

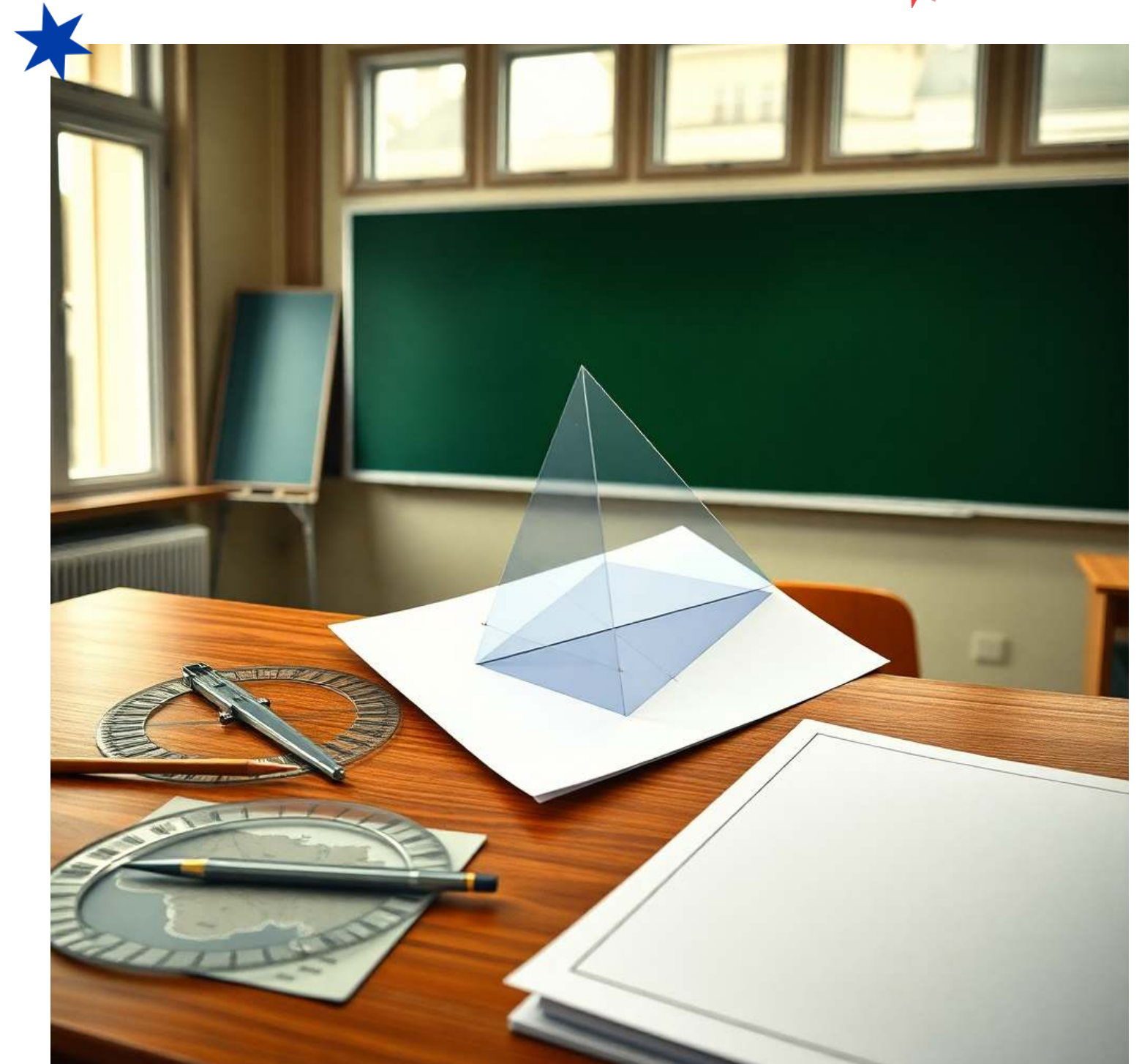
Формулы кратных углов в решении тригонометрических уравнений

Тригонометрия становится проще через формулы кратных углов



Почему эта тема важна в 10 классе

Тригонометрические уравнения регулярно встречаются в 10 классе, в контрольных и на ЕГЭ. Формулы кратных углов помогают заменить выражения с двойным аргументом функциями одного переменного и часто переводят задачу в удобный алгебраический вид.



Основные формулы кратных углов

Синус двойного угла

Формула $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$ особенно полезна, когда в уравнении одновременно присутствуют $\sin x$ и $\cos x$. Она сразу превращает произведение тригонометрических функций в более удобную запись.

Косинус в разных формах

Равенства $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ и $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ равносильны. Выбор зависит от того, какая функция уже есть в уравнении.

Тангенс двойного угла

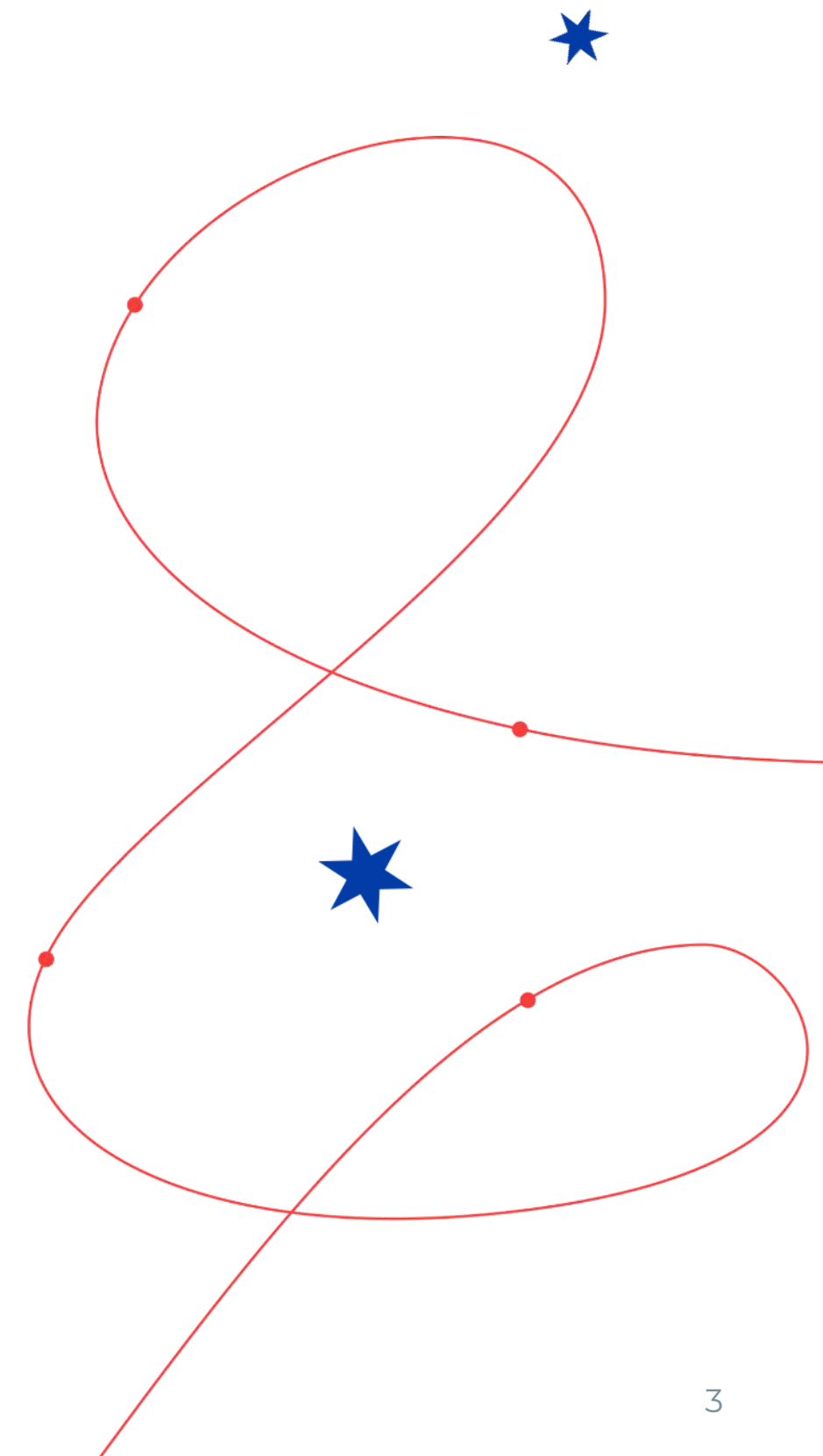
Формула $\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$ помогает, когда задача записана через тангенс. Она переводит тригонометрическое уравнение в рациональное, которое можно решать стандартными методами алгебры.

Зачем выбирать форму

Одна и та же формула может записываться по-разному, но не каждая форма одинаково удобна. Важно выбрать вариант, который сокращает выражение, упрощает вычисления и делает дальнейшие преобразования короче.

Практический смысл

Эти равенства экономят время на экзамене и уменьшают риск ошибок. Чем раньше выражение приводится к простому виду, тем легче увидеть способ решения и проверить найденные корни.



Какая форма формулы удобнее в разных задачах



Сравнение показывает, какую запись проще применять в типовых уравнениях.

Форма выбирается по уже имеющимся функциям: это ускоряет преобразование и часто сразу ведёт к алгебраическому уравнению.

Формула	Через $\sin x$	Через $\cos x$	Когда удобно
$\sin 2x$	$2\sin x \cdot \cos x$	—	произведение
$\cos 2x$	$1 - 2\sin^2 x$	$2\cos^2 x - 1$	квадратное
$\operatorname{tg} 2x$	$2\operatorname{tg} x / (1 - \operatorname{tg}^2 x)$	—	дробное



Геометрический смысл формул кратных углов

Угол как поворот

На единичной окружности каждому углу соответствует точка с координатами $(\cos x, \sin x)$. Если угол удваивается, то меняется не только положение точки, но и её проекции на оси, поэтому формулы кратных углов отражают геометрию поворота в явном виде.



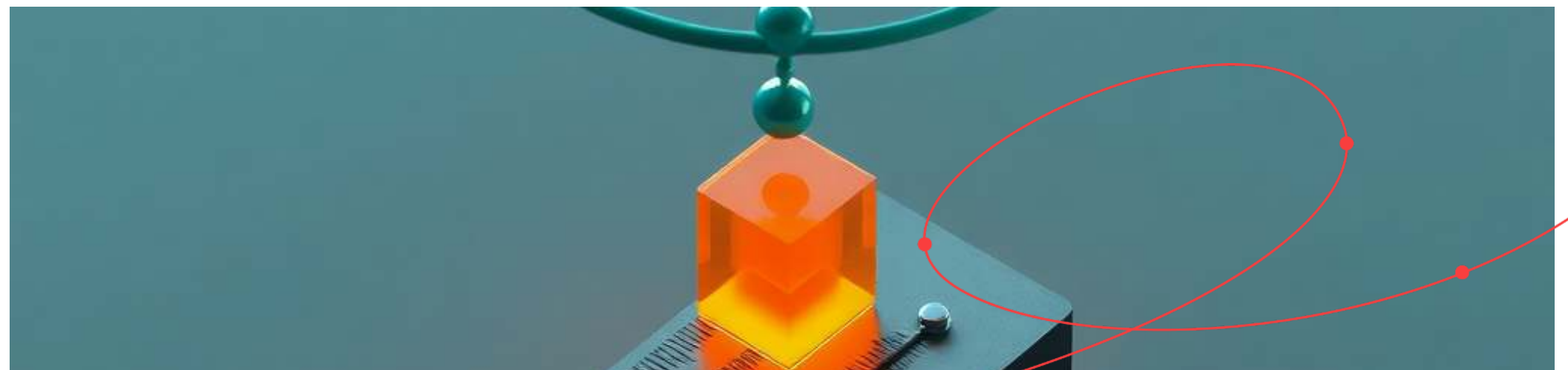
Почему появляется произведение

Формула $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$ показывает связь вертикальной и горизонтальной проекций точки после поворота. Именно поэтому в уравнениях с произведением $\sin x$ и $\cos x$ эта запись особенно естественна и наглядна.



Косинус и координата точки

Формулы для $\cos 2x$ описывают изменение абсциссы на окружности. Когда в уравнении уже есть $\sin x$ или $\cos x$, удобная форма позволяет выразить одну координату через другую и перейти к более простому алгебраическому уравнению.



Как выбирается подходящая формула



Есть $\sin x$ и $\cos x$

Если в уравнении обе функции уже присутствуют, чаще всего выбирают $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$. Эта форма естественно объединяет множители и помогает сразу увидеть возможность разложения.



Только $\sin x$

Когда в записи есть только $\sin x$, удобнее использовать $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$. После подстановки уравнение часто становится квадратным относительно $\sin x$, что упрощает решение.



Только $\cos x$

Если в уравнении фигурирует $\cos x$, рационально взять форму $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$. Тогда можно сразу получить квадратное уравнение относительно $\cos x$ и решить его привычным способом.



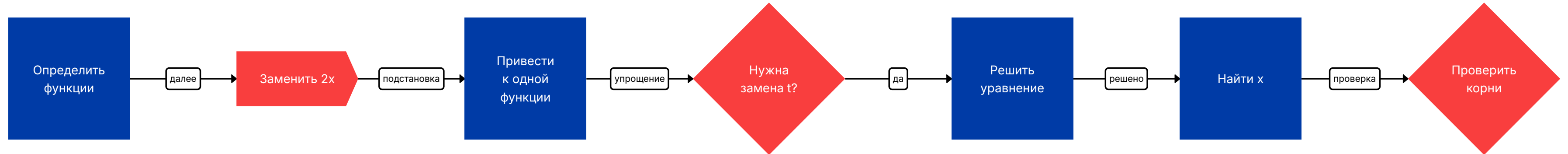
Есть $\operatorname{tg} x$

При тангенсе удобна формула $\operatorname{tg} 2x = 2\operatorname{tg} x / (1 - \operatorname{tg}^2 x)$. Она приводит к дробному, но алгебраически понятному уравнению, где важно не забыть про ограничения знаменателя.



Общий алгоритм решения уравнений с кратными углами

Последовательность перехода от тригонометрической записи к алгебраическому уравнению



Уравнения вида $\sin 2x = a$ и их преобразование

1. Подстановка формулы

Сначала заменяют $\sin 2x$ на $2\sin x \cdot \cos x$. Это сразу убирает двойной аргумент и позволяет увидеть структуру уравнения, которая раньше была скрыта за краткой записью.

2. Разложение на множители

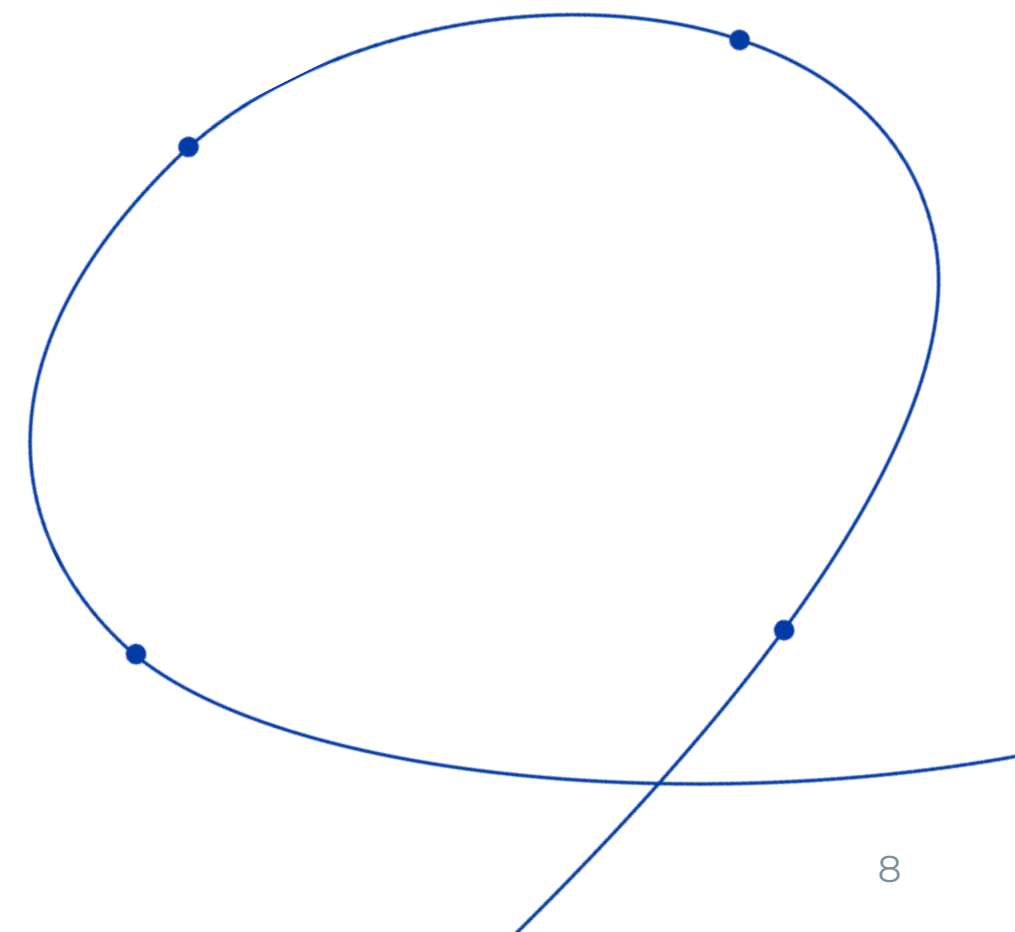
Во многих задачах после преобразования получается произведение, равное нулю. Тогда уравнение распадается на более простые случаи, каждый из которых можно решать отдельно и без лишних вычислений.

3. Стандартные ответы

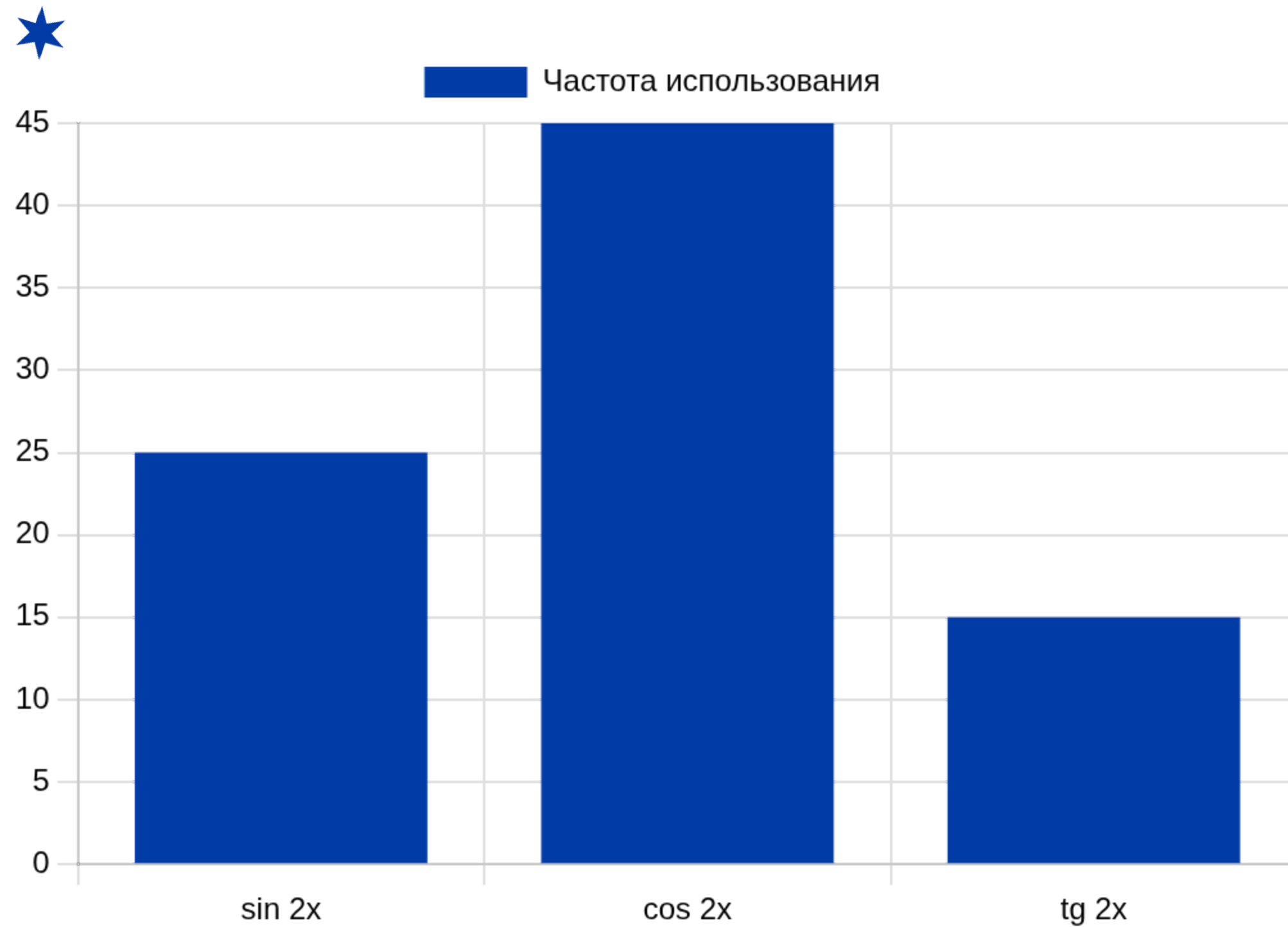
Часто возникают уравнения $\sin x = 0$ или $\cos x = 0$. Они решаются по единичной окружности или по общим формулам, поэтому такой переход значительно сокращает путь к ответу.

4. Сложный остаток

Если множители не выделяются сразу, остаётся более простое тригонометрическое уравнение. Оно уже содержит меньше слагаемых и обычно решается быстрее, чем исходная запись с $\sin 2x$.



Какие формулы кратных углов используются чаще в школьных задачах



На диаграмме видно, что чаще всего школьные задачи сводятся к форме с косинусом двойного угла.

$\cos 2x$ чаще ведёт к квадратному уравнению, $\sin 2x$ удобно при произведениях, а $\operatorname{tg} 2x$ встречается реже, но остаётся важным в тангенсных задачах.

Уравнения вида $\cos 2x = 0$ и $\cos 2x = b$



1.

Выбор формы

Если в уравнении уже есть $\sin x$, удобнее записать $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$. Когда присутствует $\cos x$, чаще выбирают $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, чтобы сразу работать с одной функцией.

2.

Переход к квадратному виду

После замены уравнение нередко превращается в квадратное относительно $\sin x$ или $\cos x$. Это делает задачу похожей на обычное алгебраическое уравнение, которое можно решить по известному алгоритму.

3.

Сведение к стандартной форме

Запись $\cos 2x = 0$ или $\cos 2x = b$ удобна тем, что после преобразования легко выделить неизвестную тригонометрическую функцию. Затем остаётся решить простое уравнение и восстановить угол x .

4.

Проверка диапазона

После нахождения значений $\sin x$ или $\cos x$ обязательно проверяют, лежат ли они в промежутке от -1 до 1 . Это предотвращает появление лишних корней и делает ответ корректным.



Пример преобразования в квадратное уравнение

1. Подстановка формулы

Заменяем $\cos 2x$ по формуле $2\cos^2 x - 1$, чтобы убрать удвоенный угол. Тогда исходное уравнение сразу переходит к выражению только через $\cos x$.

2. Приведение к стандартному виду

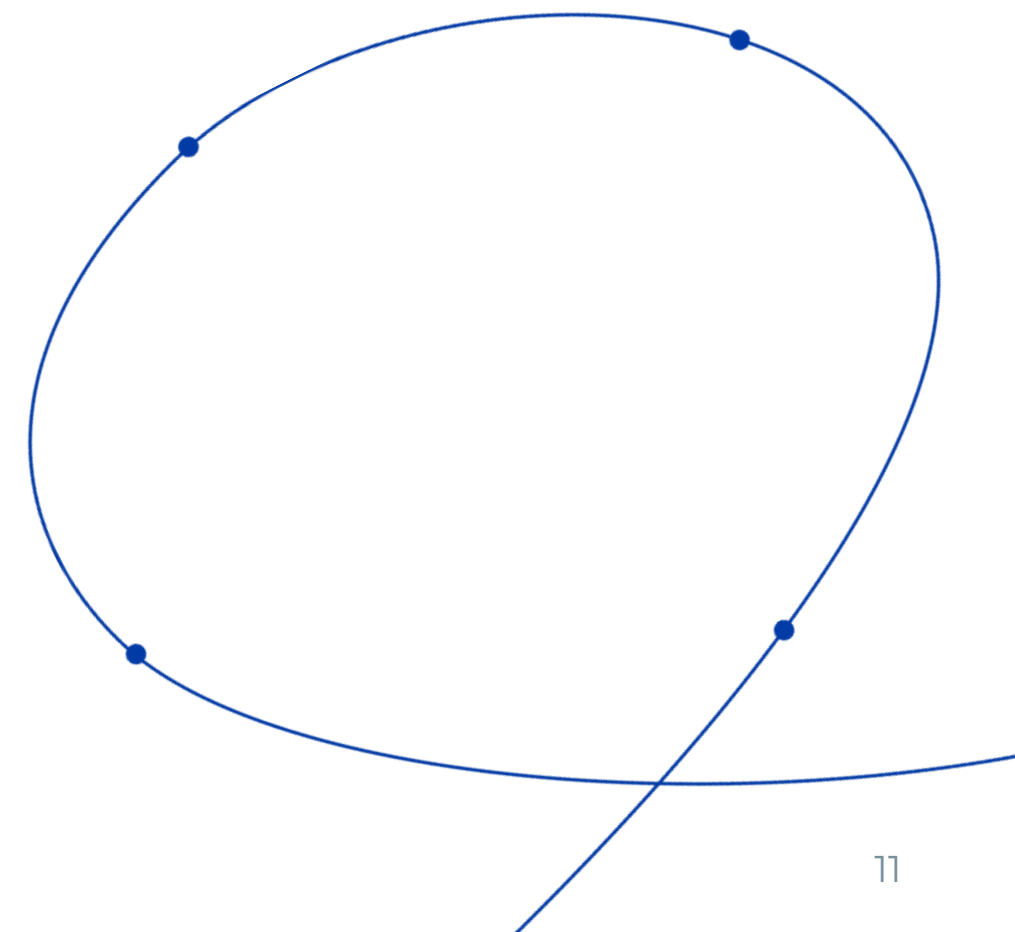
После раскрытия скобок получаем $4\cos^2 x + 3\cos x - 3 = 0$. Это уже обычное квадратное уравнение, где переменная — значение тригонометрической функции.

3. Ввод замены

Обозначаем $t = \cos x$ и решаем $4t^2 + 3t - 3 = 0$. Такая запись помогает работать с уравнением методами алгебры, не теряя структуру задачи.

4. Проверка корней

После нахождения t обязательно проверяем условие $-1 \leq t \leq 1$. Если значение не принадлежит этому промежутку, оно не может быть равно $\cos x$ и исключается.



Проверка допустимых значений после замены



Сравните допустимые значения тригонометрических функций и типичные ошибки, чтобы не принять лишний корень и не потерять область определения.

Для $\sin x$ и $\cos x$ нужно контролировать только отрезок значений, а для $\operatorname{tg} x$ — ещё и точки, где функция не определена.

Выражение	Интервал	Ошибка	Проверка
$\sin x$	$[-1; 1]$	Выход за пределы	Сравнить с интервалом
$\cos x$	$[-1; 1]$	Лишний корень	Проверить значение
$\operatorname{tg} x$	$\mathbb{R}$, кроме нед.	Забыть ОДЗ	Учесть точки разрыва



Уравнения вида $\operatorname{tg} 2x$ и их особенности

Рационализация записи

Формула $\operatorname{tg} 2x = 2\operatorname{tg} x / (1 - \operatorname{tg}^2 x)$ переводит уравнение к рациональному виду. После замены выражения с тангенсом решаются алгебраическими приёмами, привычными для школьного курса.

Условие на знаменатель

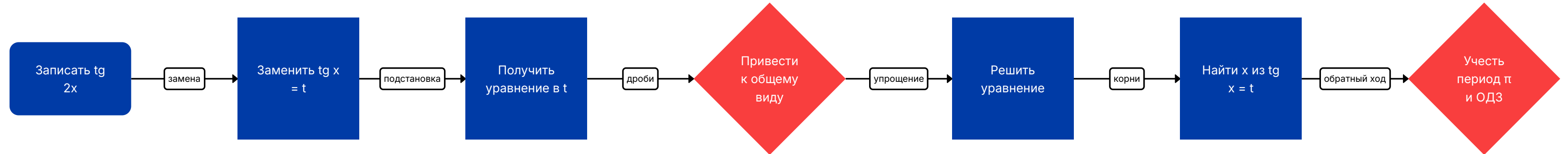
При преобразовании важно помнить, что $1 - \operatorname{tg}^2 x$ не должно обращаться в ноль. Поэтому значения $\operatorname{tg} x = 1$ и $\operatorname{tg} x = -1$ сразу исключаются из рассмотрения.

Связь с алгеброй

Задания с $\operatorname{tg} 2x$ показывают, как тригонометрическая запись превращается в дробное уравнение. Это удобно, когда требуется свести решение к стандартным методам преобразования и проверки корней.

Решение через замену $t = \operatorname{tg} x$

Пошаговая схема перехода от тригонометрического уравнения к рациональному и обратно.



Типичные ошибки при решении

Потеря множителя

После разложения на множители легко забыть, что каждый множитель может дать отдельное решение. Если проверить только один из них, часть корней будет безвозвратно потеряна.

Неудачная форма формулы

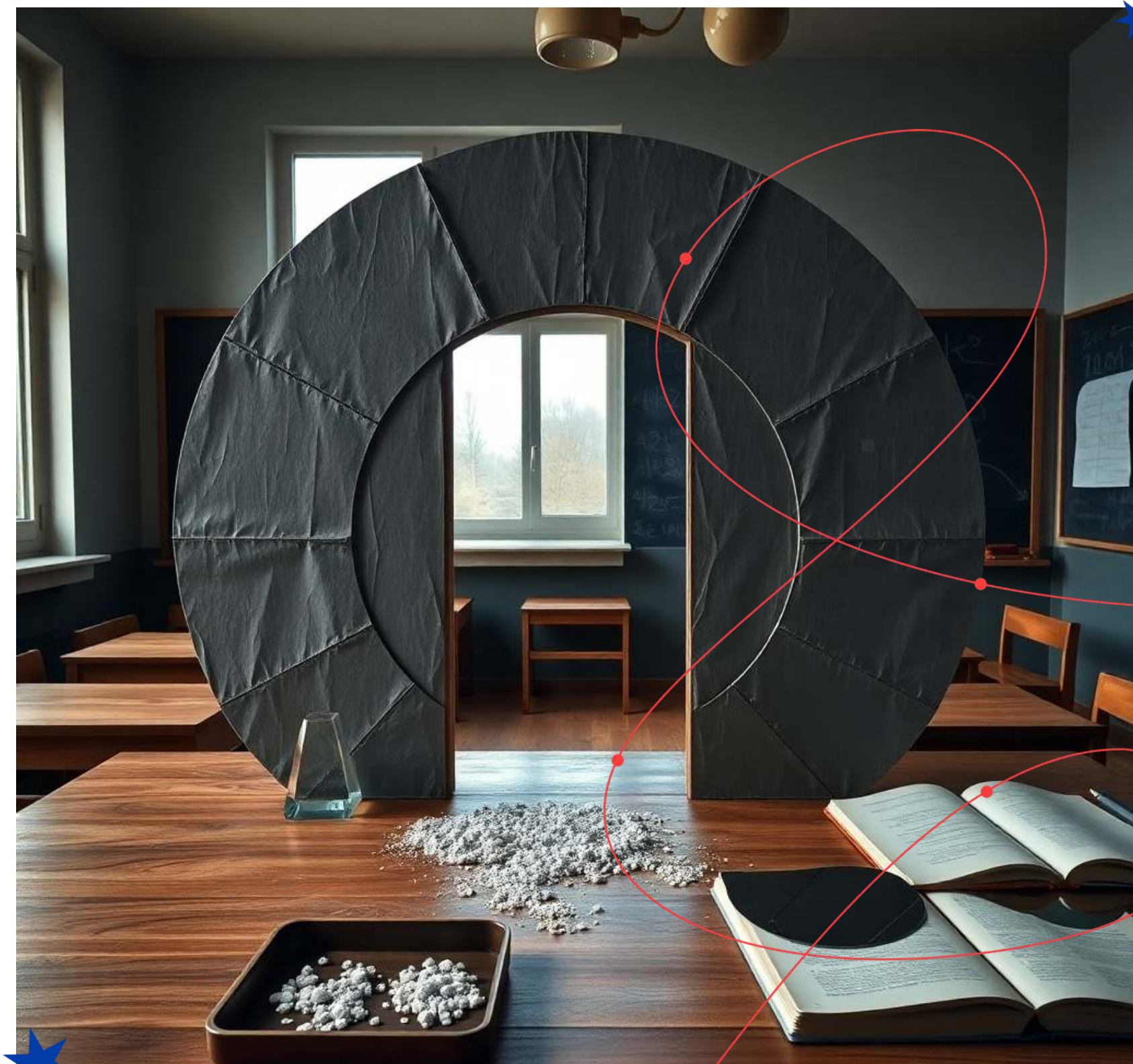
Иногда выбирают запись $\cos 2x$, которая лишь усложняет уравнение. Лучше заранее оценить, какая форма быстрее приведёт к квадратному или рациональному виду.

Деление без проверки

Опасно делить на выражение, которое может быть равно нулю. Такой шаг способен исключить допустимые решения, поэтому перед делением нужно явно учитывать возможные нули.

Отсутствие проверки

Даже верно найденные значения после замены необходимо подставить обратно. Без этого можно принять посторонний корень или забыть про ограничения области определения функции.



На каких этапах решения возникают основные трудности

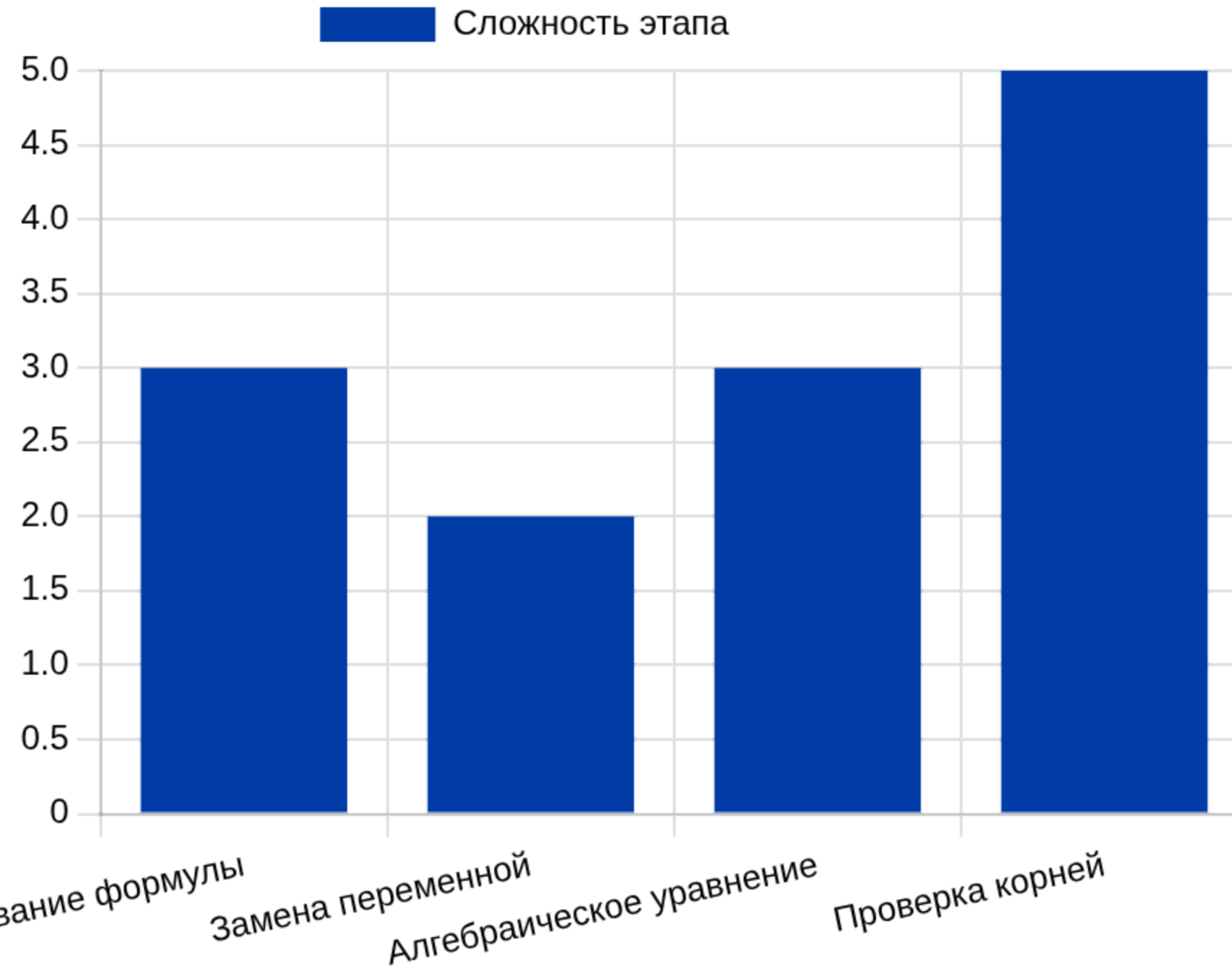


Диаграмма показывает, что трудности возрастают к финалу решения, когда нужно одновременно учитывать корни и ограничения функции.

Наиболее сложен этап проверки: именно он выявляет посторонние решения. Выбор формы формулы также влияет на трудоёмкость всего решения.



Экспертная оценка типичных шагов решения уравнений по теме

Практический пример полного решения



1. Исходное уравнение

Начинаем с $2\sin 2x = 1 - \cos 2x$ и заменяем кратные углы стандартными формулами, чтобы выразить всё через $\sin x$ и $\cos x$.

2. Преобразование записи

После подстановки получаем $4\sin x \cos x = 2\sin^2 x$. Теперь уравнение можно упростить, вынеся общий множитель и рассмотрев отдельные случаи.

3. Основной случай

При $\sin x \neq 0$ делим на $\sin x$ и приходим к $\tan x = 2$. Затем находим все углы с учётом периода тангенса.

4. Отдельная проверка

Случай $\sin x = 0$ рассматриваем отдельно, чтобы не пропустить дополнительные корни. После этого все найденные значения обязательно проверяются подстановкой.



Связь формул кратных углов с другими темами



Основное тождество

Формулы кратных углов опираются на соотношение $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Оно позволяет переходить от одной тригонометрической функции к другой и упрощать преобразования.



Понижение степени

При раскрытии $\cos 2x$ часто возникают выражения с квадратами $\sin x$ и $\cos x$. Это естественно связывает тему с формулами понижения степени и упрощением выражений.



Суммы и произведения

Формулы кратных углов удобно использовать вместе с преобразованием произведений в суммы. Такое сочетание помогает раскрывать сложные выражения и приводить их к более простому виду.



Тождества и графики

Эти формулы нужны не только в уравнениях, но и при доказательстве равенств, исследовании тождеств и анализе графиков, где важно видеть поведение функции при удвоенном угле.

Мини-набор формул для запоминания



Короткая таблица помогает быстро выбрать нужную запись при решении типовых уравнений с кратными углами и сокращает число лишних преобразований.

Эти записи покрывают большинство школьных задач: они либо сводят уравнение к квадратному, либо помогают быстро убрать удвоенный угол.

Формула	Когда	Что упрощает
$\sin 2x$	$\sin$ и $\cos$	Произведение
$\cos 2x=1-2\sin^2x$	Есть $\sin x$	Квадратное
$\cos 2x=2\cos^2x-1$	Есть $\cos x$	Квадратное
$\operatorname{tg} 2x; 1\pm\cos 2x$	Есть $\operatorname{tg}, \sin, \cos$	Дроби



Итоги изучения темы

Формулы кратных углов дают удобный способ переводить тригонометрические уравнения в алгебраические. Уверенный выбор формулы, аккуратные преобразования и проверка корней делают решение быстрее и надёжнее.

