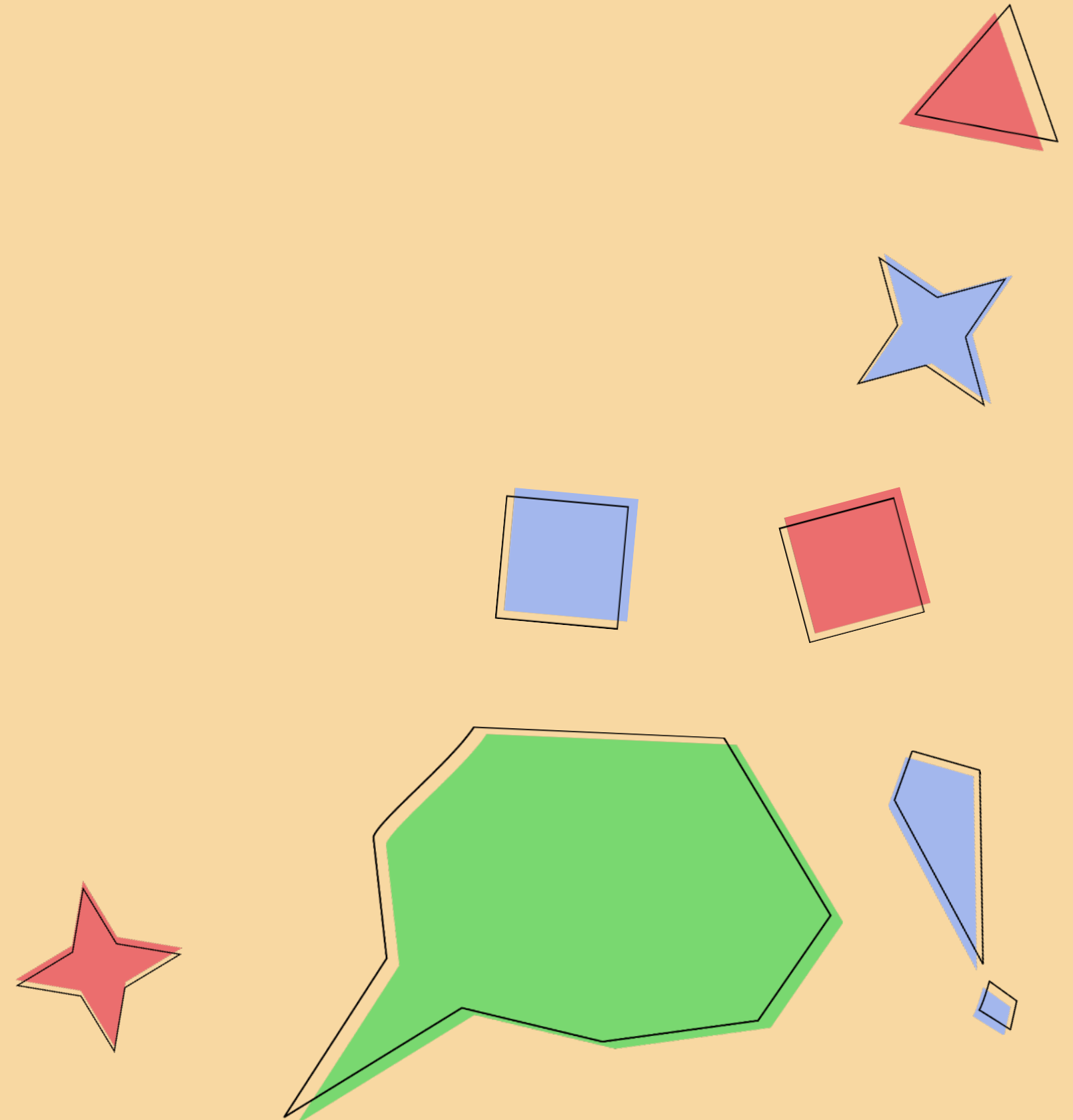
В школьном курсе основное внимание уделяют прямоугольному треугольнику. В нём легко выделить катеты и гипотенузу, а затем записать отношения, из которых строятся тригонометрические функции.

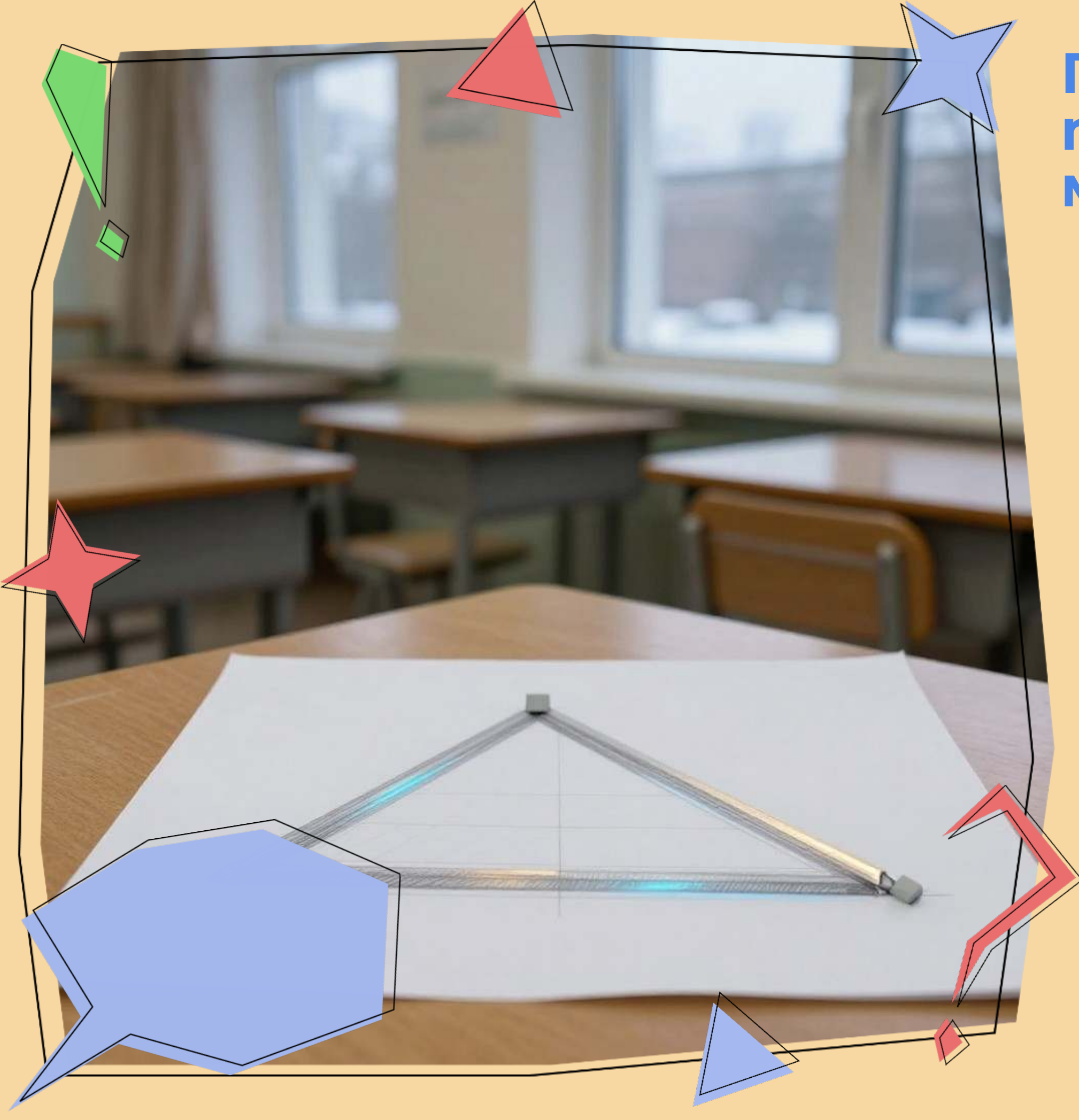
3. Главные функции

Синус, косинус и тангенс не описывают длину одной стороны отдельно. Они показывают, как одна сторона относится к другой, поэтому особенно полезны в задачах на нахождение неизвестных элементов.

4. Точность вычислений

Такая система позволяет решать задачи на измерение более надёжно, чем приблизительная оценка на глаз. Именно поэтому тригонометрия стала важной частью школьной геометрии и практических расчётов.





Прямоугольный треугольник как основная модель

Главный угол

В этой фигуре один угол всегда равен 90° , а два других остаются острыми. Именно наличие прямого угла делает треугольник удобным для введения тригонометрических отношений.

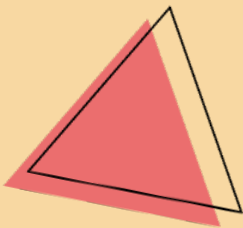
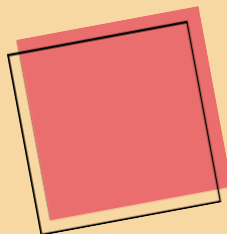
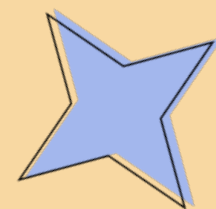
Стороны фигуры

Сторона напротив прямого угла называется гипотенузой и всегда самая длинная. Две другие стороны — катеты; они образуют прямой угол и служат основой для формул.

Выбор угла

Обычно на чертеже отмечают один острый угол, например α . От него зависят названия катетов: один становится противолежащим, другой — прилежащим, и это важно для правильной формулы.

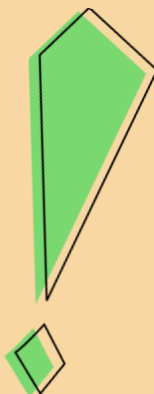
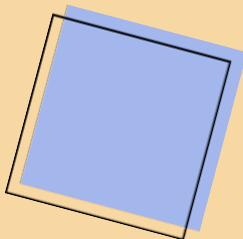
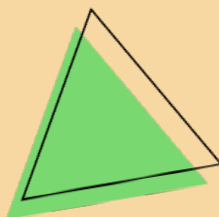
Основные тригонометрические функции в прямоугольном треугольнике



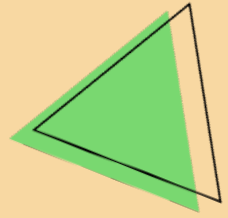
Функция	Отношение	Смысл
$\sin \alpha$	противолежащий / гипотенуза	высота угла
$\cos \alpha$	прилежащий / гипотенуза	горизонталь угла
$\tan \alpha$	противолежащий / прилежащий	наклон угла

Таблица показывает, какие отношения сторон соответствуют $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ и $\tan \alpha$.

Функции описывают не сами стороны, а их соотношения; поэтому они позволяют находить неизвестные элементы треугольника.



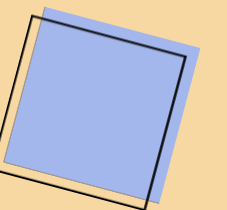
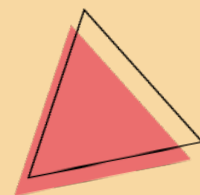
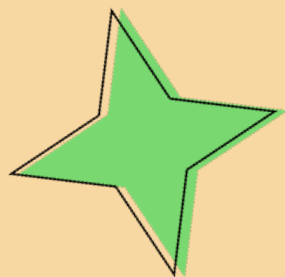
Как меняются значения функций при увеличении угла

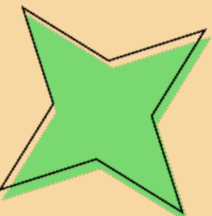
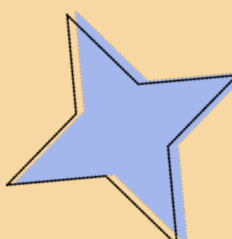
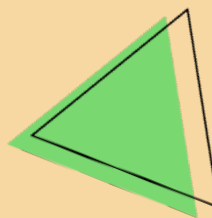
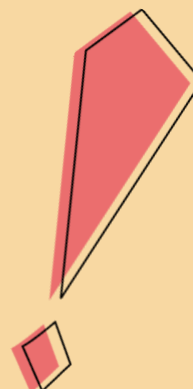
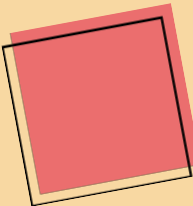
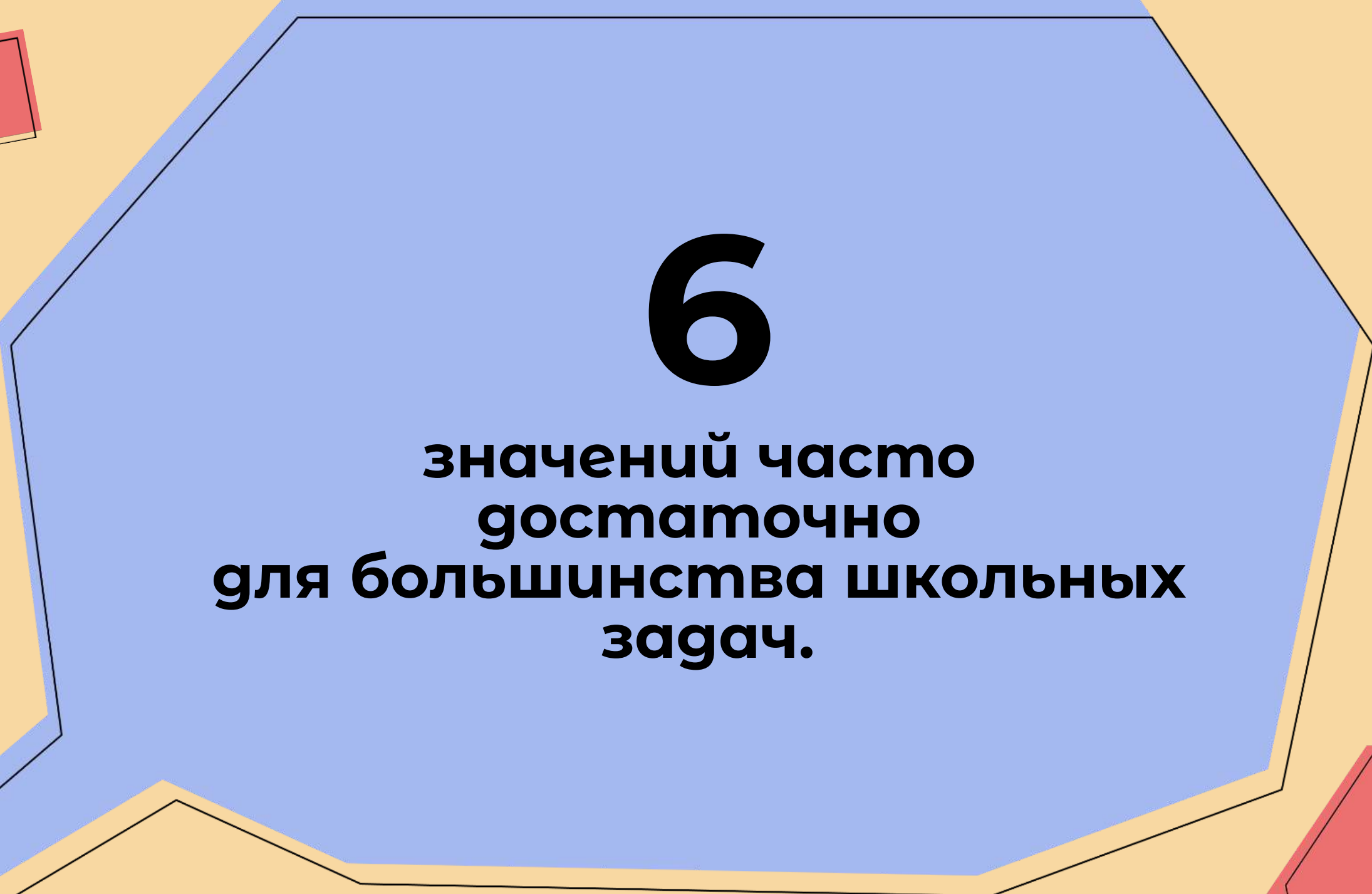


По мере роста угла меняется не только численное значение функции, но и сама форма отношения между сторонами треугольника.

Синус растёт, косинус убывает, а тангенс увеличивается особенно резко; это помогает связывать угол с крутизной и наклоном.

Школьные значения для 0° , 30° , 45° , 60° и 90°

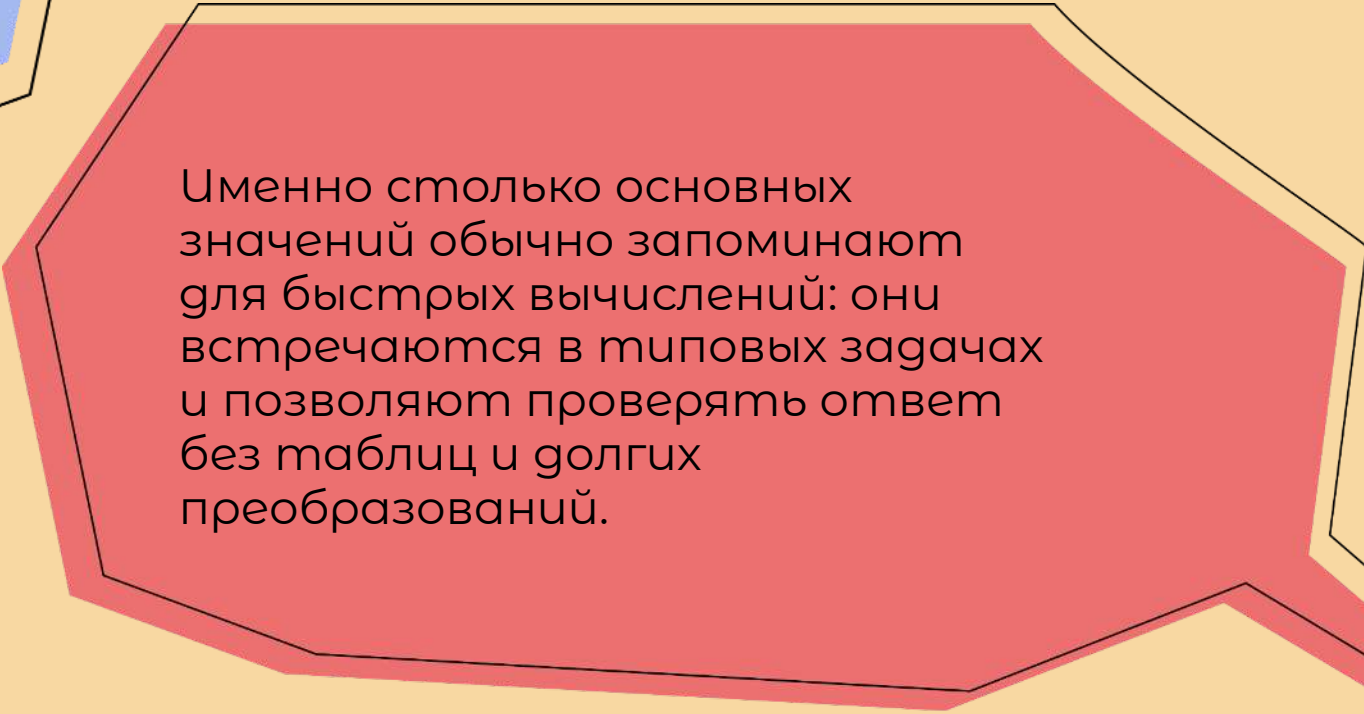




6

**значений часто
достаточно
для большинства школьных
задач.**

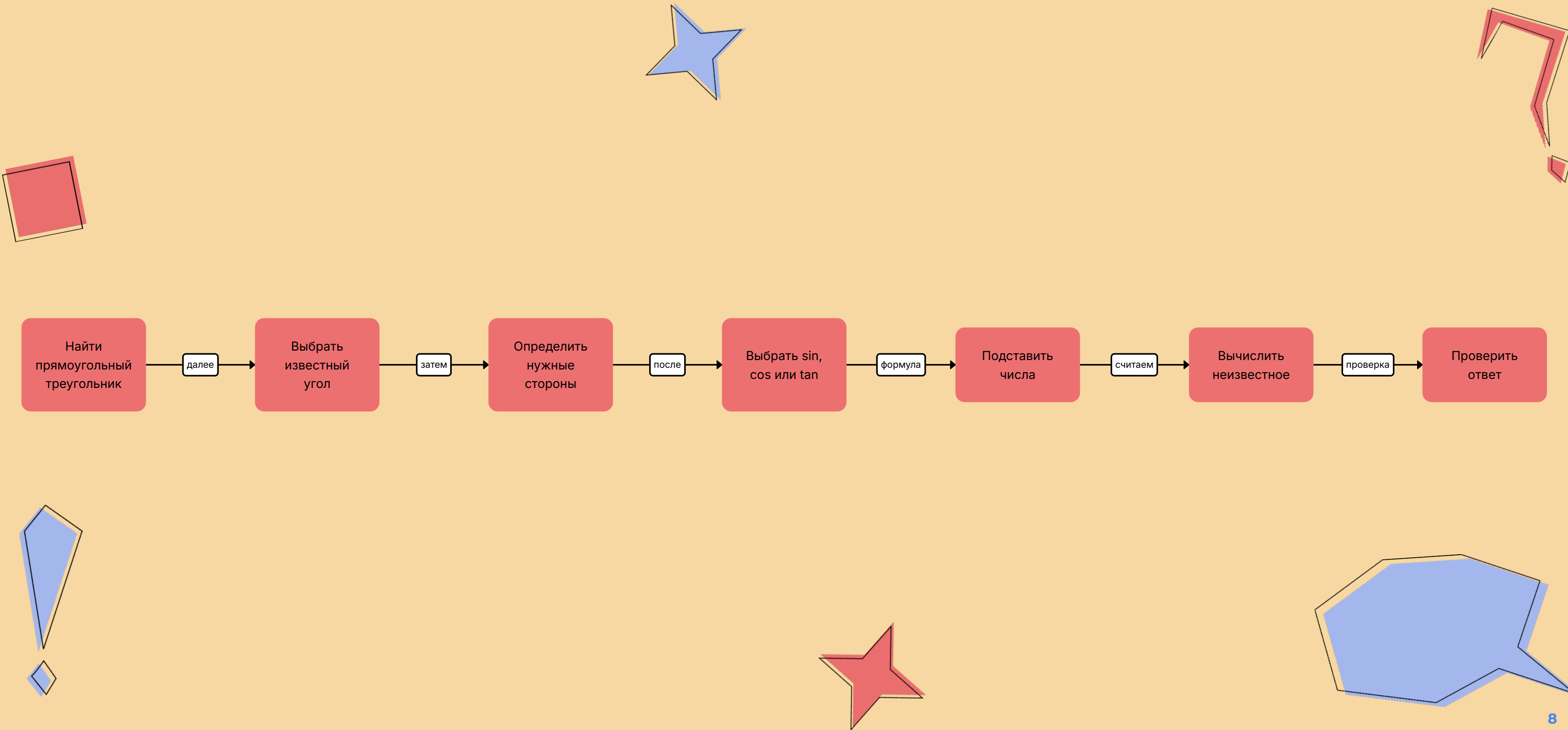
Школьный курс геометрии, 9 класс



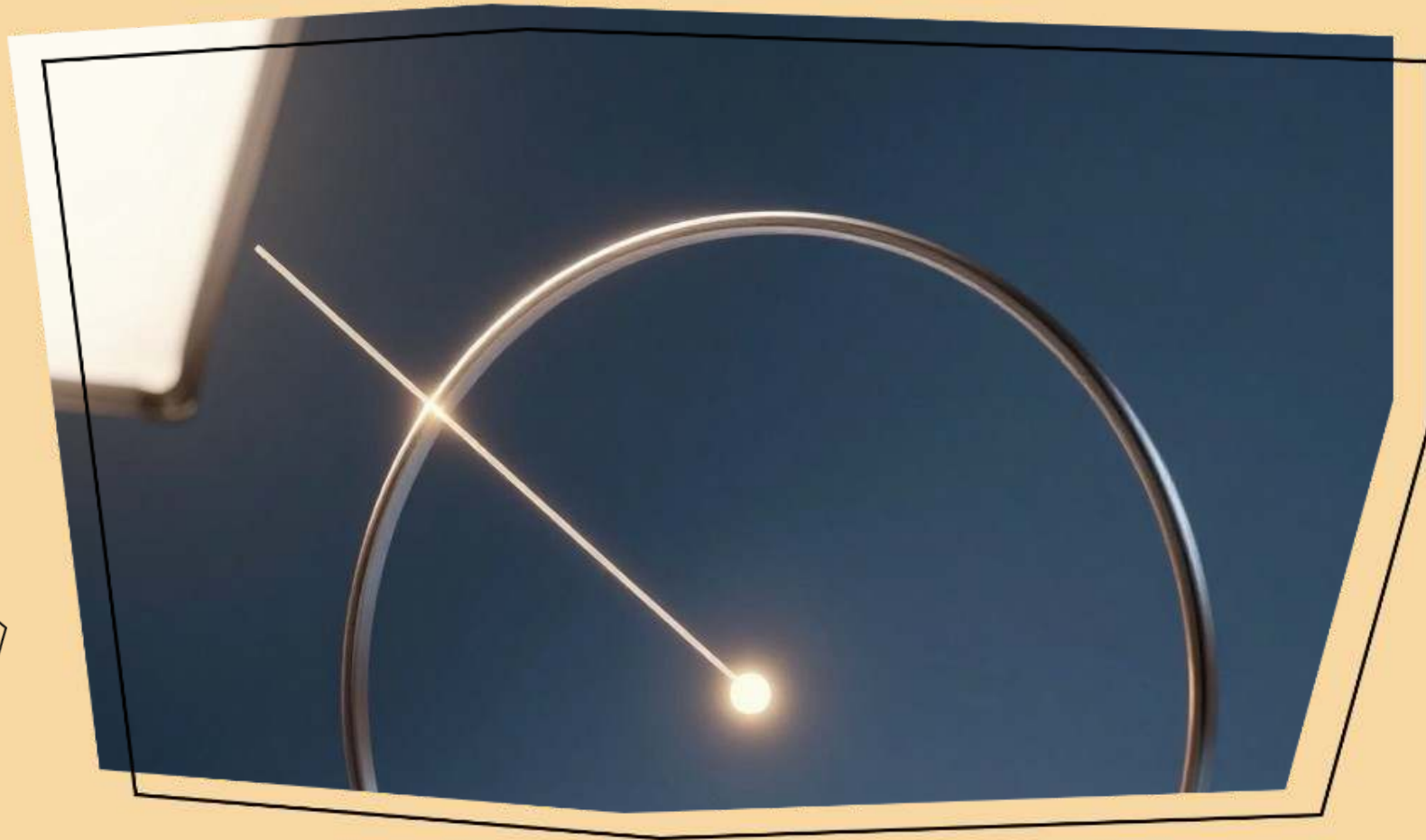
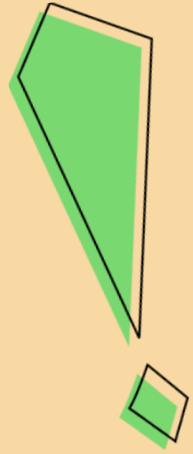
Именно столько основных значений обычно запоминают для быстрых вычислений: они встречаются в типовых задачах и позволяют проверять ответ без таблиц и долгих преобразований.

Как найти неизвестную сторону

Последовательность действий при решении задач на прямоугольный треугольник

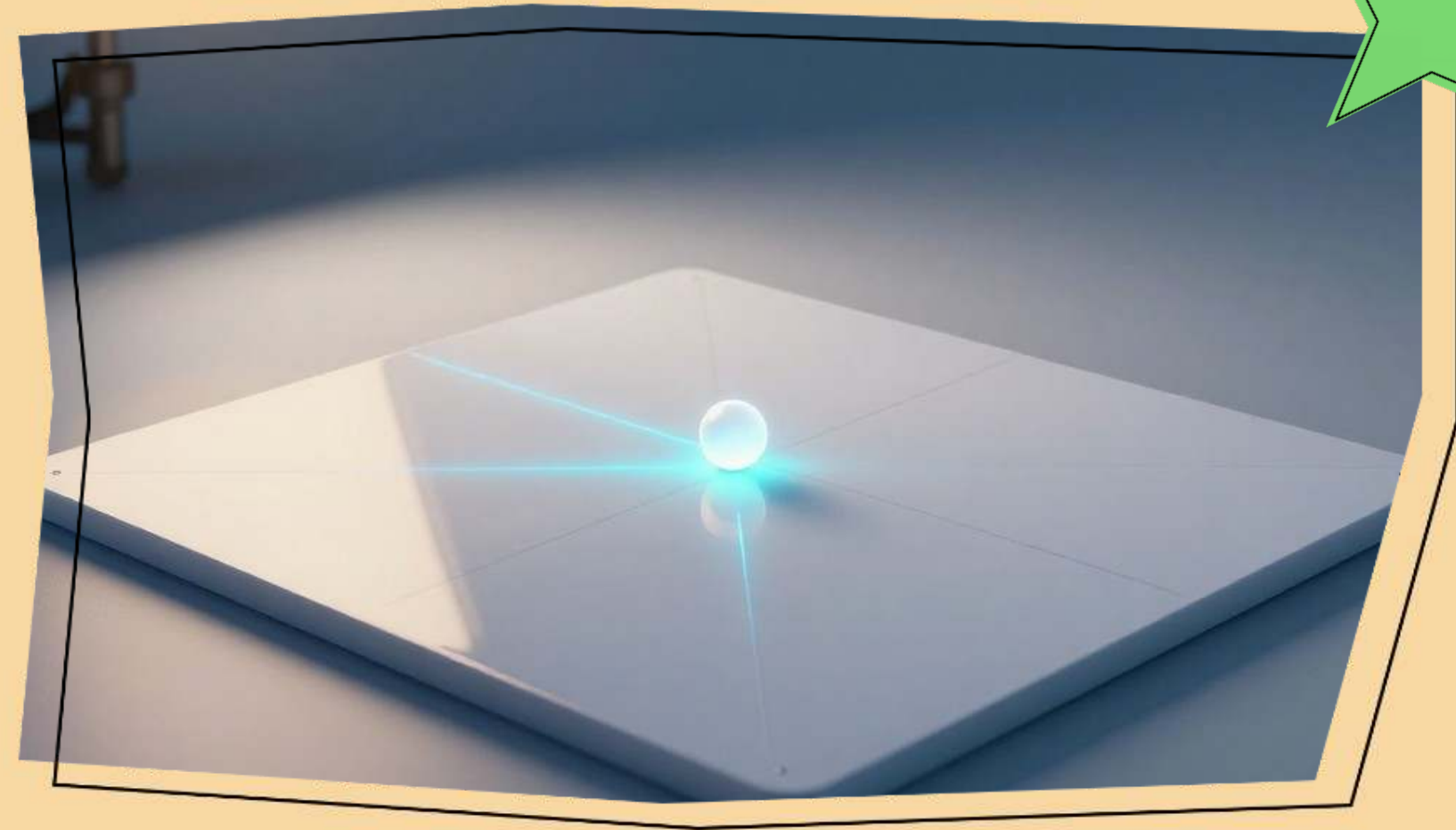
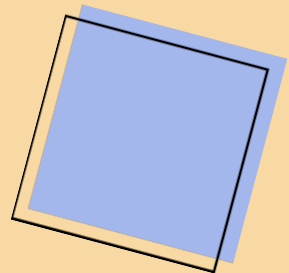


Едини́чная окру́жность и координаты точек



Точка на окружности

Едини́чная окру́жность имеет радиус 1 и центр в начале координат. Если провести луч под углом α , он пересечёт окружность в одной точке, и именно её положение станет главным объектом изучения.



Координаты как ответы

Для этой точки абсцисса равна $\cos \alpha$, а ордината — $\sin \alpha$. Так тригонометрия переходит от геометрического рисунка к координатной плоскости и помогает описывать положение точки точно и наглядно.

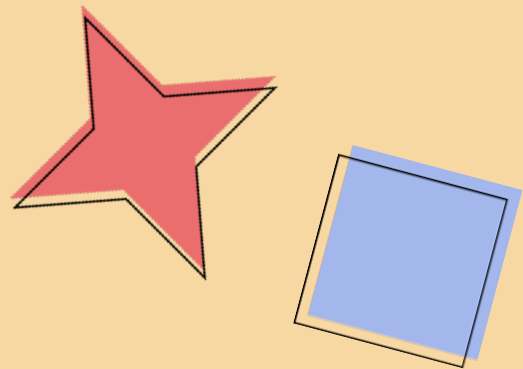


Градусы и радианы в школьной математике

1.

Две системы

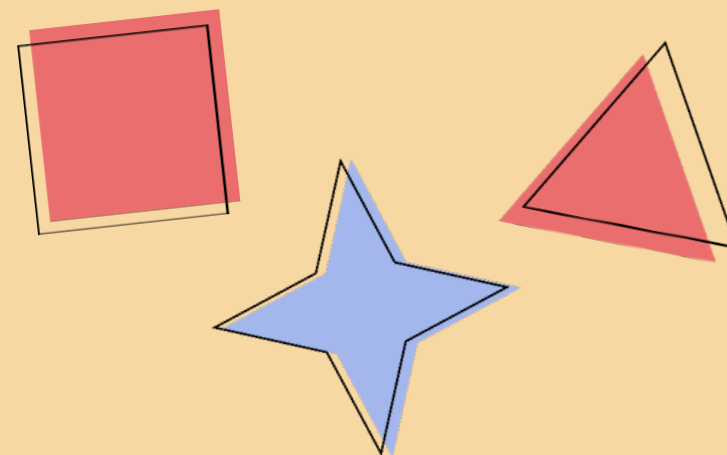
Градусная мера делит полный круг на 360 частей, поэтому она привычна в школьных задачах. Радианная мера связана с длиной дуги и становится удобной в более продвинутых формулах.



2.

Главное соотношение

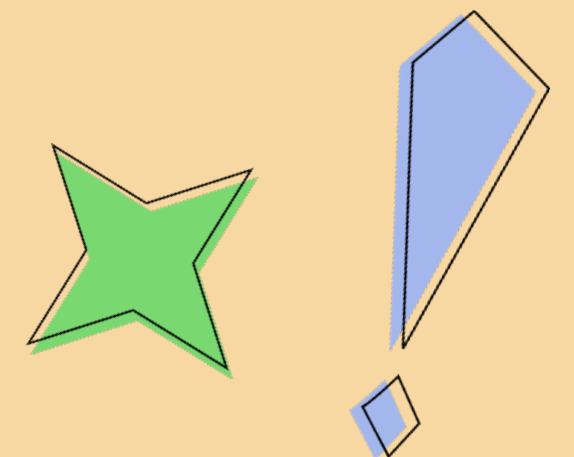
Перевод между системами опирается на равенство $180^\circ = \pi$ радиан. Его полезно помнить, потому что оно позволяет быстро менять запись угла, не теряя его величину.



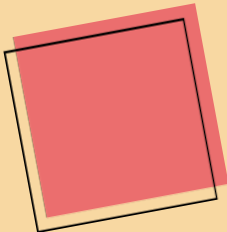
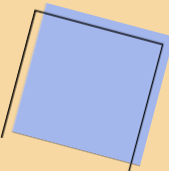
3.

Зачем это нужно

В 9 классе чаще используют градусы, но радианы понадобятся позже при изучении функций и графиков. Поэтому важно понимать обе записи и уметь узнавать одну и ту же величину в разных формах.

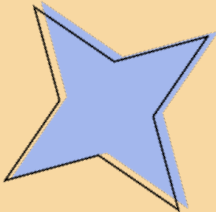
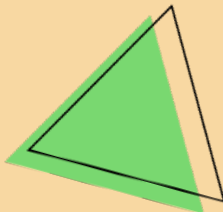


Соответствие градусной и радианной меры



Градусы	Радианы
0°	0
30°	$\pi/6$
45°	$\pi/4$
60°	$\pi/3$
90°	$\pi/2$
180°	π

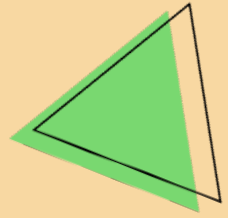
Школьный курс математики, 9 класс; основные стандартные углы



Основные значения углов удобно сравнивать в двух системах: градусной и радианной. Такая запись помогает быстрее читать формулы, строить графики и выполнять преобразования в задачах.

Один и тот же угол можно записать по-разному, но его величина не меняется. Знание соответствий ускоряет вычисления и снижает число ошибок.

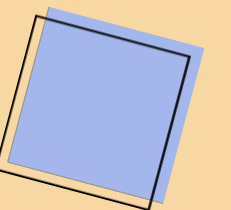
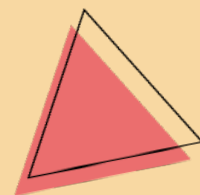
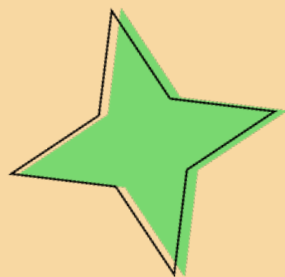
Где применяются тригонометрические знания



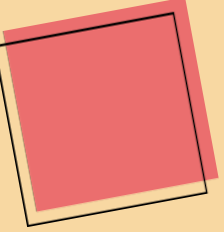
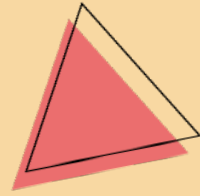
Тригонометрия особенно полезна там, где нужно определить размеры или положение объекта без прямого измерения, например по углу обзора или наклону.

Больше всего тригонометрия востребована в практических расчётах, связанных с пространством, движением и точным измерением.

Схематическое распределение сфер применения по материалам школьного курса математики



История возникновения тригонометрии



Древняя Греция

Греческие астрономы начали составлять таблицы для расчётов положений светил. Эти работы заложили основу будущих тригонометрических методов и связи между углами и длинами.

Птолемей

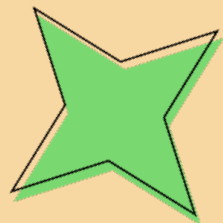
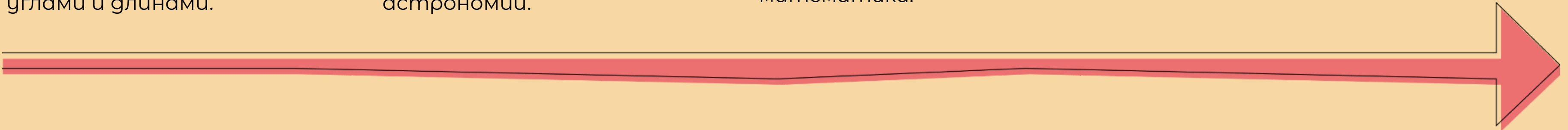
Клавдий Птолемей развил идеи таблиц хорд в астрономическом труде «Альмагест». Его вычисления долго использовались как важный источник для практической астрономии.

Индия

Индийские математики ввели понятия, близкие к современному синусу, и сделали вычисления удобнее. Это заметно продвинуло развитие тригонометрии как отдельного раздела математики.

Арабский и европейский этап

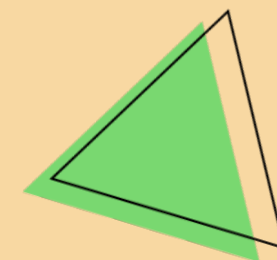
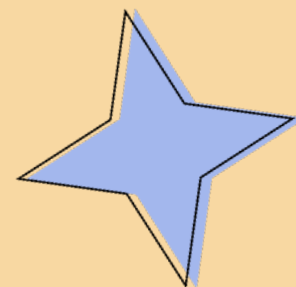
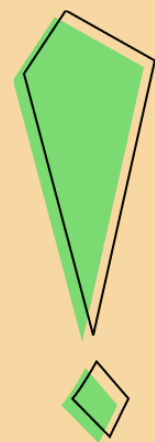
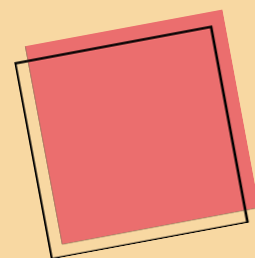
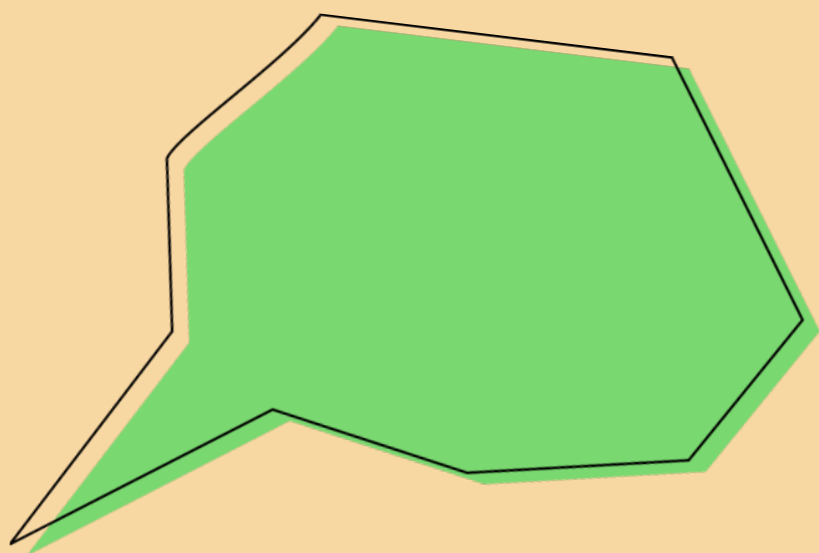
Арабские учёные сохранили и расширили античные знания, а затем передали их Европе. Так тригонометрия стала частью научной традиции Нового времени.



Связь тригонометрии и теоремы Пифагора

Проверка сторон

В прямоугольном треугольнике теорема Пифагора помогает проверить, согласуются ли найденные значения сторон: сумма квадратов катетов должна быть равна квадрату гипотенузы.

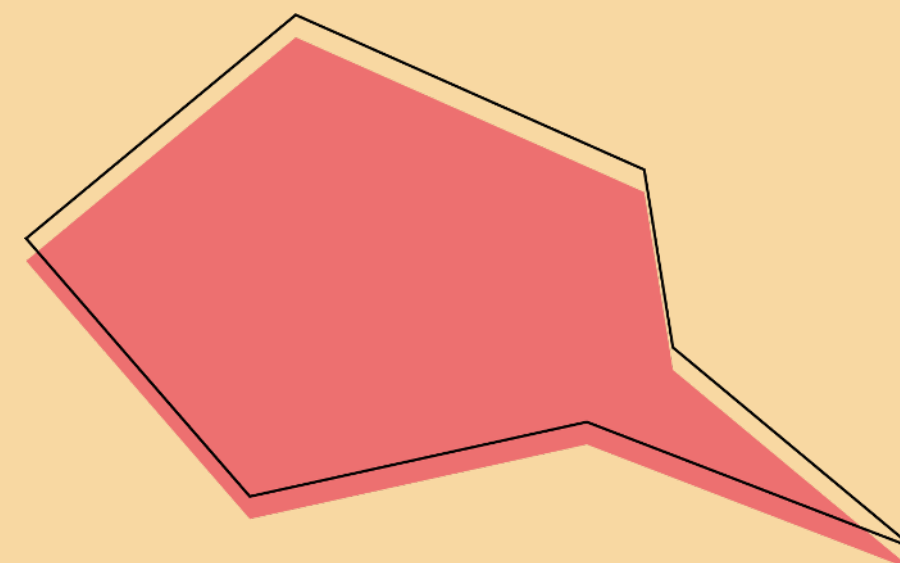


Связь с функциями

Из определений синуса и косинуса следует тождество $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Оно показывает, что тригонометрические отношения связаны между собой не случайно, а закономерно.

Одна система

Пифагорово соотношение и тригонометрические формулы дополняют друг друга: одно помогает находить длины, другое — выражать их через угол. Вместе они образуют цельную модель треугольника.



Пример практической задачи: нахождение высоты здания

1. Собираем данные

Сначала определяют расстояние от точки наблюдения до основания здания и измеряют угол подъёма взгляда. Эти две величины задают условия для применения тангенса.

2. Составляем формулу

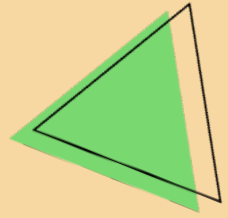
Высота здания, расстояние по земле и тангенс угла образуют прямоугольный треугольник. Поэтому неизвестную высоту находят по формуле $\tan \alpha = \text{противолежащий катет} / \text{прилежащий катет}$.

3. Проверяем ответ

После вычислений важно оценить результат: высота должна быть больше расстояния по земле и соответствовать реальному объекту. Такая проверка помогает заметить ошибки в расчётах.



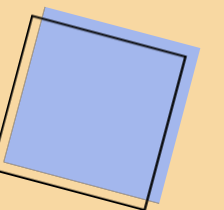
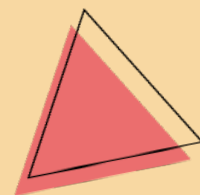
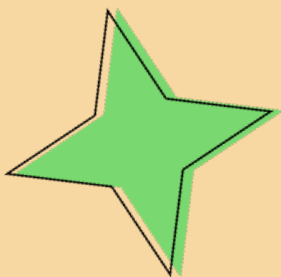
Почему тангенс растёт особенно быстро



Тангенс удобно использовать для описания крутизны, потому что он резко меняется при увеличении угла и быстро показывает разницу между пологим и крутым наклоном.

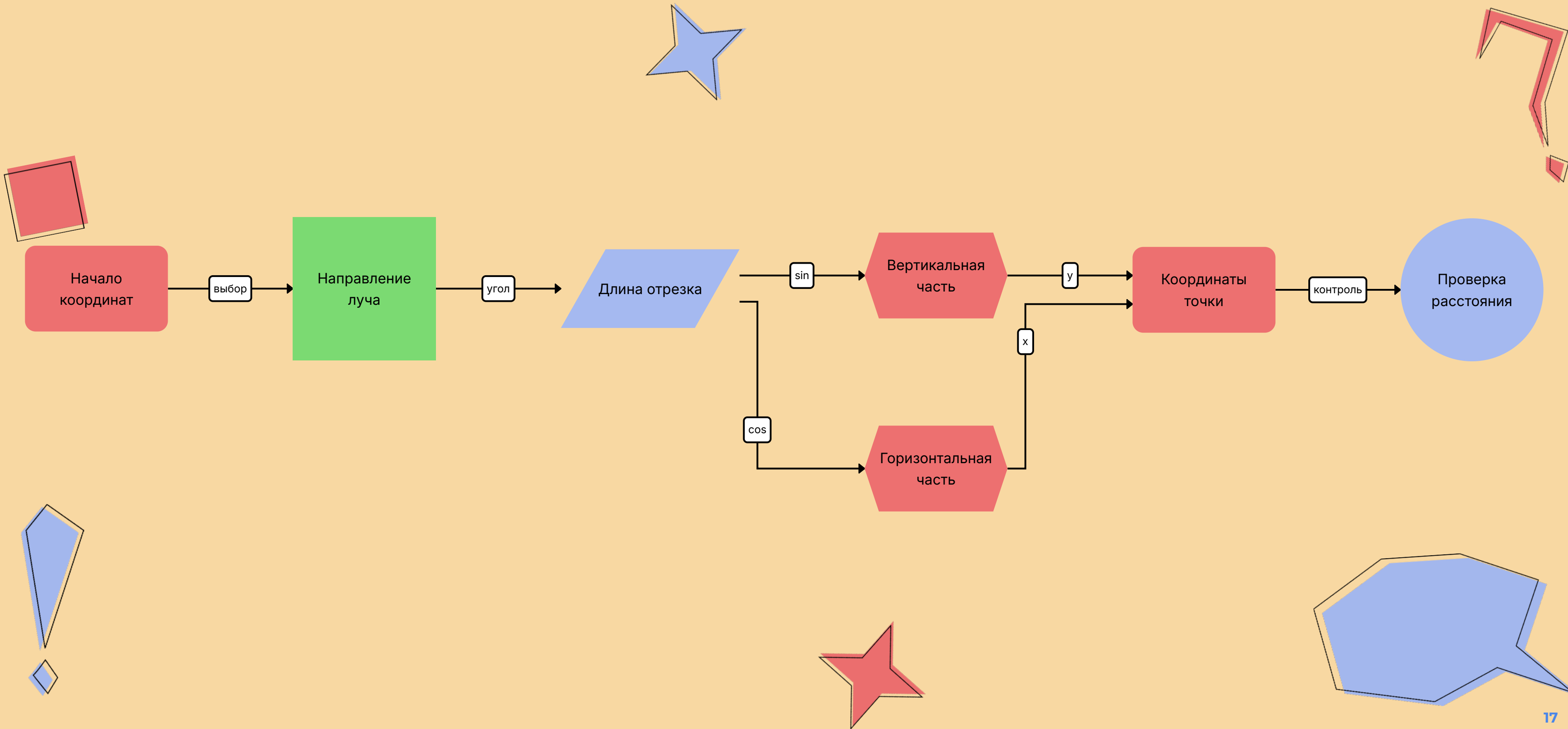
Чем ближе угол к 90° , тем быстрее возрастает тангенс. Это связано с уменьшением прилежащего катета при почти неизменном противолежащем.

Значения $\tan \alpha$ по стандартным углам и табличным приближениям

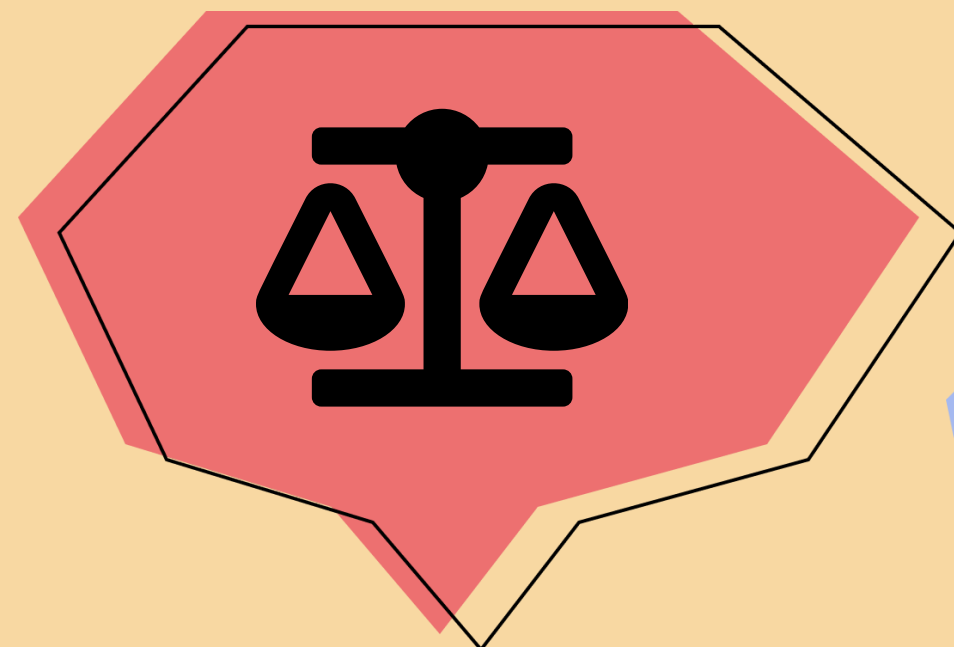


Как использовать тригонометрию в координатах

Построение координат точки через угол и длину векторного направления

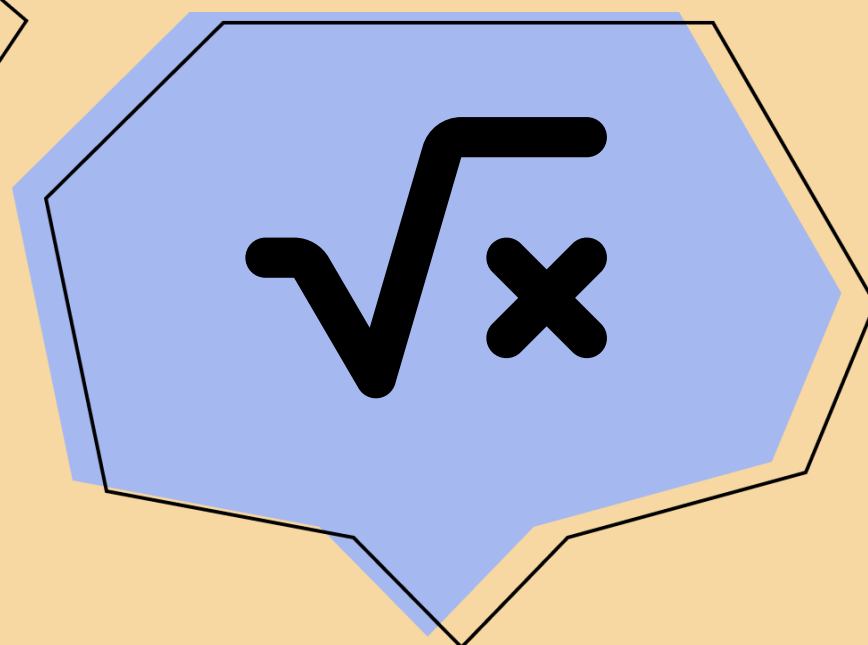
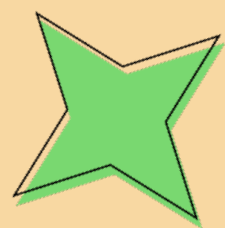


Типичные ошибки при решении задач



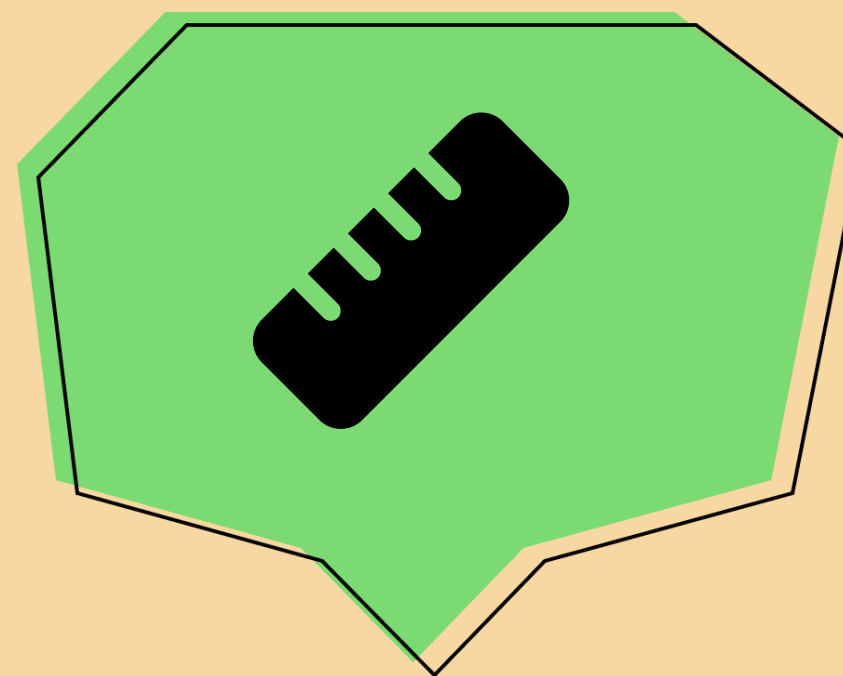
Путают катеты

Ошибка возникает, когда противолежащий и прилежащий катеты определяют не относительно выбранного угла. Из-за этого правильная формула записывается неверно.



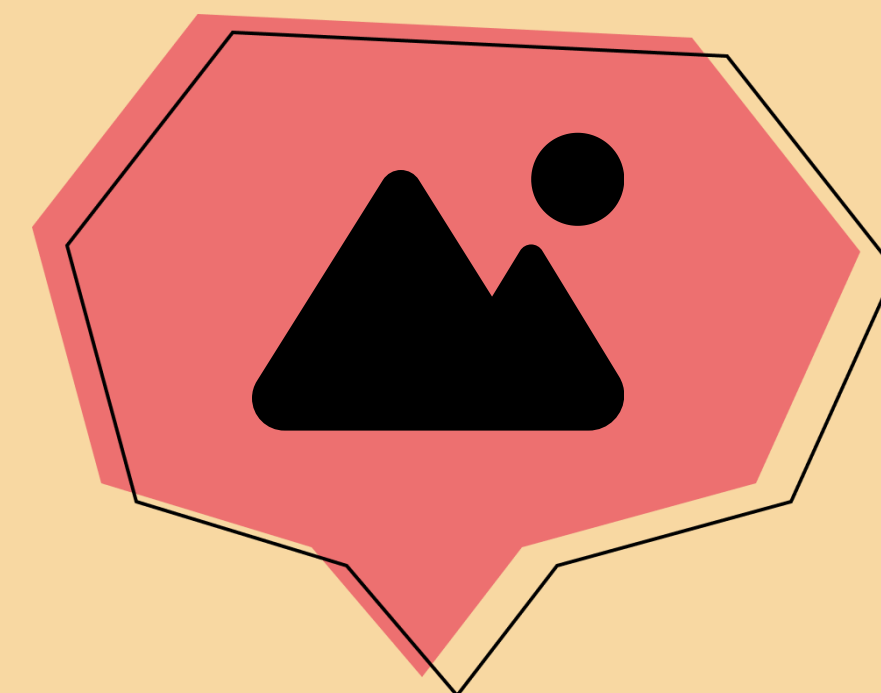
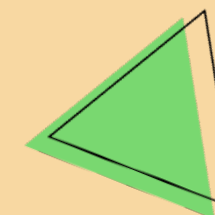
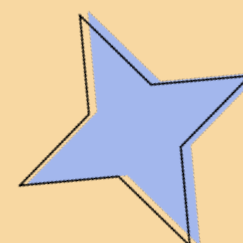
Неверная функция

Часто вместо нужного отношения выбирают $\sin$, $\cos$ или $\tan$ наугад. Перед вычислением важно понять, какие две стороны известны и что именно требуется найти.



Смешение единиц

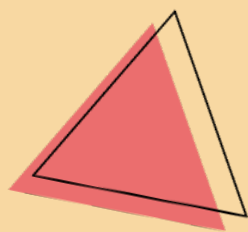
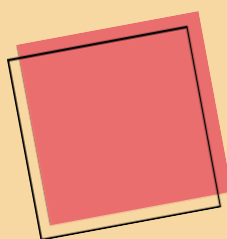
Градусы и радианы нельзя подменять друг другом. Особенно важно внимательно читать условие и проверять, в какой системе записан угол в ответе.



Ошибка с гипотенузой

Если в задаче дан не прямоугольный треугольник, гипотенузу нельзя использовать автоматически. Сначала нужно убедиться, что фигура действительно подходит для тригонометрического отношения.

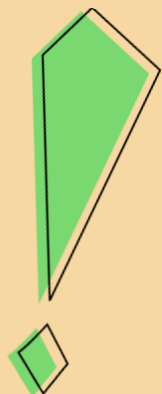
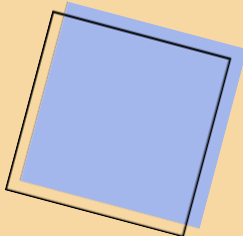
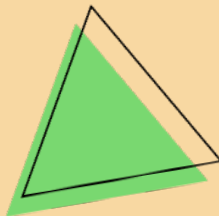
Краткий справочник формул для 9 класса



Формула	Отношение
$\sin \alpha$	противолеж./гипотенуза
$\cos \alpha$	прилеж./гипотенуза
$\tan \alpha$	противолеж./прилеж.
$\cot \alpha$	прилеж./противолеж.
$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$	1

Эти формулы нужны для решения задач в прямоугольном треугольнике. Они помогают выразить неизвестную сторону через известные элементы и проверить ответ по соотношениям.

Все основные отношения связаны с прямоугольным треугольником. Одни формулы находят сторону по углу, другие помогают проверить результат и упростить вычисления.





Тригонометрия: точный язык измерений

Тригонометрия помогает переводить угол в длину,
а длину — в координаты. Благодаря этому она
делает измерения в геометрии точными, понятными
и полезными для решения реальных задач.

