



Две важные идеи подсчёта: формула включения-исключения и взаимно однозначное соответствие

Точный подсчёт без ошибок и лишних повторов.



Зачем нужны строгие способы счёта в 8 классе

На этом этапе уже мало просто сложить числа: в задачах появляются пересечения, повторы и скрытые совпадения. Здесь помогают два инструмента — формула включения-исключения и взаимно однозначное соответствие, которые учат считать аккуратно и доказывать ответ.



Множества, объединение и пересечение

1

Что такое множество

Множество — это любой набор объектов, которые удобно рассматривать вместе: учеников, книг, чисел или букв. Важно лишь, какие элементы входят в этот набор, а не их порядок.

2

Объединение множеств

Объединение содержит все элементы, которые есть хотя бы в одном из множеств. Если объект встречается сразу в двух наборах, он всё равно должен остаться в объединении только один раз.

3

Пересечение множеств

Пересечение включает только общие элементы, то есть те, которые одновременно принадлежат обоим множествам. Именно эта часть чаще всего создаёт ошибки при простом сложении количеств.

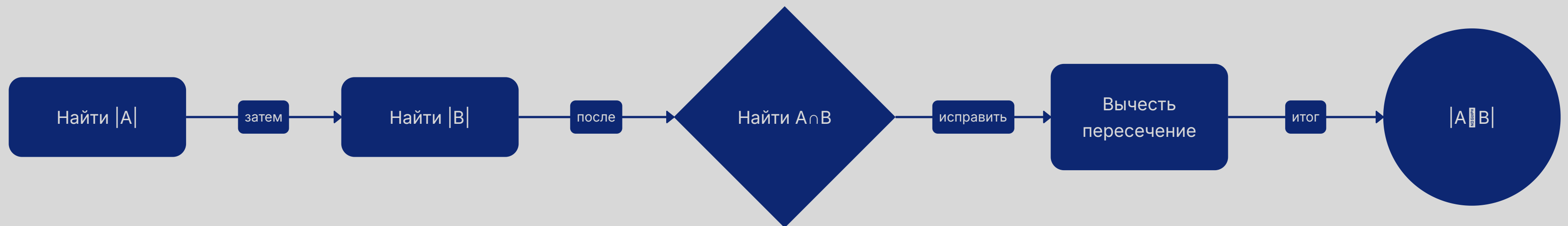
4

Почему нельзя складывать сразу

Если в двух множествах есть общие элементы, их нельзя просто прибавить друг к другу. Тогда совпадающие объекты будут посчитаны дважды, и результат окажется больше правильного.

Схема подсчёта для двух множеств

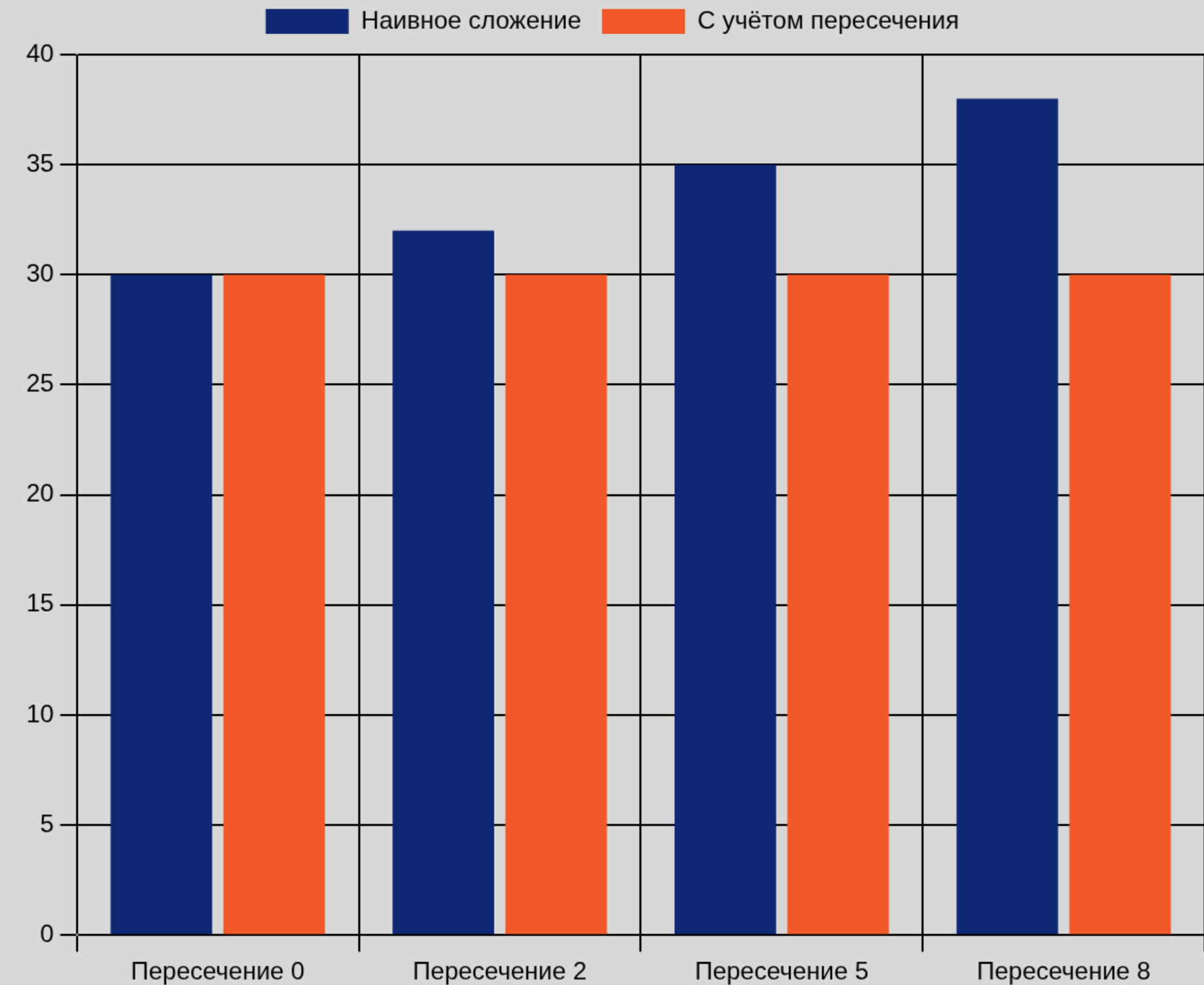
Отдельно считаем каждое множество, затем исправляем двойной счёт общих элементов.



Почему простое сложение даёт завышенный ответ

Чем больше общих элементов, тем сильнее расходятся два способа подсчёта. Наивная сумма не замечает совпадения, а формула сразу исправляет их.

Если пересечений нет, оба подхода совпадают. Но при любом общем элементе простое сложение завышает результат ровно на размер пересечения.



Схематический пример для объяснения принципа включения-исключения

Пример из школьной жизни: кружки и секции



Данные о классе

В классе 30 учеников. Из них 18 занимаются в спортивной секции, 12 ходят в музыкальный кружок, а 5 посещают оба занятия одновременно.

Как найти объединение

Чтобы узнать, сколько ребят ходят хотя бы в одно из двух занятий, складывают обе группы и вычитают тех, кто попал в обе сразу: $18 + 12 - 5$.

Почему это удобно

Такой пример легко представить на диаграмме Эйлера-Венна: два круга частично пересекаются, а общая часть показывает тех учеников, которых нельзя считать дважды.

Формулы для двух и трёх множеств

Знаки в формулах меняются так, чтобы каждый элемент был учтён ровно один раз.

При увеличении числа множеств добавляются новые пересечения, а знаки чередуются, чтобы восстановить точный итоговый счёт.

Случай	Формула	Смысл
2 множества	$ A \sqcup B = A + B - A \cap B $	убрать двойной счёт
3 множества	$ A \sqcup B \sqcup C = \dots + A \cap B \cap C $	исправить все пересечения

Почему формула работает без ошибок

01

Один набор

Если элемент принадлежит только одному множеству, он появляется в сумме один раз и остаётся учтённым один раз. Здесь ничего исправлять не нужно.

02

Два набора

Когда элемент есть в двух множествах, он сначала входит в подсчёт дважды. Затем пересечение вычитается один раз, и элемент остаётся ровно в одном экземпляре.

03

Три набора

Элемент, общий для трёх множеств, сначала учитывается три раза. Потом из него вычитают попарные пересечения, а затем снова добавляют тройное пересечение.

04

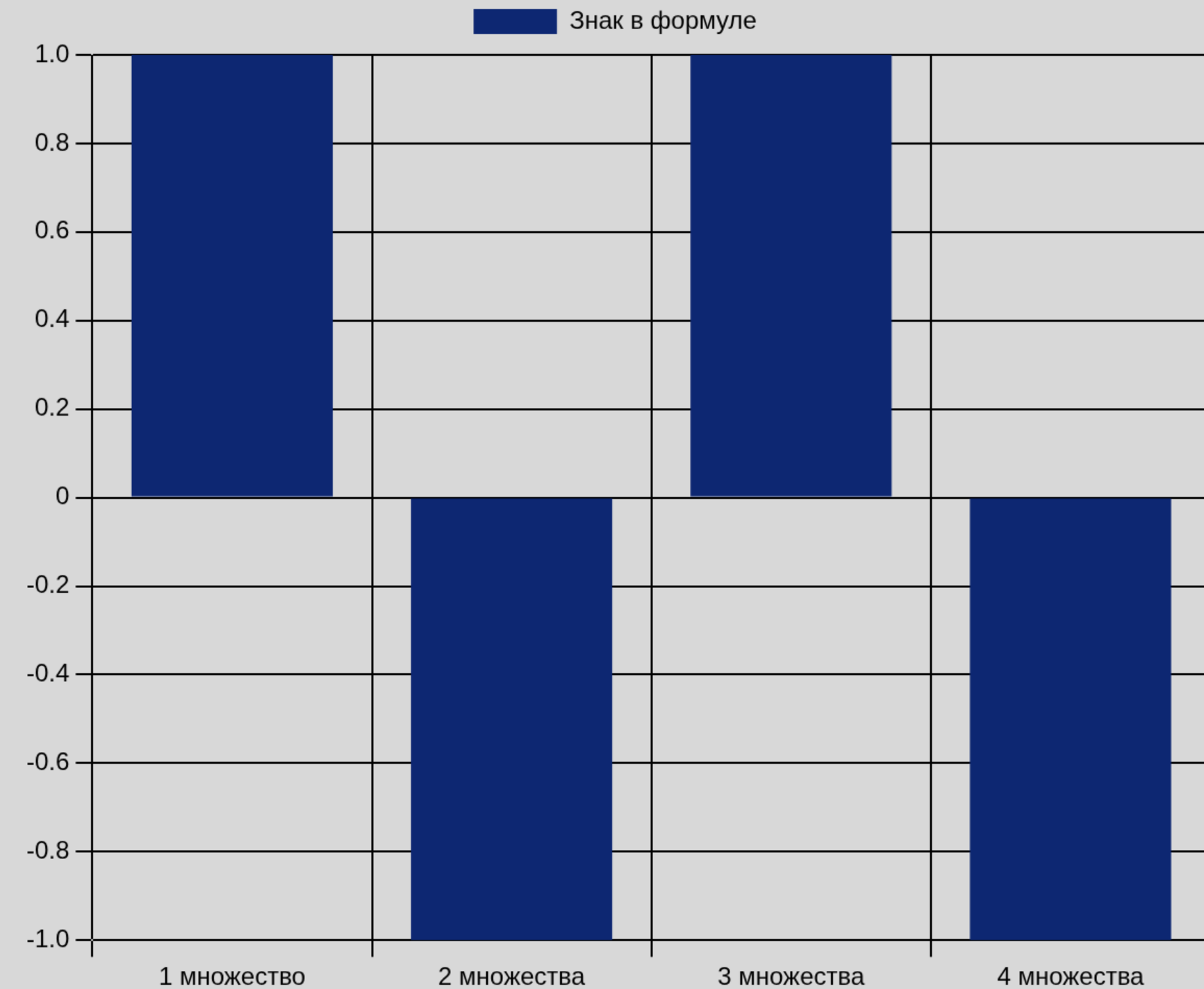
Итоговый принцип

Каждый шаг исправляет предыдущий перебор. Поэтому в конце элементы, сколько бы раз они ни встречались в исходных множествах, оказываются посчитанными точно.

Чередование знаков в общей формуле

Последовательность знаков помогает быстро вспомнить структуру формулы: сначала складываем отдельные множества, затем вычитаем пересечения, потом снова прибавляем более глубокие пересечения.

Чередование знаков — это не правило на память, а способ поэтапно исправлять лишние совпадения в подсчёте.



Обобщённая формула включения-исключения для конечных множеств

Какие задачи решаются с помощью включения-исключения



Классы и группы

Формула помогает узнать, сколько учеников попадает хотя бы в одну из двух или трёх групп, если часть ребят участвует сразу в нескольких из них.



Книги и темы

Её используют, когда нужно посчитать книги по разделам, статьи по темам или слова с разными признаками, не считая один и тот же объект дважды.



Числа и делимость

В задачах о числах удобно считать, сколько натуральных чисел делится на разные числа, а затем отдельно учитывать те, которые делятся сразу на несколько.



Опросы и ответы

Метод применяют и в опросах: если один человек дал несколько подходящих ответов, нужно аккуратно убрать повторы и получить точное число участников.

Взаимно однозначное соответствие: что это такое



Одна пара на каждый элемент

Биекция связывает каждый элемент первого множества с единственным элементом второго. Это значит, что соответствие не может быть частичным: без пары не остаётся ни один объект.

Без повторов и потерь

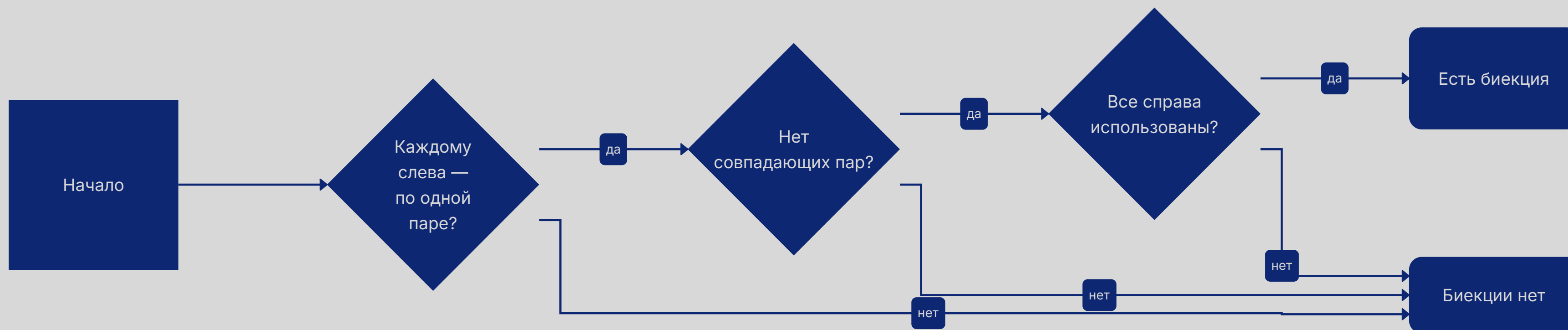
Если двум разным элементам слева назначить одну и ту же пару справа, соответствие нарушится. Так же недопустимо, чтобы часть элементов справа осталась неиспользованной.

Понятный школьный пример

Представьте раздачу карточек в классе: каждому ученику дают ровно одну карточку, и все карточки распределяются без повторов. Именно так выглядит взаимно однозначное соответствие на практике.

Проверка взаимно однозначного соответствия

Сначала проверяем, что каждой точке слева соответствует одна точка справа, затем убеждаемся в отсутствии повторов и пропусков.



Как распознают равномощность

● Сравнение по числу элементов

Два множества называют равномощными, если между ними можно установить биекцию. Для сравнения важна не форма записей, а точное совпадение по числу элементов.

● Разные объекты — одинаковое количество

Буквы, числа, карточки или рисунки могут выглядеть совсем по-разному, но при биекции они считаются одинаковыми по мощности, потому что каждому объекту найдена ровно одна пара.

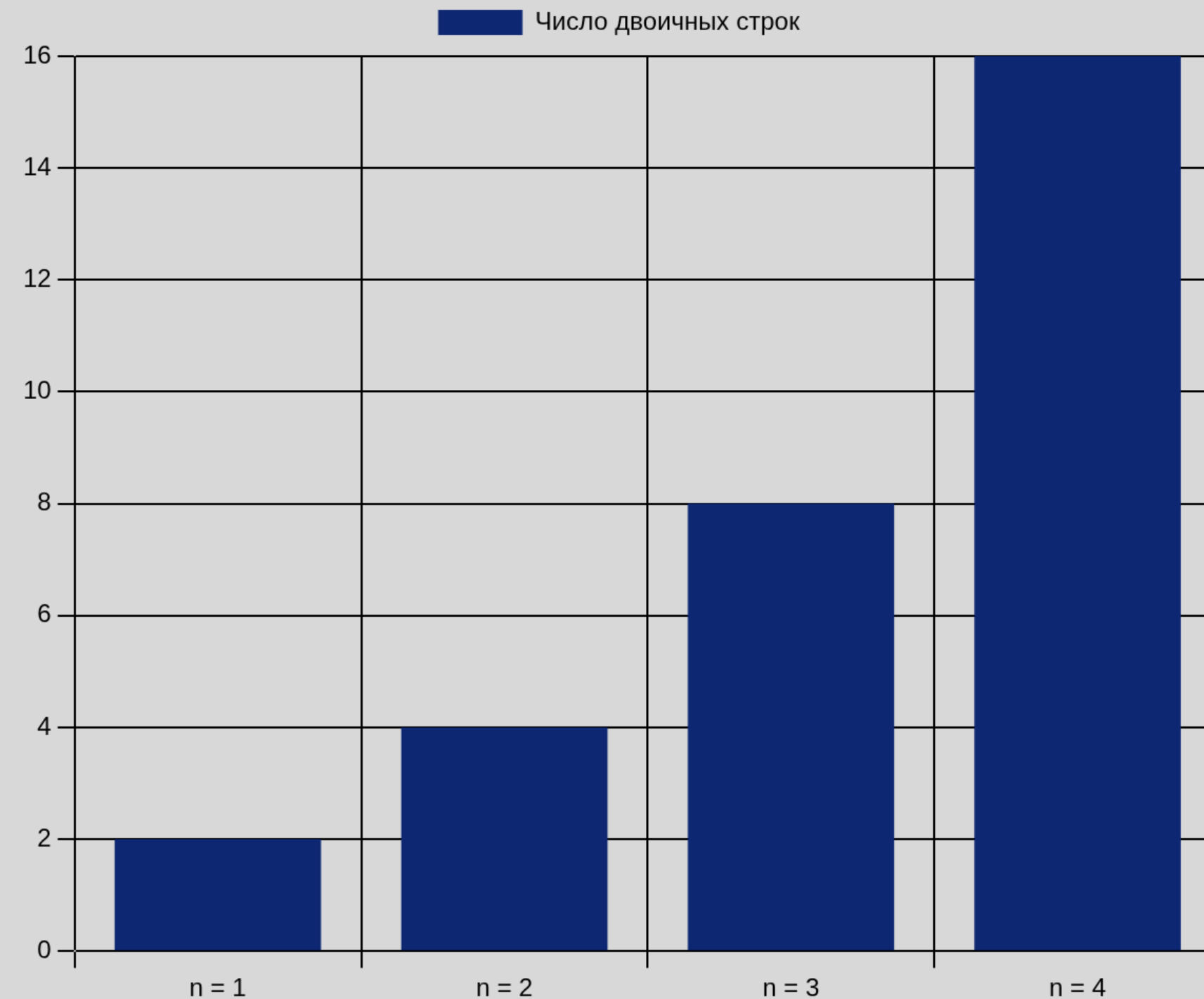
● Практический вывод

Такой способ сравнения помогает доказывать равенство количеств без полного перечисления всех объектов. Достаточно показать, что соответствие можно построить без пропусков и повторов.

Примеры биекции в математике

Каждый разряд двоичной строки даёт два выбора, поэтому количество вариантов быстро растёт. Биекция показывает, что это не случайный набор строк, а точный счёт через выборы.

Закон виден сразу: при добавлении одного разряда число строк удваивается. Это удобный пример того, как соответствие заменяет длинный перебор.



Учебный пример: двоичные строки длины n

Как две темы связаны между собой

- **Точный счёт**

Формула включения-исключения исправляет двойной счёт, а биекция позволяет считать через замену задачи на равномощное множество. В обоих случаях важна строгая проверка каждого элемента.

- **Общие идеи**

И там и там нужно внимательно отслеживать, что уже учтено, а что ещё нет. Ошибка возникает не из-за сложности вычислений, а из-за неточного рассуждения.

- **Одна привычка мышления**

Обе темы учат строить решение по шагам: сначала понять связи между объектами, затем аккуратно посчитать и только после этого делать вывод о результате.

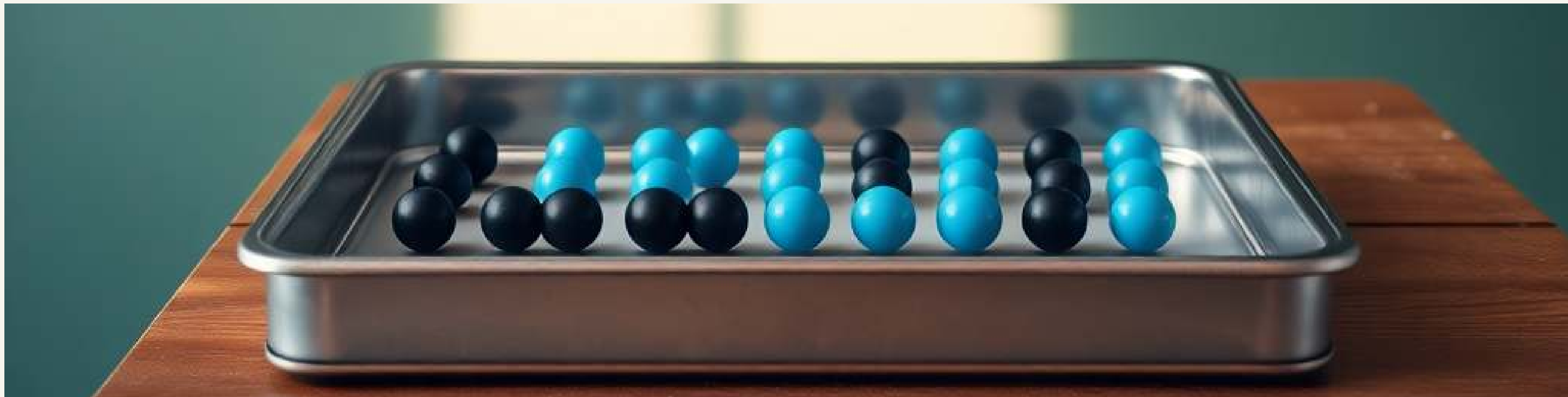
Сравнение двух методов подсчёта

Метод	Когда применять	Главная идея
Включение-исключение	Есть пересечения	Исправить счёт
Биекция	Нужна пара	Сравнить мощности
Ошибка	Пересечение забыто	Пара не проверена

Оба метода помогают считать точно, но применяются в разных ситуациях. Таблица показывает, когда нужен каждый способ и какие ошибки встречаются чаще всего.

Если есть общие элементы, нужен учёт пересечений; если важно сравнить количество объектов, удобнее искать биекцию. В обоих случаях решает точность проверки.

Классический пример биекции: двоичные строки



1 Выбор в каждом разряде

У каждой позиции строки есть только два варианта: 0 или 1. Поэтому построение строки можно понимать как последовательность независимых выборов.

2 Почему получается 2^n

Если разрядов n , а вариантов для каждого разряда два, то всего возможно 2^n строк. Каждая строка соответствует одному набору выборов, и наоборот.

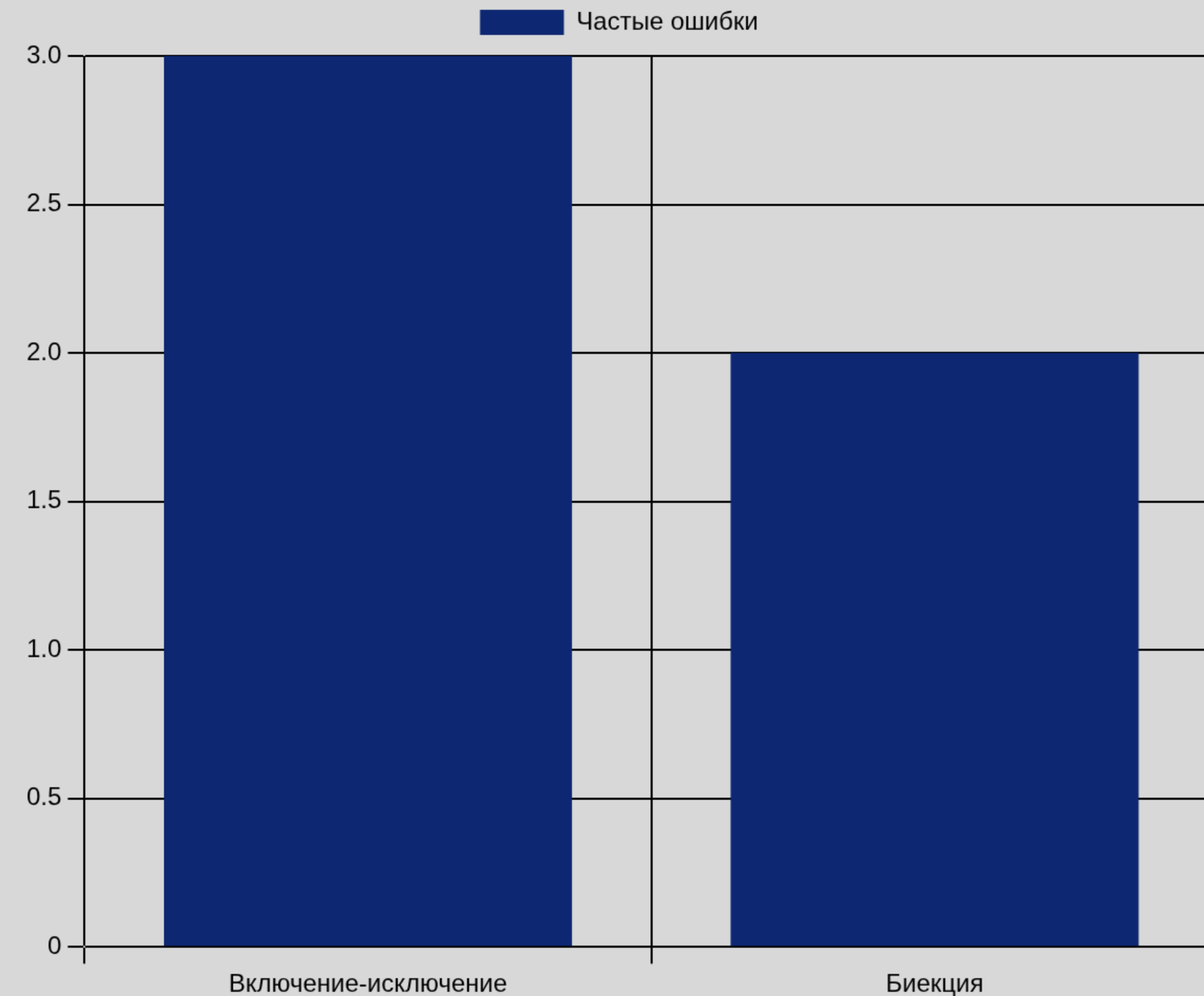
3 Пример для $n = 3$

Для трёх разрядов можно выписать восемь строк: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111. Этот список подтверждает правило на конкретном примере.

Типичные ошибки при решении задач

Ошибки чаще связаны не с вычислениями, а с невнимательной проверкой условий. Полезно каждый раз отдельно отмечать пересечения, пары и все элементы справа.

Для включения-исключения опаснее всего забыть пересечение; для биекции — принять частичное соответствие за полное. Проверка условий помогает избежать неверного ответа.



В задаче с двумя кружками число участников сначала складывают, а затем обязательно вычитают тех, кто состоит в обоих кружках, чтобы не зависить ответ.

20

учеников удобно проверять через пересечение двух множеств.

Учебный пример по теме включения-исключения

Точный счёт и точное соответствие

Формула включения-исключения помогает считать объединения без двойного счёта, а биекция — сравнивать множества через равное число пар. Вместе они учат рассуждать аккуратно, проверять условия и доверять только точному выводу.