

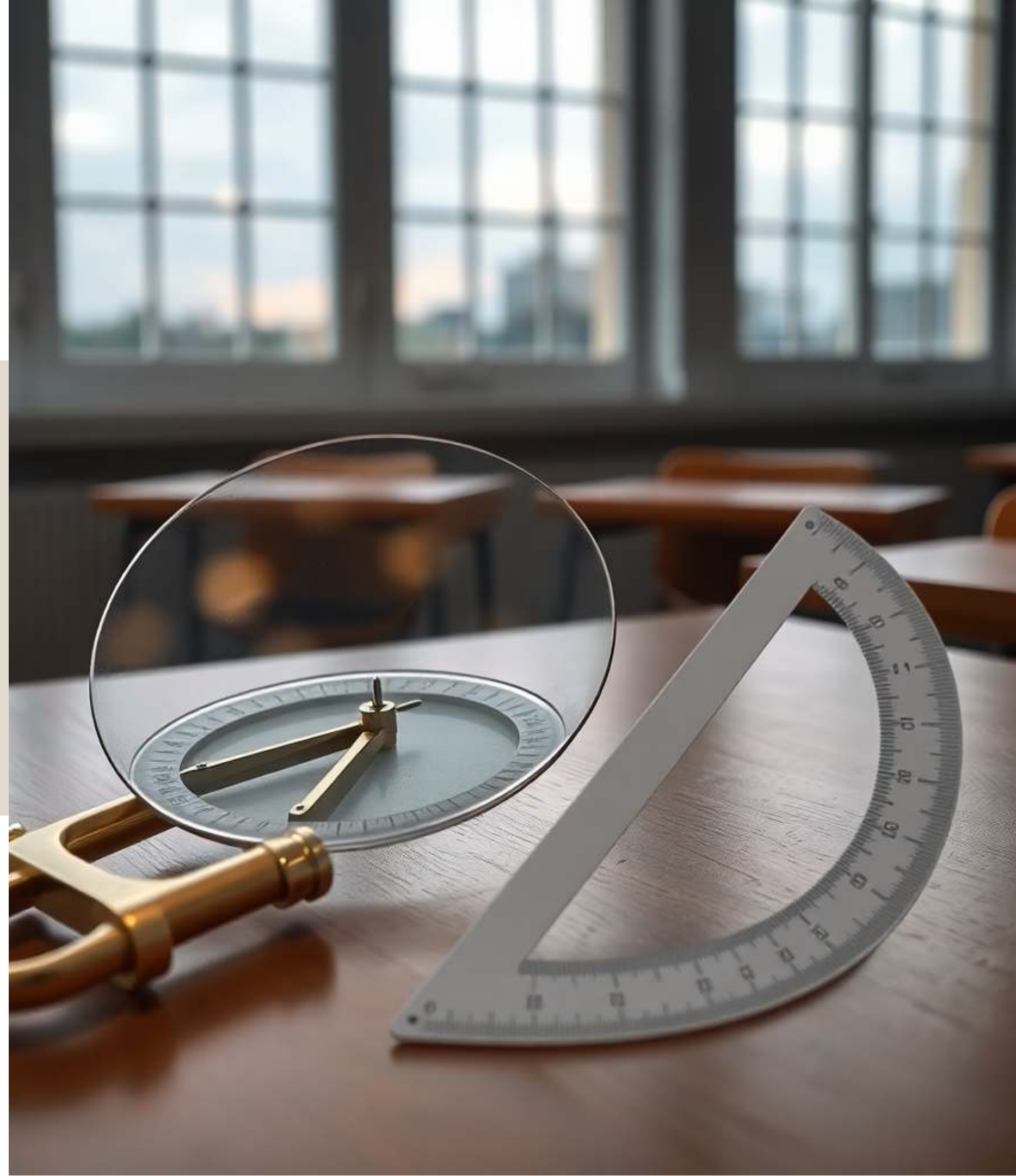
Тригонометрическая форма комплексных чисел

Алгебра и геометрия комплексных чисел: от записи к смыслу.



Почему стоит перейти к тригонометрической записи

Запись $z = a + bi$ удобна для сложения, но скрывает геометрию числа. Тригонометрическая форма показывает модуль как длину, а аргумент — как направление, поэтому особенно полезна при умножении, делении и возведении в степень.



Комплексная плоскость и координаты числа

Оси координат

Действительная часть числа откладывается по оси Ox , а мнимая — по оси Oy . Так комплексное число получает на плоскости точку с координатами $(a; b)$.

Радиус-вектор

Точка, соответствующая числу $z = a + bi$, соединяется с началом координат радиус-вектором. Его длина показывает, насколько число удалено от нуля.

Формула модуля

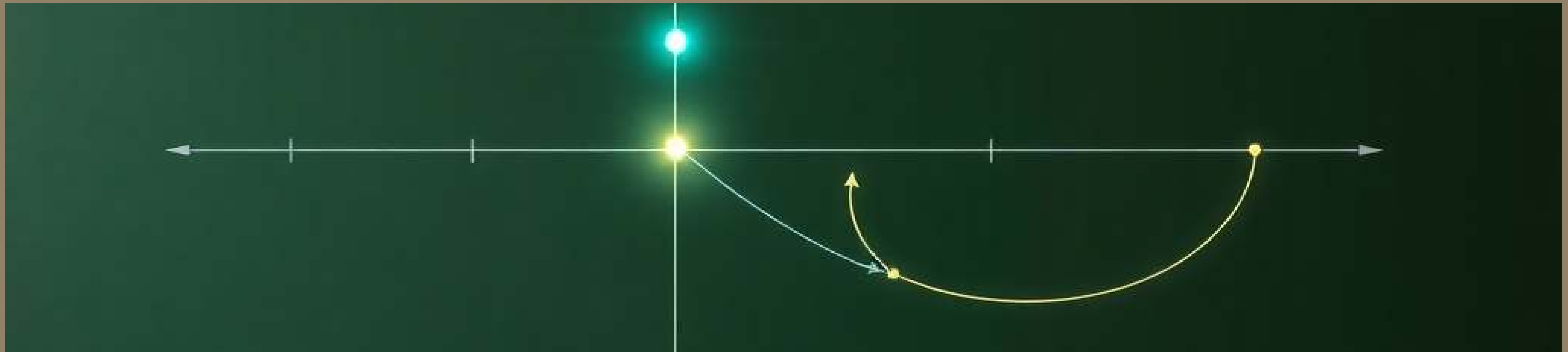
Расстояние от начала координат до точки вычисляется по теореме Пифагора: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Это значение всегда неотрицательно.

Аргумент числа

Угол между положительным направлением оси Ox и радиус-вектором называют аргументом. Он задаёт направление числа на плоскости и зависит от четверти.

Знак координат

В разных четвертях знаки a и b меняются по-разному, поэтому одна и та же длина может соответствовать различным аргументам.



Модуль и аргумент: геометрический смысл

○ Что показывает модуль

Модуль отражает расстояние от начала координат до точки, соответствующей числу. Поэтому он описывает не направление, а только величину радиус-вектора.

○ Что задаёт аргумент

Аргумент определяет поворот радиус-вектора относительно оси Ox . Именно он сообщает, в каком направлении расположен комплексный пункт на плоскости.

○ Особый случай нуля

Для ненулевого числа аргумент существует, но отличается на $2\pi k$. Для числа 0 направление не задаётся, поэтому аргумент не определён.

○ Почему это важно

Связь модуля и аргумента позволяет читать комплексное число как геометрический объект: длина отвечает за масштаб, а угол — за ориентацию.



Сравнение форм записи комплексного числа

Одна и та же величина записывается по-разному в зависимости от задачи и удобной операции.

Алгебраическая форма удобнее для сложения и вычитания, а тригонометрическая — для операций, где важны модуль и угол.

Форма	Вид	Удобство	Операции
Алгебраическая	$a + bi$	Сложение, вычитание	Части числа
Тригонометрическая	$r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$	Степени, корни	Углы и модуль
Полярная	$r\angle\varphi$	Краткая запись	Геометрия

Переход от алгебраической формы к тригонометрической

01

Найти модуль

Сначала по координатам a и b вычисляют модуль числа: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Это даёт длину радиус-вектора на комплексной плоскости.

02

Определить четверть

Затем смотрят на знаки a и b , чтобы понять, в какой четверти находится точка. От этого зависит правильный выбор аргумента.

03

Найти аргумент

Если $a \neq 0$, находят опорный угол через $\operatorname{tg} \varphi = b/a$, а затем уточняют его по четверти. Так получают корректное значение φ .

04

Составить запись

После определения r и φ число записывают в виде $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Эта форма объединяет длину и направление в одной записи.

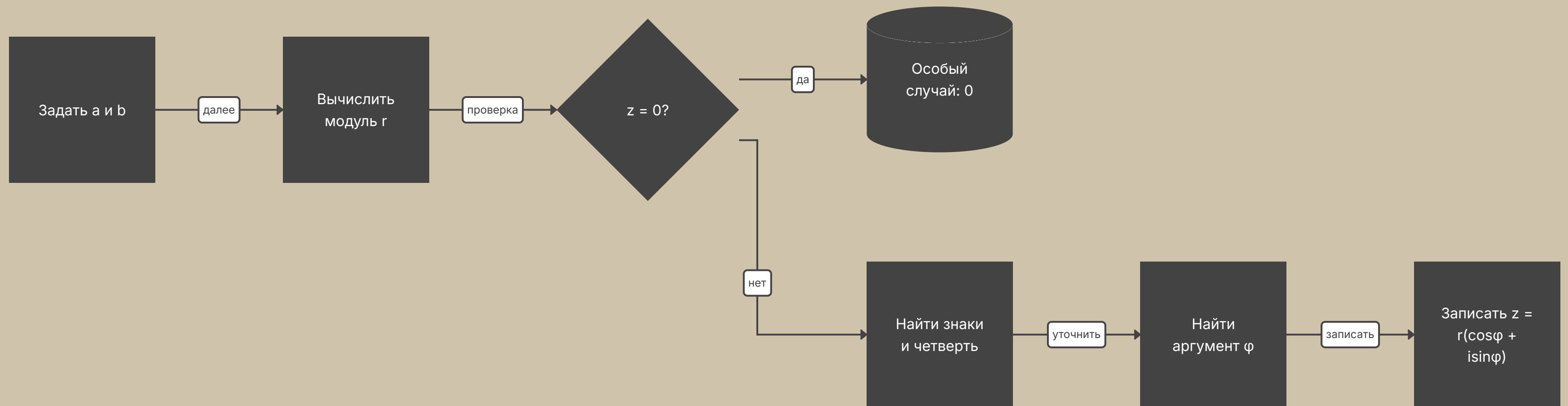
05

Пример проверки

Для числа $1 + i$ получаем $r = \sqrt{2}$ и $\varphi = \pi/4$, а для $-1 + i$ — тот же модуль и аргумент $3\pi/4$.

Как записать комплексное число в тригонометрической форме

Пошаговый переход от координат к записи через модуль и аргумент



$2\pi k$

можно прибавлять к аргументу,
не меняя само комплексное число.

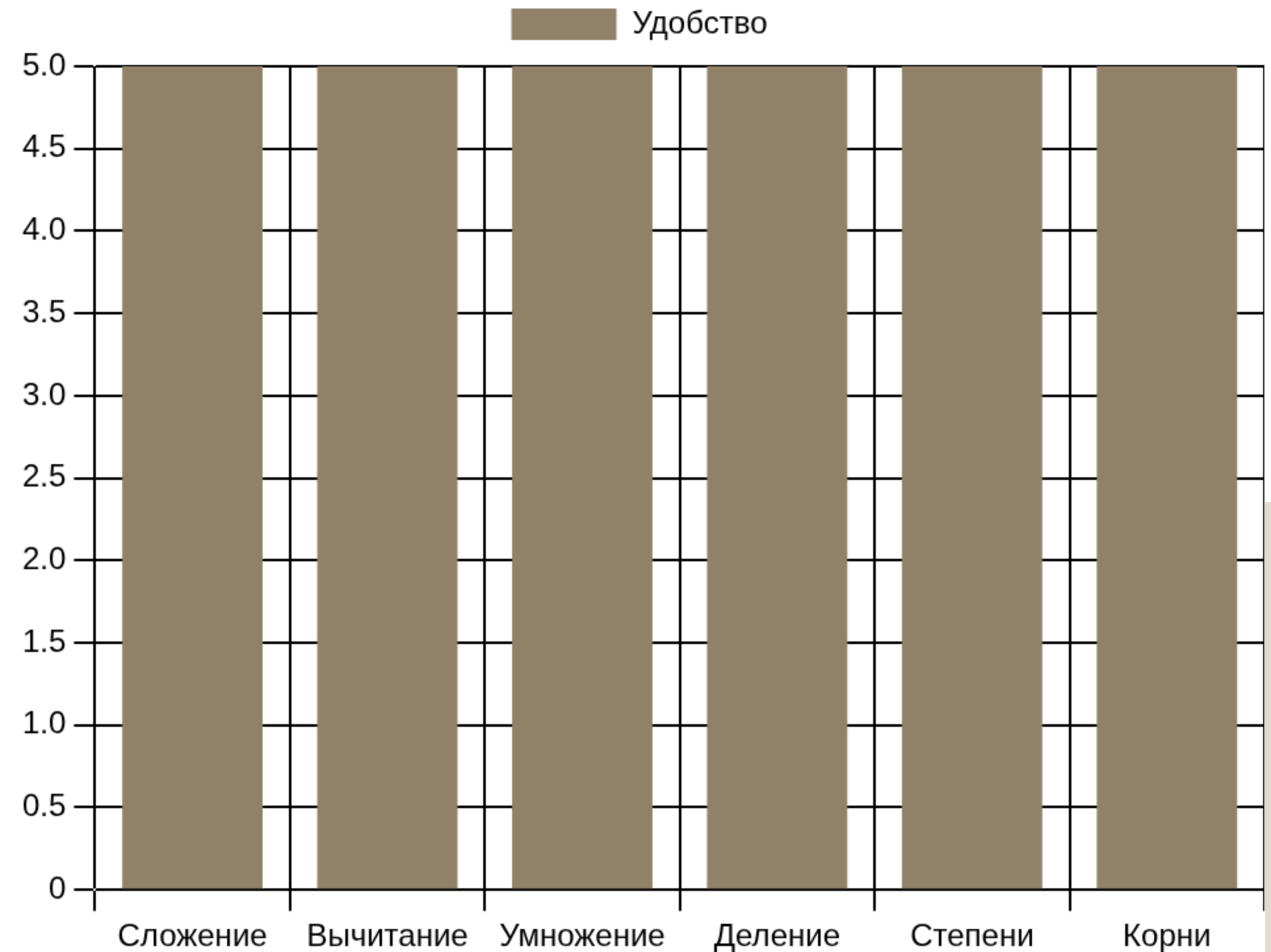
Модуль задаётся единственным образом, а аргумент повторяется бесконечно из-за вращения на окружности.

Свойство аргумента комплексного числа

Какие действия удобнее в разных формах записи

Диаграмма показывает, что выбор формы записи зависит не от числа, а от типа вычисления и цели задачи.

Для простых алгебраических операций выгодна запись $a + bi$, а для степеней и корней — тригонометрическая форма.



Качественная оценка по материалу презентации

Умножение комплексных чисел в тригонометриче- ской форме

1

Записать множители

Пусть z_1 и z_2 заданы в тригонометрической форме. Тогда удобно отдельно рассматривать их модули и аргументы, не переходя сразу к алгебраическим вычислениям.

2

Перемножить модули

При умножении комплексных чисел их модули просто перемножаются. Это означает, что длина нового радиус-вектора зависит от обоих множителей.

3

Сложить аргументы

Аргументы тоже объединяются по простому правилу: $\varphi_1 + \varphi_2$. Геометрически это соответствует повороту на сумму углов на комплексной плоскости.

4

Получить результат

Итоговая формула имеет вид $z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$. Она заметно сокращает вычисления при больших углах и повторяющихся действиях.

Деление и обратное число

○ Формула частного

При делении комплексных чисел в тригонометрической форме модули делят, а аргументы вычитают. Это сразу даёт компактную запись частного без громоздких преобразований в алгебраическом виде.

○ Обратный элемент

Для ненулевого числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ обратное имеет вид $1/z = (1/r)(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$. Его модуль становится обратным, а направление поворачивается на противоположное.

○ Практическая польза

Такая форма особенно удобна при упрощении дробей с комплексным знаменателем. Вместо рационализации можно быстро получить ответ через изменение модуля и аргумента, сохранив точность вычислений.

○ Когда это быстрее

Если числа уже заданы через модуль и угол, деление почти не требует дополнительных алгебраических действий. Это экономит время в задачах на вычисление частного и построение результата на плоскости.

Степени комплексных чисел: формула Муавра

01

Запись числа

Пусть комплексное число задано как $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. В такой форме удобно отделить длину радиус-вектора от его направления, что делает дальнейшие преобразования прозрачными и наглядными.

03

Отрицательные степени

Если требуется степень с отрицательным показателем, сначала находят обратное число, а затем применяют ту же формулу. Это позволяет работать с комплексными степенями по единым правилам.

02

Возведение в степень

По формуле Муавра $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$. При положительном n модуль возводится в степень, а аргумент просто умножается на n , без многократного перемножения множителей.

04

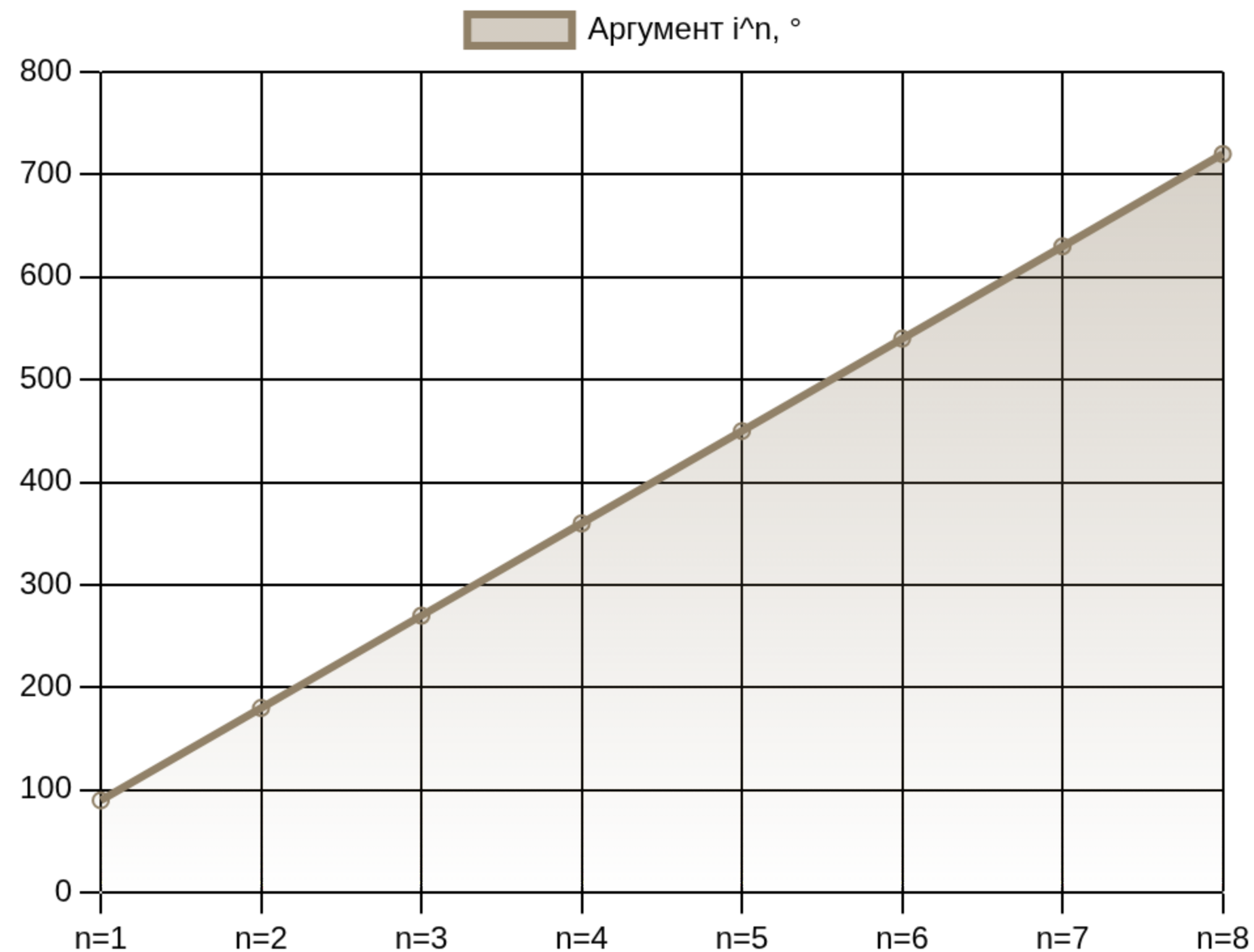
Почему это важно

Формула особенно полезна для чисел на единичной окружности и в задачах с повторяющимися углами. Она связывает алгебраическую операцию возведения в степень с геометрическим вращением.

Периодичность степеней на единичной окружности

Ступенчатый рост аргумента показывает, что каждое умножение на i добавляет поворот на 90° . После четырёх шагов цикл возвращается к исходной точке.

Для i период равен 4, а общий смысл сохраняется для любых чисел на единичной окружности: повторение связано с вращением на полный оборот.



Свойства степеней i и единичной окружности; иллюстративные значения

Извлечение n -х корней из комплексного числа

1

Исходная форма

Если число задано в тригонометрической форме $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то извлечение корней удобно начинать именно с модуля и аргумента, а не с алгебраической записи.

2

Формула корней

Все n -е корни имеют вид $w_k = \sqrt[n]{r}(\cos((\varphi + 2\pi k)/n) + i\sin((\varphi + 2\pi k)/n))$, где $k = 0, 1, \dots, n-1$. Эта запись даёт полный набор решений.

3

Сколько решений

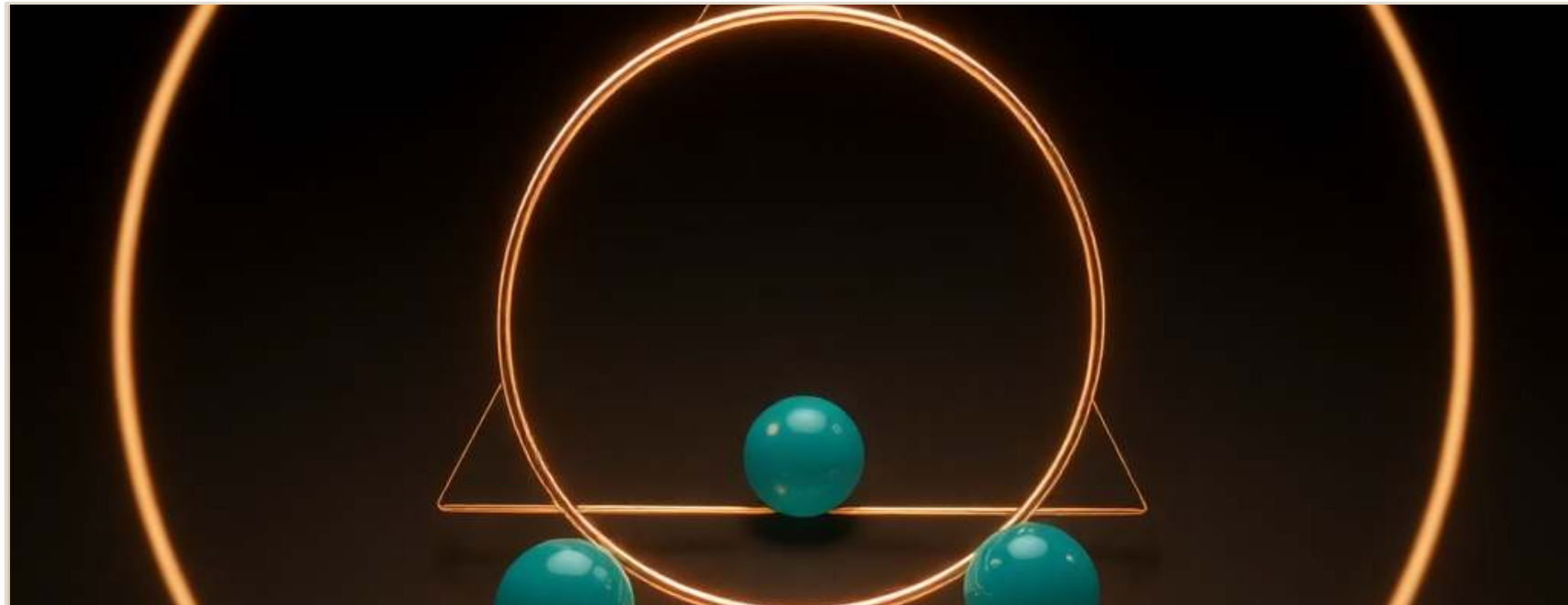
Ровно n различных корней существует всегда, если n — натуральное число. Они отличаются только аргументом, тогда как модуль у всех одинаков и равен корню степени n из r .

4

Геометрический смысл

Корни располагаются на окружности равномерно, а соседние точки разделены углом $2\pi/n$. Поэтому множество корней можно представить как вершины правильного многоугольника на комплексной плоскости.

Геометрия корней на комплексной плоскости



Треугольник из трёх корней

Когда $n = 3$, три корня одного комплексного числа оказываются на одной окружности и делят её на три равные дуги. На рисунке это выглядит как равносторонний треугольник, вписанный в окружность. Такая картина помогает сразу увидеть равенство модулей и равномерное распределение аргументов.



Квадрат и шестиугольник

При $n = 4$ точки образуют квадрат, а при $n = 6$ — правильный шестиугольник. Чем больше n , тем больше вершин у фигуры и тем меньше угол между соседними корнями. Геометрия наглядно показывает, что формула корней задаёт не случайный набор точек, а строгую симметрию.

Примеры записи в тригонометрической форме

Таблица показывает, как по координатам числа определить модуль, аргумент и тригонометрическую запись. Особое внимание обращено на расположение точки в разных четвертях.

Во всех примерах модуль определяется однозначно, а аргумент зависит от четверти. Это подтверждает, что одна и та же формула работает для чисел с разным знаком координат.

Число	Модуль	Аргумент	Тригонометрическая форма
$1+i$	$\sqrt{2}$	$\pi/4$	$\sqrt{2}(\cos\pi/4+i \sin\pi/4)$
$-1+i$	$\sqrt{2}$	$3\pi/4$	$\sqrt{2}(\cos3\pi/4+i \sin3\pi/4)$
$-i$	1	$-\pi/2$	$\cos(-\pi/2)+i \sin(-\pi/2)$

Стандартные вычисления для комплексной плоскости

Связь с формулой Эйлера

Краткая запись

Формула $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$ позволяет заменить длинную тригонометрическую запись короткой показательной формой $z = re^{i\varphi}$. Это удобно при преобразованиях и делает формулы компактнее.

Геометрический смысл

Показатель $i\varphi$ можно понимать как сочетание масштаба и поворота. Поэтому комплексное число в показательной форме сразу связано с вращением на плоскости и изменением длины радиус-вектора.

Связь с колебаниями

В задачах о волнах и колебаниях показательную форму используют для описания фазы и амплитуды. Она помогает записывать периодические процессы короче и прослеживать изменения во времени.

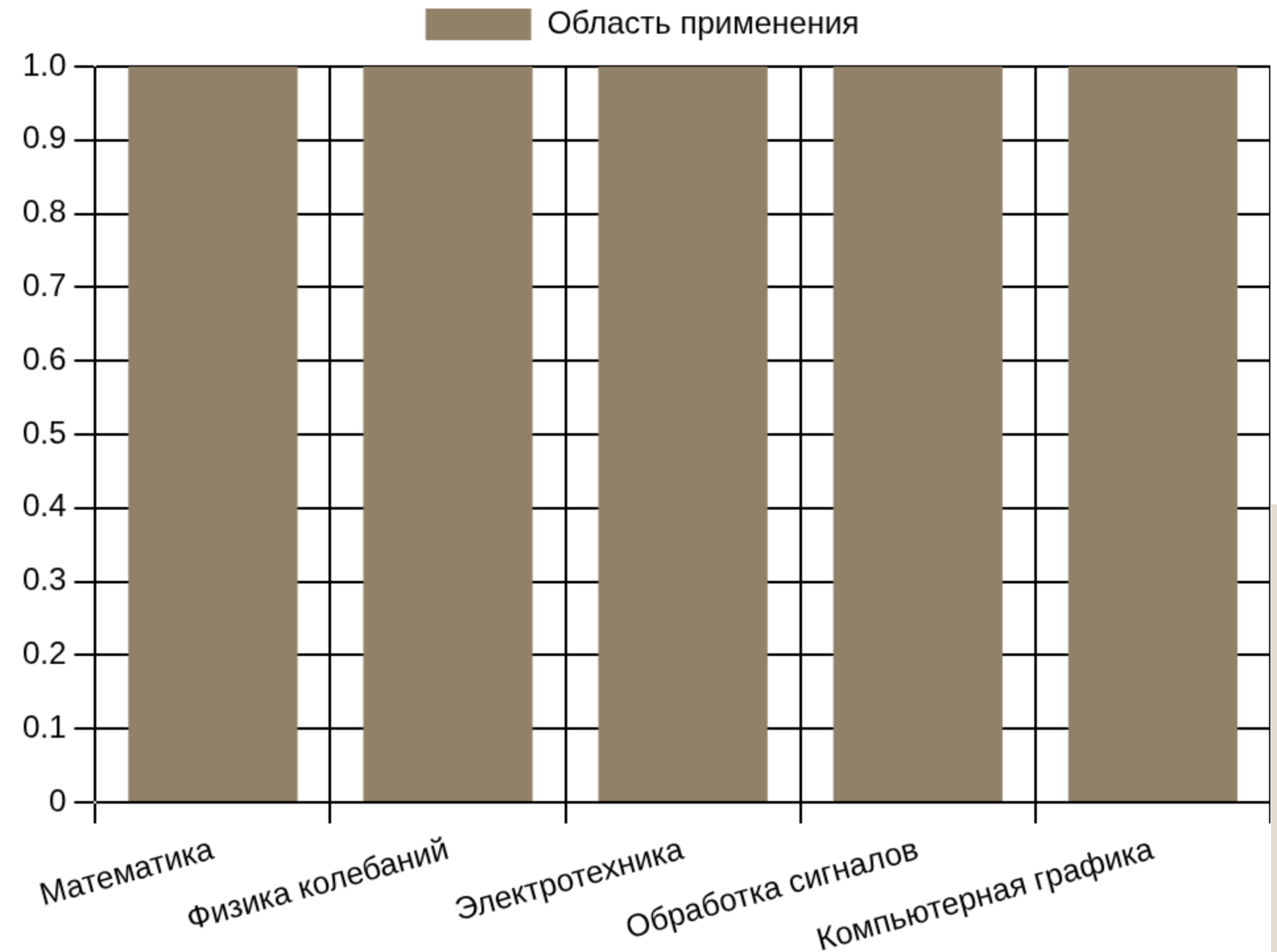
Применение в науке

Такая запись встречается в старших курсах математики и в прикладных разделах физики. Она объединяет синус, косинус и экспоненту в единую удобную модель.

Где применяется тригонометрическая форма комплексных чисел

Диаграмма подчеркивает, что одна и та же форма записи полезна сразу в нескольких областях, где важны амплитуда, фаза и вращение.

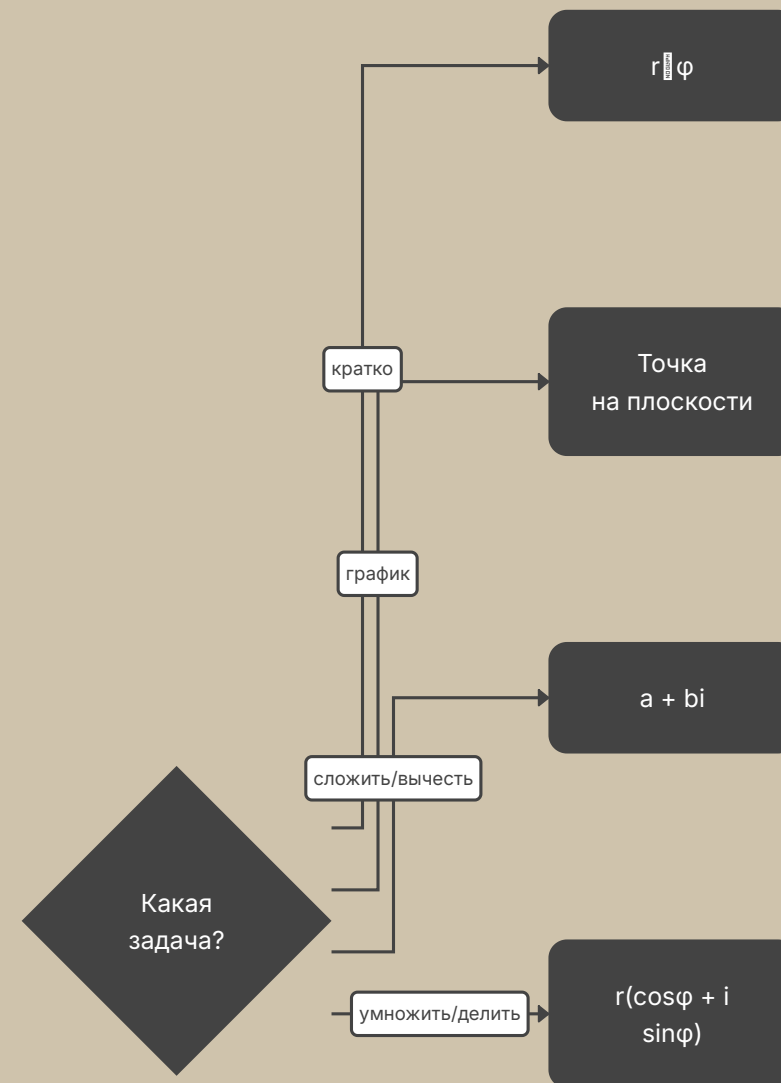
Тригонометрическая форма универсальна: она связывает математическую модель с прикладными задачами, в которых удобнее работать не с координатами, а с модулем и аргументом.



Сводка типичных учебных и прикладных применений;
без количественной оценки

Как выбрать форму записи комплексного числа

Выбор формы зависит от типа вычисления и того, что нужно подчеркнуть: координаты, угол, краткость или геометрический образ.



Главный вывод о тригонометрической форме

Тригонометрическая форма делает комплексное число одновременно алгебраическим и геометрическим объектом. Она упрощает вычисления, раскрывает смысл угла и модуля и готовит к изучению более сложных математических моделей.