

Тригонометрические уравнения в курсе геометрии 10 класса: основные идеи и методы решения

Как найти все углы и параметры по соотношениям
синуса, косинуса и тангенса.

1 ÷ 2

log

8

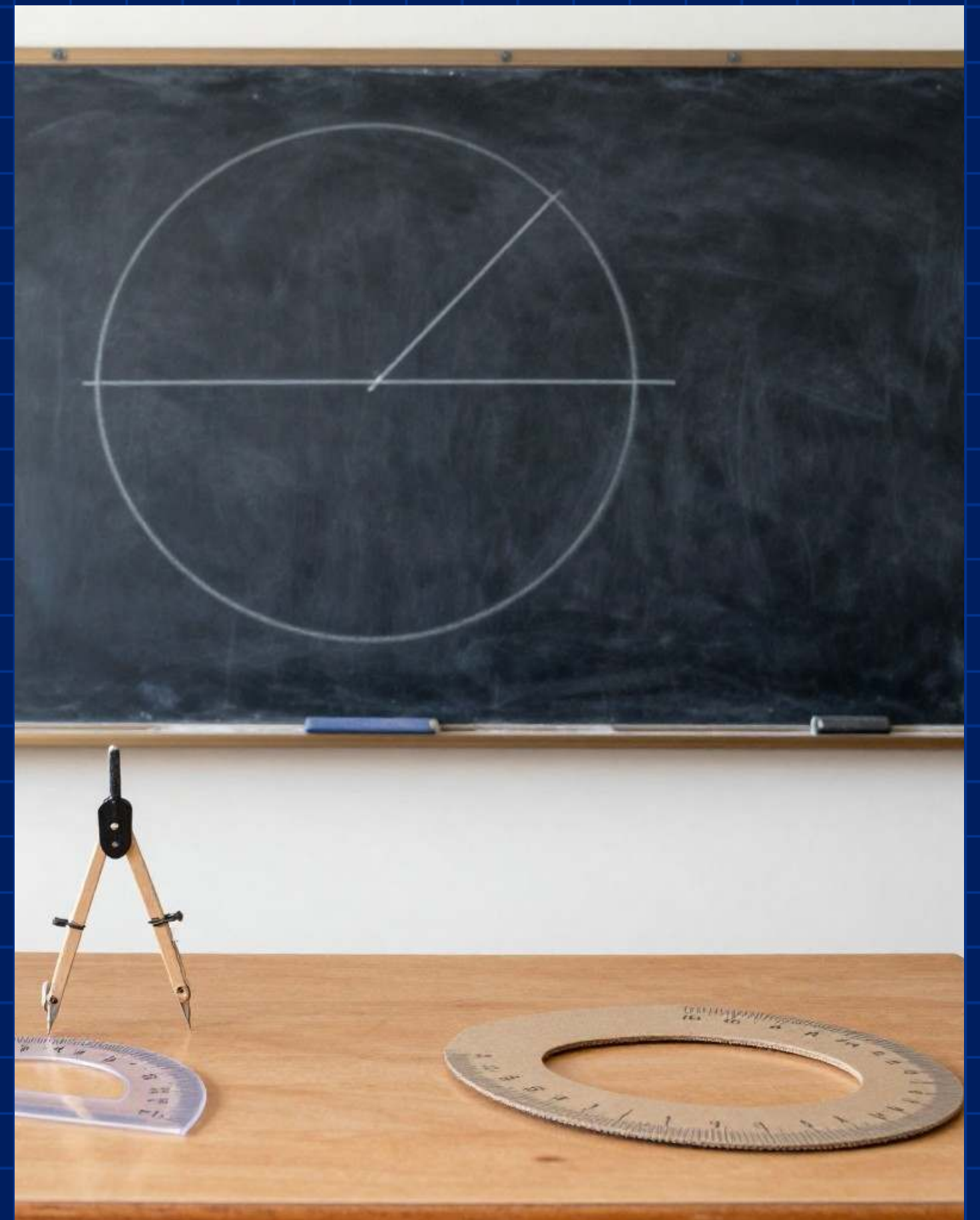


Место тригонометрических уравнений в школьной геометрии

4 1 2 — 9

Тригонометрия в 10 классе связывает угол, окружность, радианную меру, прямоугольные треугольники и координаты. Тригонометрические уравнения помогают находить неизвестные углы и параметры по известным связям между сторонами и углами — от наклонов до проекций.

6 7



Что такое тригонометрическое уравнение

Тригонометрическое уравнение – это уравнение, где неизвестное входит в аргумент одной или нескольких тригонометрических функций. Поэтому одна формула порождает сразу набор решений, а не один ответ.

К базовым видам относят $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$ и $\operatorname{ctg} x = a$. Их удобно узнавать по форме: неизвестная находится внутри функции, а снаружи – числовой параметр.

Поскольку $\sin$ и $\cos$ периодичны с периодом 2π , а tg и ctg – с периодом π , решения чаще всего образуют бесконечное множество. В геометрии неизвестным почти всегда является угол в радианах или градусах.

Единичная окружность как геометрическая модель решений

-1

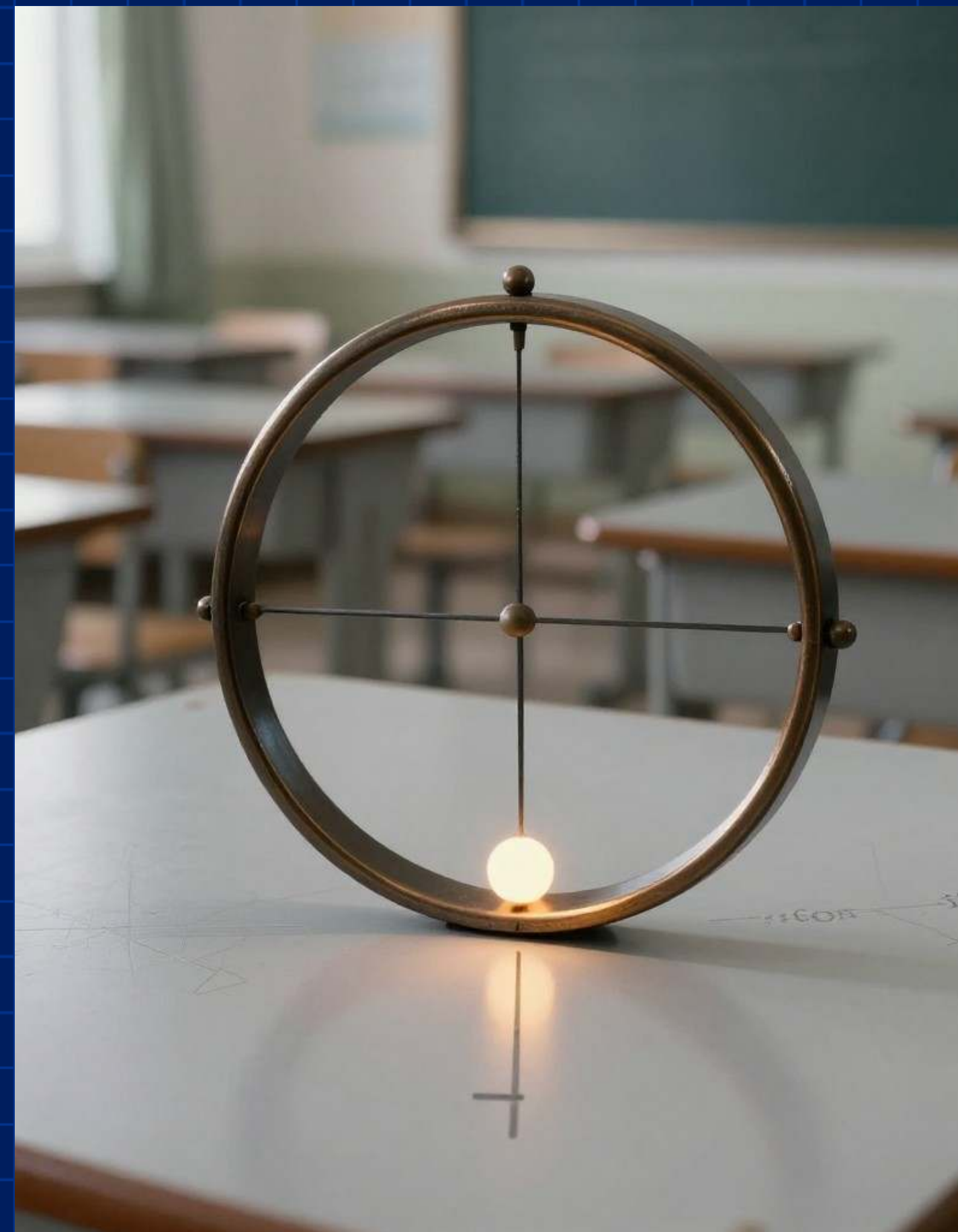
!2

Координатная интерпретация

На единичной окружности точка, соответствующая углу x , имеет координаты $(\cos x, \sin x)$. Поэтому синус и косинус удобно читать как «число по вертикали» и «число по горизонтали», не уходя в вычисления вслепую.

Тригонометрические дроби и повторяемость

Тангенс связан с отношением $\sin x / \cos x$, а котангенс — с отношением $\cos x / \sin x$, но только там, где знаменатель не равен нулю. Одно и то же значение функции повторяется для бесконечно многих углов, сдвинутых на полный оборот или полупериод.



Базовые уравнения и их общее решение

Вид уравнения	Условие	Общее решение	Период повторения
$\sin x = a$	$ a \leq 1$	через арксинус	2π
$\cos x = a$	$ a \leq 1$	через арккосинус	2π
$\operatorname{tg} x = a$	– (ОДЗ)	через арктангенс	π
$\operatorname{ctg} x = a$	– (ОДЗ)	через арккотангенс	π

Стандартные свойства тригонометрических функций и их обратных функций в школьном курсе.

Таблица показывает условия существования решений и форму записи общего решения для базовых тригонометрических уравнений.

Форма «общего решения» зависит от функции: для $\sin$ и $\cos$ важен диапазон параметра, для tg и ctg – прежде всего ограничения (ОДЗ), из-за которых появляются запретные точки.

Периодичность и симметрия корней

1

log



Период 2π для $\sin$ и $\cos$

Значения $\sin x$ и $\cos x$ повторяются через 2π , поэтому каждое найденное решение «размножается» в бесконечную последовательность. Это позволяет строить полное множество корней по одному шаблону.



Симметрия для $\sin x = a$ и $\cos x = a$

Для $\sin x = a$ корни симметричны относительно середины четвертей на единичной окружности, а для $\cos x = a$ — относительно оси Ox . Такая геометрия помогает не упустить углы при составлении ответа.



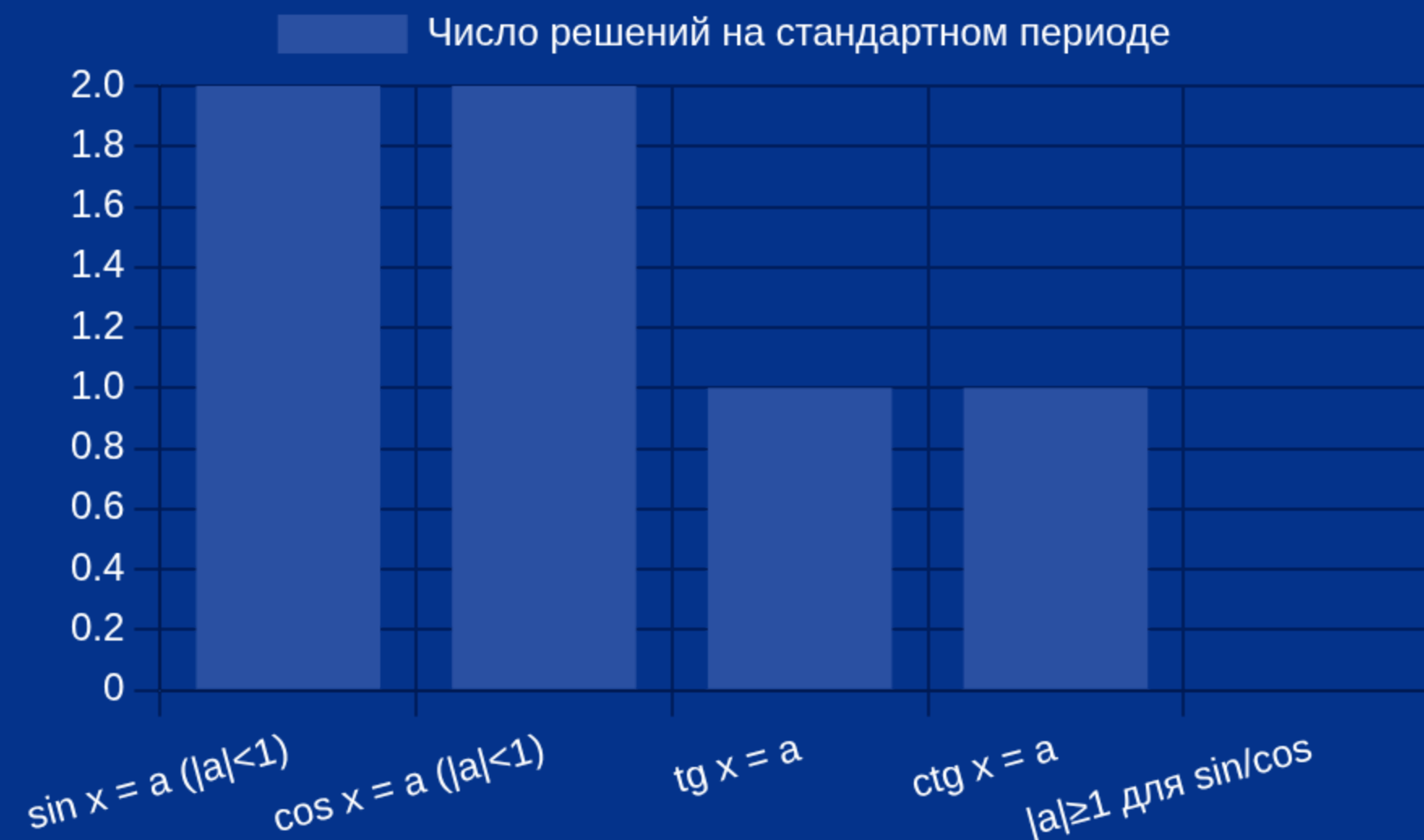
Разнос корней у tg и ctg на π

У уравнений $\operatorname{tg} x = a$ и $\operatorname{ctg} x = a$ все решения отличаются на π . Поэтому после получения одного корня остальные находятся простым периодическим сдвигом, без лишних вычислений.

2

x

Сколько решений дают базовые уравнения на одном периоде



Справочные сведения из школьного курса: расположение точек на единичной окружности и периодичность тригонометрических функций.

Количество корней меняется не только от вида функции, но и от параметра: при крайних значениях синус и косинус касаются прямой, а не пересекают её.

Диаграмма показывает закономерность: $\sin$ и $\cos$ дают до двух корней на периоде, тогда как tg и ctg на своём периоде дают по одному корню при корректном ОДЗ.

Общий алгоритм решения тригонометрического уравнения

Общий порядок работы и точки контроля, где чаще всего возникают пропуски и лишние корни.

6

3

18

Уравнения, сводящиеся к одной функции



Опора на табличные значения

Если уравнение приводится к $\cos x = 1/2$ или $\sin x = a$, удобно использовать стандартные значения для основных углов. Так вы быстро переводите равенство в геометрическую картинку на окружности.



Ключевые углы школьной таблицы

На практике чаще всего встречаются углы $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$ и им соответствующие значения синуса, косинуса и тангенса. Знание этих точек помогает избежать длинных вычислений.



От числа – к углу

Типовые задания проверяют умение видеть: равенство вида $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ означает конкретный наклон. Решение строится через определение угла, а затем распространяется на все периоды тригонометрической функции.



Геометрический смысл в треугольниках

В задачах на окружность и треугольники такие уравнения появляются при поиске неизвестных углов по сторонам и радиусам. Тригонометрия связывает измерение на чертеже с аналитическим ответом.

Разложение на множители как способ поиска всех корней

Если выражение можно преобразовать в произведение, например $\sin x(2\cos x - 1) = 0$, то уравнение распадается на несколько более простых условий. Каждое условие дает собственную группу решений.

Такой прием снижает вычислительную сложность: вместо сложного комбинированного равенства вы решаете несколько базовых уравнений. В результате быстрее видно, сколько именно наборов корней должно получиться.

Разложение на множители часто возникает после переноса всех слагаемых в одну часть и дальнейших преобразований: например, при использовании формул двойного угла или при сведении к виду с одинаковыми тригонометрическими множителями.

Ключевое условие – аккуратно включить корни каждого множителя в общий ответ. При этом нельзя добавлять решения «по смыслу»: каждый найденный корень должен удовлетворять исходному уравнению после всех преобразований.

Замена переменной в тригонометрических уравнениях

Сигнал к замене

Если в уравнении встречаются $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\operatorname{tg} 2x$ или степени тригонометрических функций, часто удобно «сжать» выражения одной новой переменной u .

Выбор u

Выбирайте u так, чтобы уравнение стало алгебраическим: $u = \sin x$, $u = \cos x$ или $u = \operatorname{tg} x$. Затем исходное выражение переписывают через u и приводят к стандартному виду.

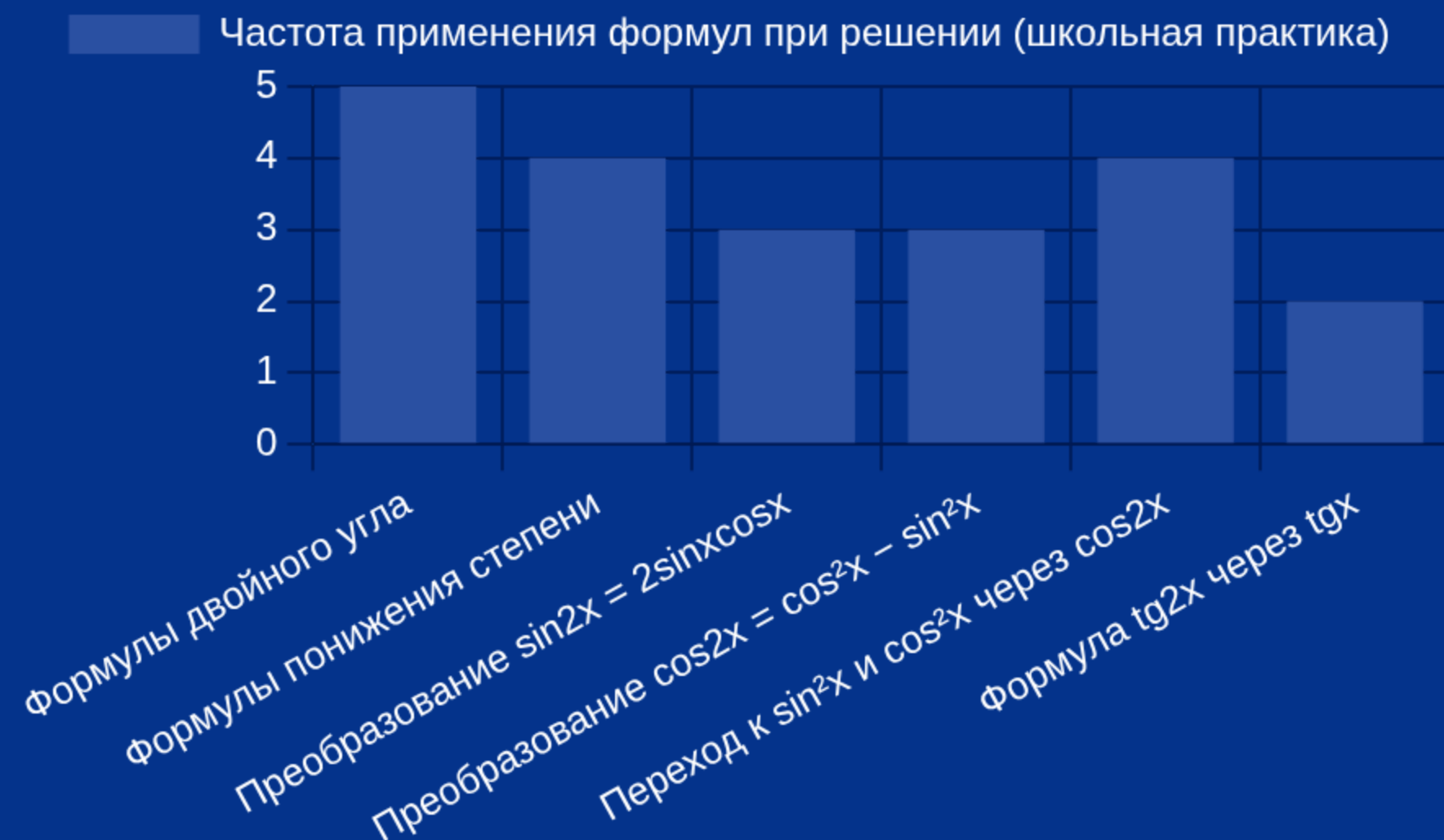
Решение полученного алгебраического уравнения

Дальше решают квадратное или рациональное уравнение относительно u . На этом этапе удобно работать аккуратно: дроби и произведения могут задавать дополнительные ограничения.

Обратная замена и проверка

После нахождения u выполняют обратную замену и учитывают допустимые значения: не каждое найденное u соответствует реальному углу x . Затем обязательно проверяют корни подстановкой.

Формулы, которые чаще всего используются при решении

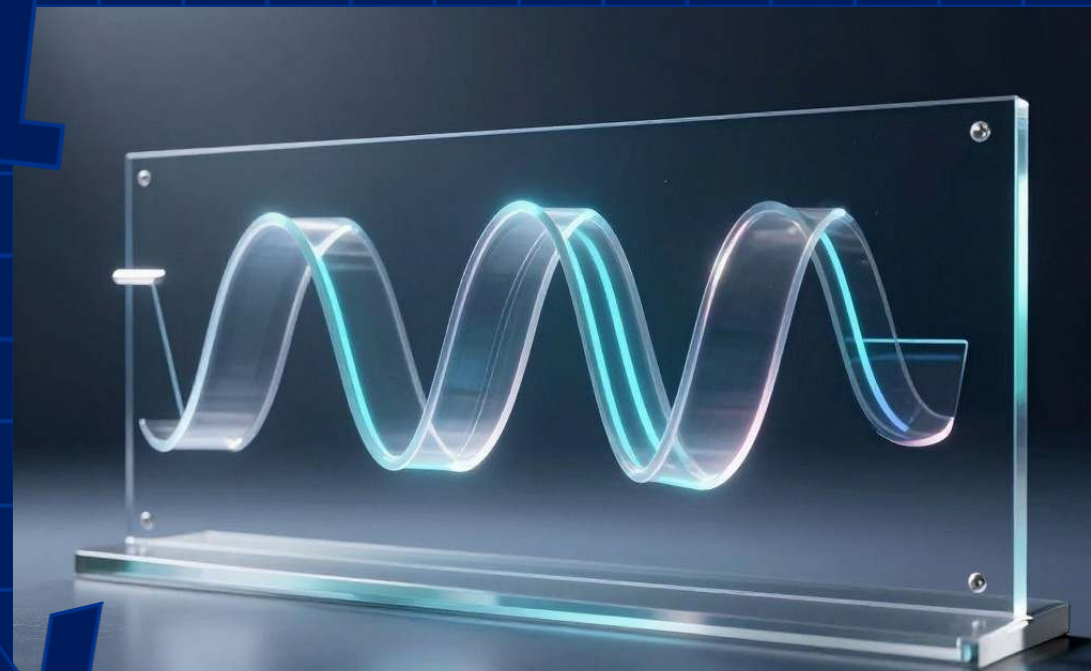


Типовая структура школьных задач 10 класса; частотность ориентировочная и зависит от набора упражнений в конкретном УМК.

В «алгебраизации» уравнений формулы двойного угла и понижения степени помогают свести тригонометрические выражения к уравнениям относительно $\sin x$ или $\cos x$.

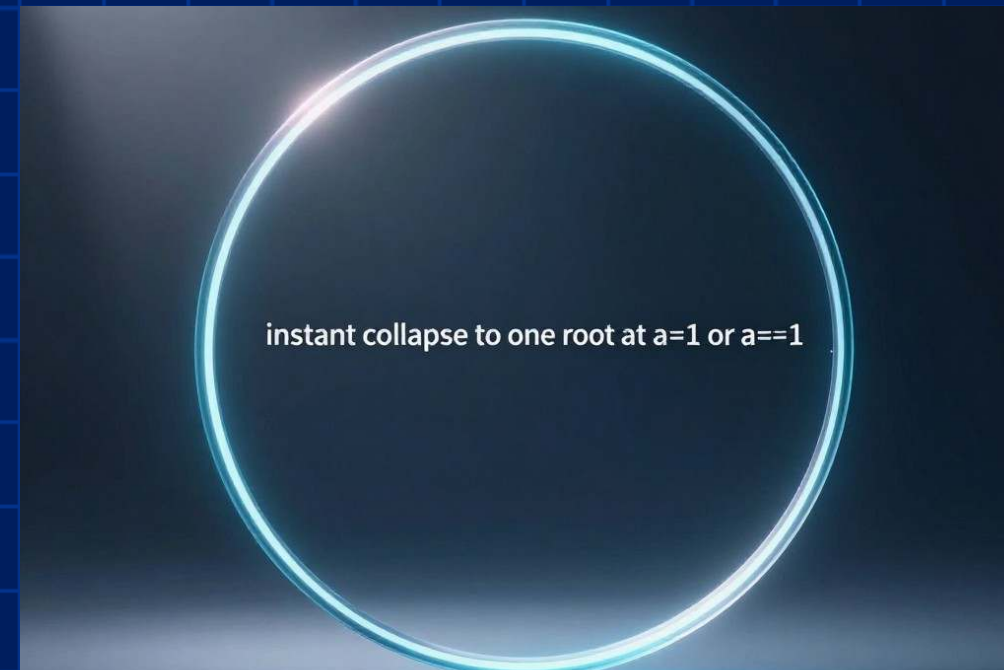
Видно, что преобразования двойного угла и понижения степени дают максимальную отдачу: они чаще превращают задачу в обычное алгебраическое решение.

Уравнения с параметром и зависимость числа решений



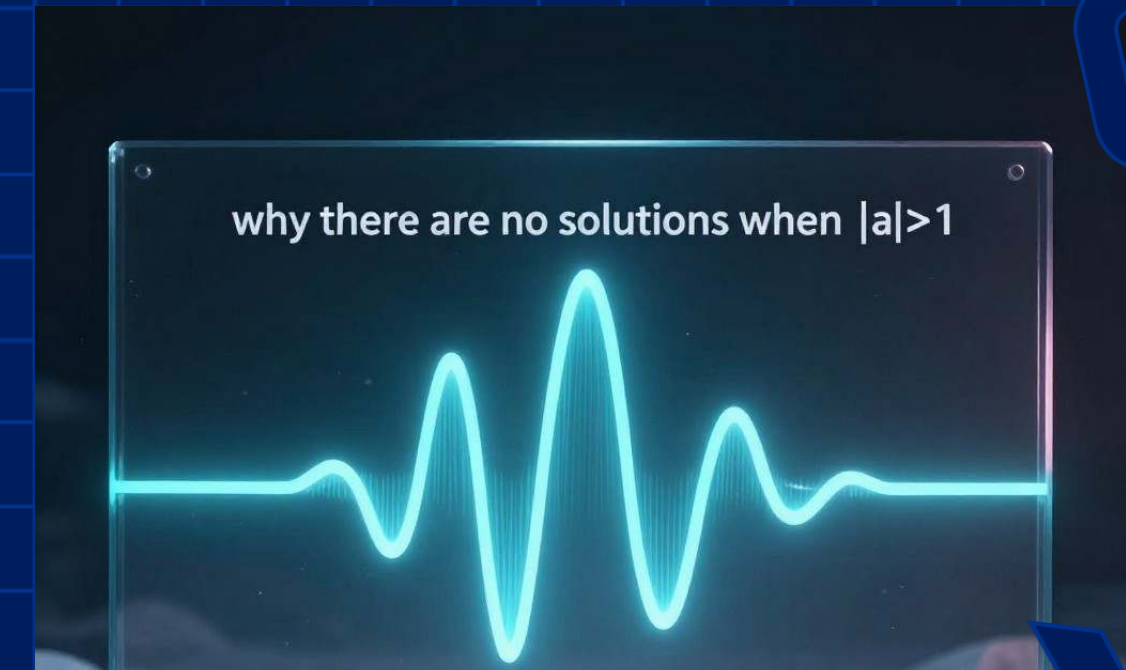
Две точки пересечения и «наглядная геометрия»

Прямая $y = a$ пересекает синус $y = \sin x$ в двух местах на периоде, когда $|a| < 1$. Каждое пересечение соответствует одному семейству углов x , отличающихся периодичностью. При аккуратном учёте промежутка можно точно перечислить ответы.



Мгновенное «схлопывание» до одного корня

Когда параметр достигает крайних значений, например $a = 1$ или $a = -1$, синус касается прямой $y = a$. Пересечение становится единственным: решения концентрируются в точках экстремумов. Это удобно проверять через единичную окружность и симметрию.



Почему при $|a| > 1$ решений нет

Если $|a| > 1$, горизонтальная прямая $y = a$ лежит выше максимума или ниже минимума функции $\sin x$ и $\cos x$. Тогда пересечений не возникает: решений у уравнения нет ни на каком промежутке. Геометрический смысл параметра — это контроль «достижимости» значений.

Типичные ошибки при решении тригонометрических уравнений

Ошибка	Причина	Пример	Обнаружение
Потеря корней	Деление на выражение с неизвестным	Делили на $\sin x$	Получили решение, не проверив ОДЗ
Лишние корни	Квадратирование или переход к виду без равносильности	Возвели обе части в квадрат	После подстановки часть ответов не подходит
Неверное общее решение	Ошибка в периодичности или в записи множества корней	Забыли прибавлять π	Число решений на периоде не совпадает с ожиданием
Игнорирование ОДЗ	Не учтены точки, где функция не определена	Для $\operatorname{tg} x$ не исключили $\cos x = 0$	Решение приводит к делению на ноль

Типовые методические разборы ошибок в школьной практике (контрольные работы, разбор типичных вариантов).

Таблица сопоставляет ошибку, её причину, характерный пример и способ обнаружения. Это помогает быстрее диагностировать, где «ломается» ход решения.

Большинство неточностей связано не с вычислениями, а с равносильностью преобразований и неполным учётом периодичности и области допустимых значений.

Проверка корней и роль области допустимых значений

1 Проверка подстановкой остаётся обязательной после любых преобразований, способных изменить множество решений. Даже формально верные шаги могут быть неравносильными при работе с дробями и квадратами.

2 ОДЗ исключает ситуации, когда знаменатель равен нулю, а также когда тригонометрическая функция не определена или выражение под корнем становится отрицательным. Для $\operatorname{tg} x$ важна точка $\cos x = 0$.

3 Для $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ отдельно учитывают запреты: $\operatorname{tg} x$ не существует при $\cos x = 0$, а $\operatorname{ctg} x$ — при $\sin x = 0$. В сложных задачах проверяют особенно внимательно после сокращений и замены.

Как выбрать метод решения по виду уравнения

Связь между формой уравнения и наиболее эффективным способом решения

6

3

18

Графический метод: пересечение графиков и число решений

Примеры графического пересечения на периоде



$\sin x = a$ (2 пересечения)

$\cos x = a$ (2 пересечения)

$\sin x = \pm 1$ (1 касание)

$\cos x = \pm 1$ (1 касание)

Промежуточное значение a вне допустимого уровня

Учебная интерпретация графиков $y = \sin x$, $y = \cos x$ и $y = a$; схема для типовых значений параметра.

На промежутке длиной 2π для $\sin x$ и $\cos x$ пересечения с прямой $y = a$ дают все решения уравнения, а их количество легко оценить визуально.

Число корней возрастает или уменьшается в зависимости от взаимного положения графика и линии $y = a$; крайние значения дают касание и один корень.

Геометрические применения тригонометрических уравнений

1

В задачах на треугольники тригонометрические уравнения возникают при нахождении углов по сторонам: например, когда известны длины и нужно определить неизвестный угол по соотношениям синусов и косинусов.

2

Когда требуется построить высоту, медиану или биссектрису, тригонометрия связывает длины отрезков с углами. После этого получается уравнение, которое переводит геометрическую задачу в алгебраическую форму.

3

Уравнения применяются в окружностях: хорды, дуги и вписанные углы дают равенства между углами и длинами. Неизвестная величина определяется через известные параметры окружности и построения на чертеже.

4

В координатной геометрии они помогают вычислять угол наклона прямой и расстояния между точками. Тем самым тригонометрические соотношения становятся инструментом для работы с реальными чертежами и моделями пространственных объектов.

8

5

9

Подготовка к контрольной работе по теме

1



Табличные значения

Убедитесь, что уверенно узнаете базовые углы (0 , $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/2$) и соответствующие значения $\sin$, $\cos$, tg . Это ускоряет переход от числа к геометрическому смыслу.



ОДЗ и аккуратность преобразований

Тренируйте исключение точек, где функции не определены, и контроль равносильности шагов. Ошибки в ОДЗ почти всегда «прячутся» после деления, сокращений и квадратов.



Формулы преобразований

Отрабатывайте формулы двойного угла и понижения степени, а также приведение к стандартному виду. Чем быстрее вы сводите задачу к $\sin x = a$ или $\cos x = a$, тем меньше риск потерять корни.



Проверка и стандартная запись ответа

После получения общего решения делайте подстановку и сверяйте число корней на периоде. Ответ записывайте как семейство значений, согласованное с периодичностью соответствующей функции.

2

x

Тригонометрические уравнения: уверенность в углах и решениях

Тригонометрические уравнения соединяют алгебраические преобразования, геометрический смысл угла и анализ периодичности. Они учат распознавать стандартный вид, использовать единичную окружность, правильно выбирать метод и проверять корни в конце.



cos

sin

1

tg

ctg