

Центральные углы и дуги окружности

Изучаем, как угол в центре задаёт дугу,
сектор и часть круга.





Дуги и углы вокруг нас

Часы, колёса, диаграммы и рисунки зданий постоянно используют окружности и их части. Понимание центральных углов помогает делить круг точно и решать задачи без лишних вычислений.



Окружность и дуга окружности

Что такое окружность

Окружность — это множество точек плоскости, одинаково удалённых от одной точки, которая называется центром окружности.

Малая и большая дуга

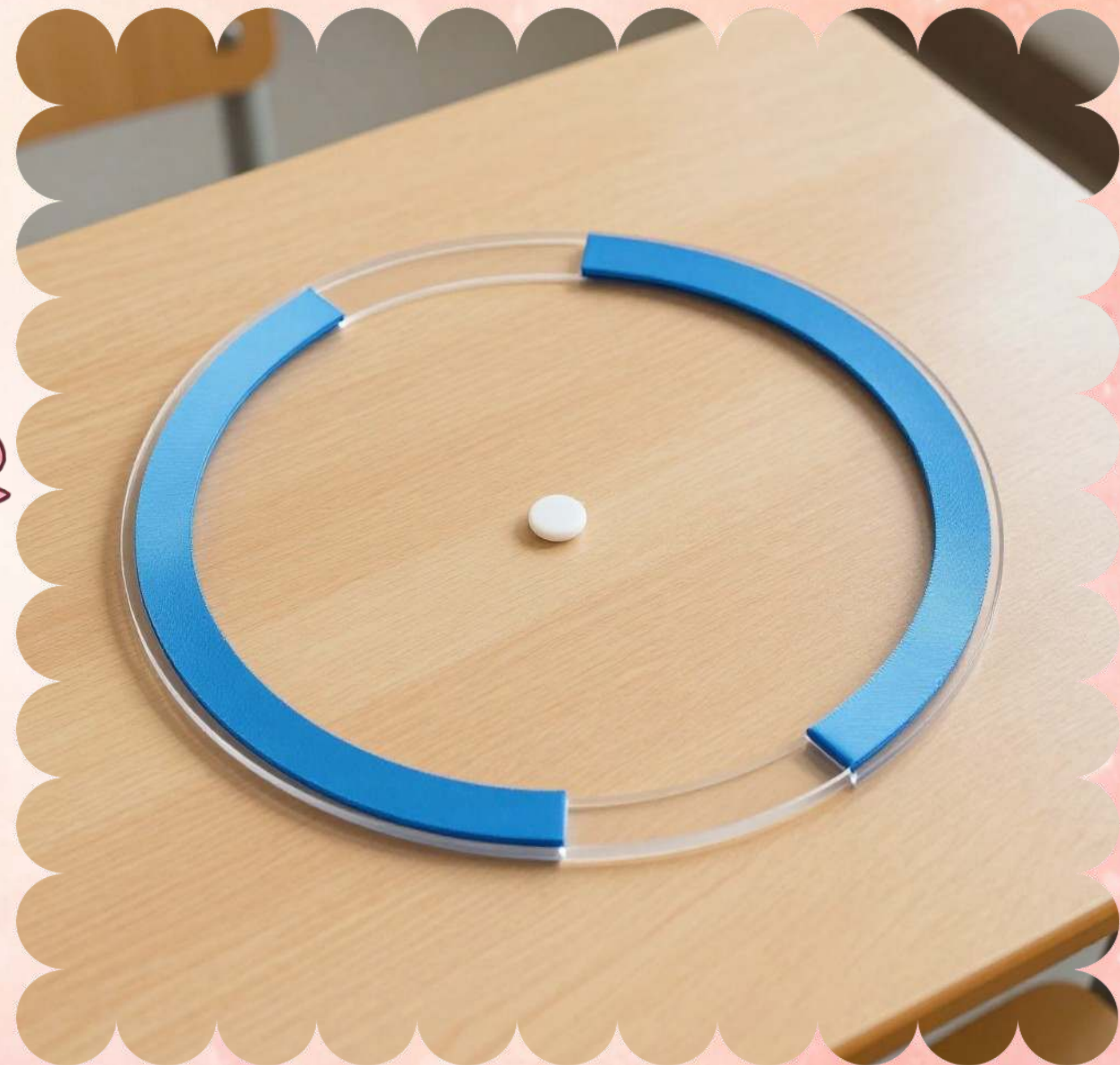
Малая дуга короче полуокружности, а большая дуга длиннее её; выбор дуги меняет ответ и способ решения.

Что такое дуга

Дуга — это часть окружности между двумя её точками; в задаче важно понимать, нужна меньшая или большая дуга.

Почему это важно

При построении чертежей и решении геометрических задач сначала определяют границы окружности, затем точно обозначают нужную дугу.



Что такое центральный угол



1 Расположение вершины

Вершина центрального угла находится в центре окружности, поэтому такой угол всегда рассматривают внутри круга, а не на его границе.

2 Стороны угла

Стороны центрального угла – это радиусы, проведённые из центра к точкам окружности; они задают направление угла.

3 Какая дуга получается

Концы сторон угла определяют дугу, которую он стягивает; чем больше угол, тем больше соответствующая дуга.

4 Связь с окружностью

Центральный угол удобно использовать для деления круга на равные части, потому что он опирается на радиусы и центр.

Равенство мер центрального угла и дуги

1 Главное правило

Градусная мера дуги всегда равна градусной мере центрального угла, который эту дугу стягивает.

2 Простой пример

Если центральный угол равен 40° , то соответствующая дуга тоже равна 40° ; числовое значение не меняется.

3 Полуокружность

Когда центральный угол равен 180° , он стягивает полуокружность, то есть ровно половину всей окружности.

4 Что показать на рисунке

На чертеже удобно отметить центр O , радиусы OA и OB , угол AOB и выделенную дугу AB .





Угол	Дуга
30°	30°
90°	$\frac{1}{4}$ окружности
120°	$\frac{1}{3}$ окружности
180°	$\frac{1}{2}$ окружности
360°	вся окружность

Основные соответствия углов и дуг

Таблица показывает, как градусная мера центрального угла связана с частью окружности.

Чем больше угол, тем больше дуга; сумма всех дуг одной окружности составляет 360°.

Школьная геометрия: связь центрального угла и дуги окружности

Части круга и градусная мера

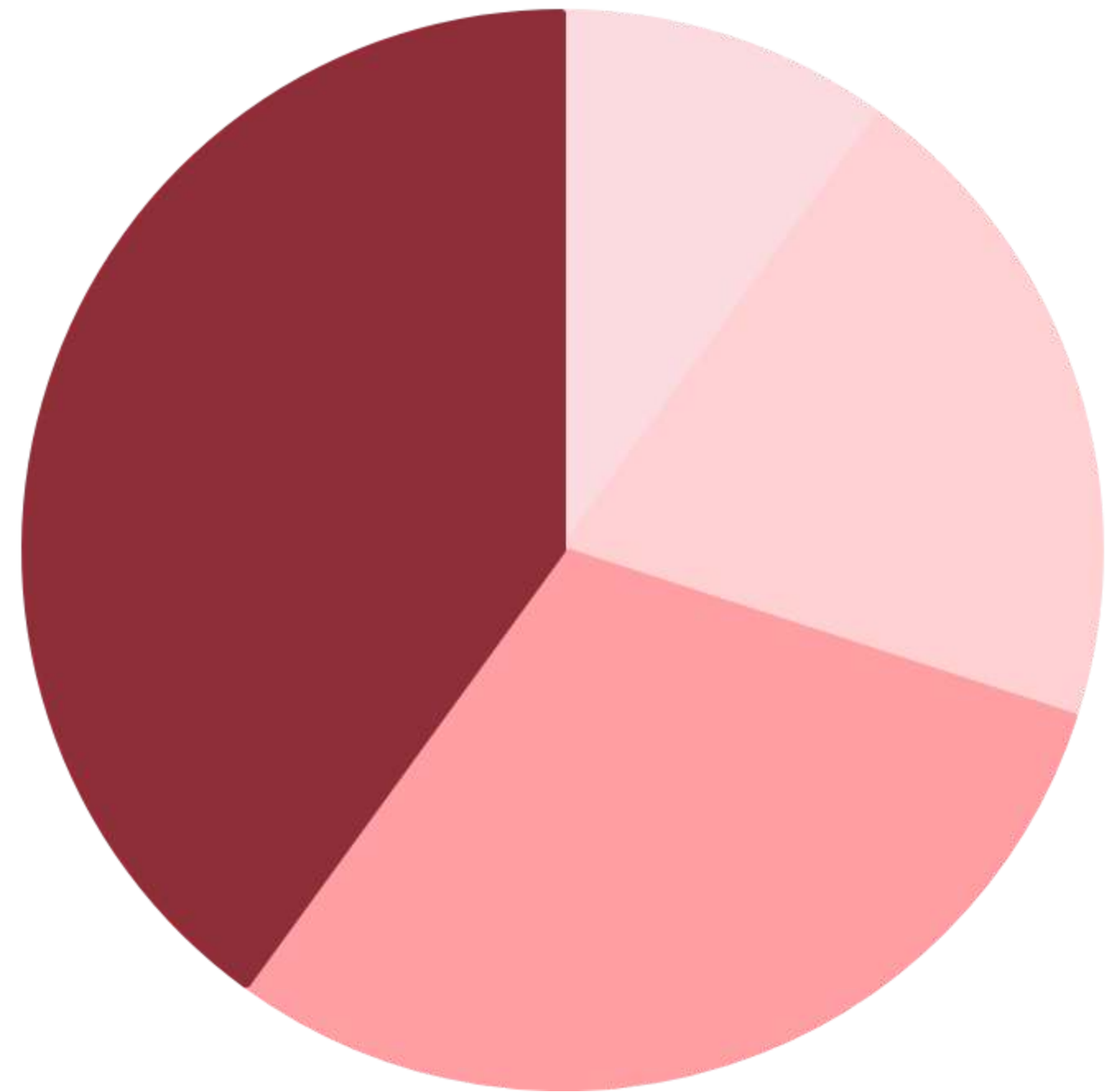
Диаграмма помогает быстро увидеть, как доля круга превращается в градусы без длинных вычислений.

Градусная мера растёт пропорционально доле круга, потому что полная окружность равна 360° .

Построено по соотношению долей окружности и 360°



$\frac{1}{4}$ круга $\frac{1}{2}$ круга $\frac{3}{4}$ круга
Вся окружность



Сектор окружности и его границы



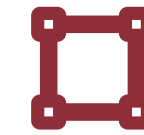
Что такое сектор

Сектор — это часть круга, ограниченная двумя радиусами и дугой между их концами; он выглядит как «кусочек» круга.



Что задаёт размер

Размер сектора определяет центральный угол: чем он больше, тем больше часть круга, которую занимает сектор.

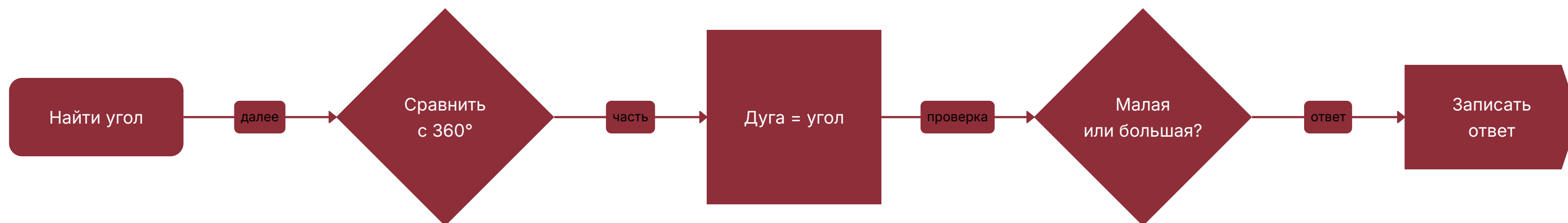


Из чего состоит граница

Дуга образует изогнутую часть границы, а два радиуса — прямые боковые стороны; вместе они замыкают сектор.

Как найти дугу по центральному углу

Алгоритм решения задач на связь центрального угла и дуги окружности



Как найти центральный угол по дуге

Шаг 2

Если дана доля круга,
переводят
её в градусы через
 360° : половина даёт
 180° , треть — 120° .

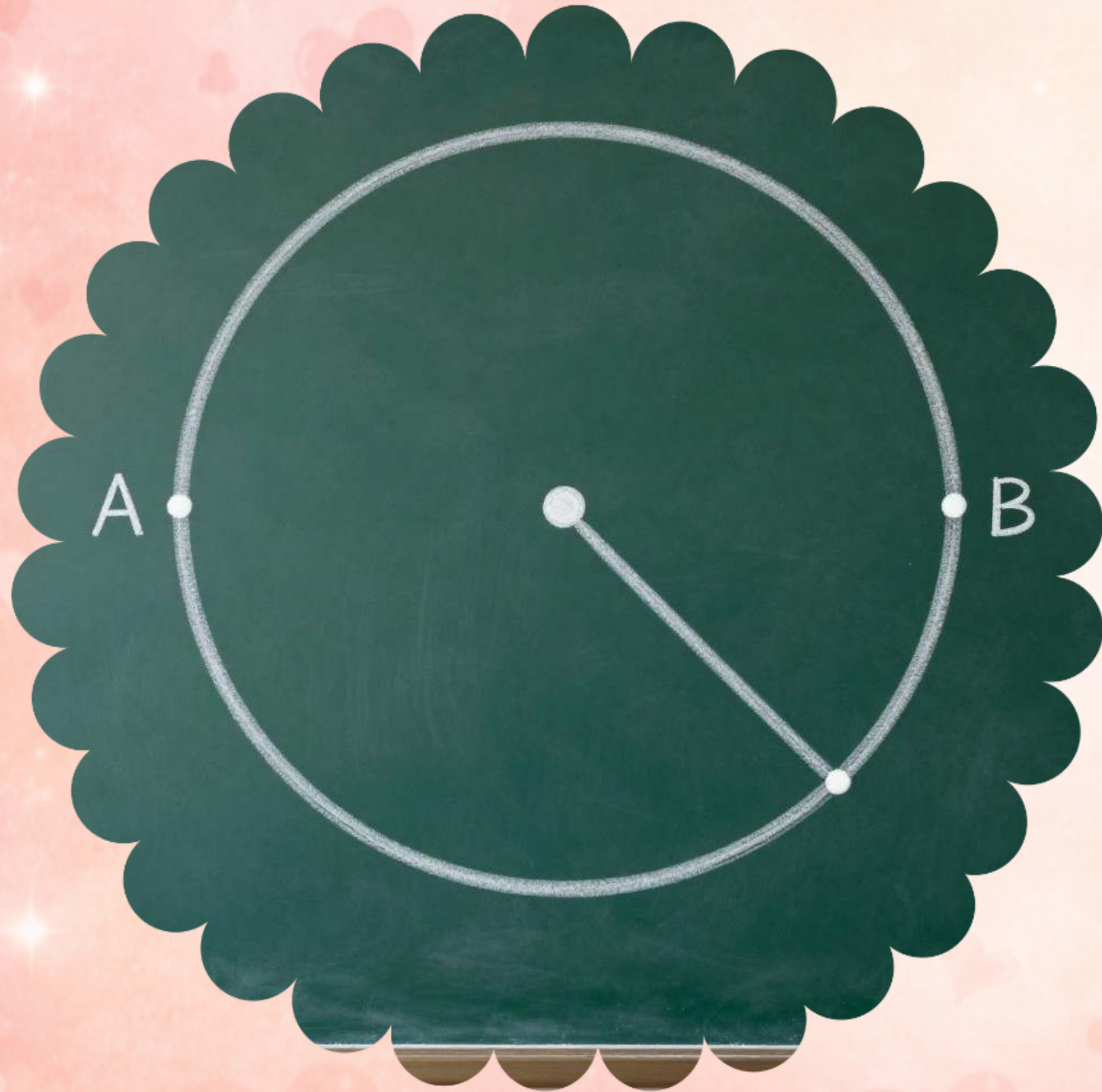
Шаг 1

Определяют
градусную меру дуги
или её долю
от окружности
и записывают
исходные данные.

Шаг 3

Полученное значение
принимают за меру
центрального угла,
который стягивает эту
дугу.

Обозначение дуг и элементов чертежа



Меньшая дуга

Если между точками А и В выделена более короткая часть окружности, её обычно обозначают дугой АВ. Такое обозначение удобно, когда на рисунке нужно быстро понять, о какой части окружности идёт речь.



Большая дуга

Когда требуется указать длинную дугу между теми же точками, используют три буквы. Это снимает путаницу и помогает отличить большую дугу от меньшей при решении задач и чтении чертежа.



Центр и радиусы

На аккуратном чертеже обязательно отмечают центр О и радиусы ОА и ОВ. Именно они показывают, что точки А и В лежат на окружности, а отрезки идут от центра к её границе.



Угол на рисунке

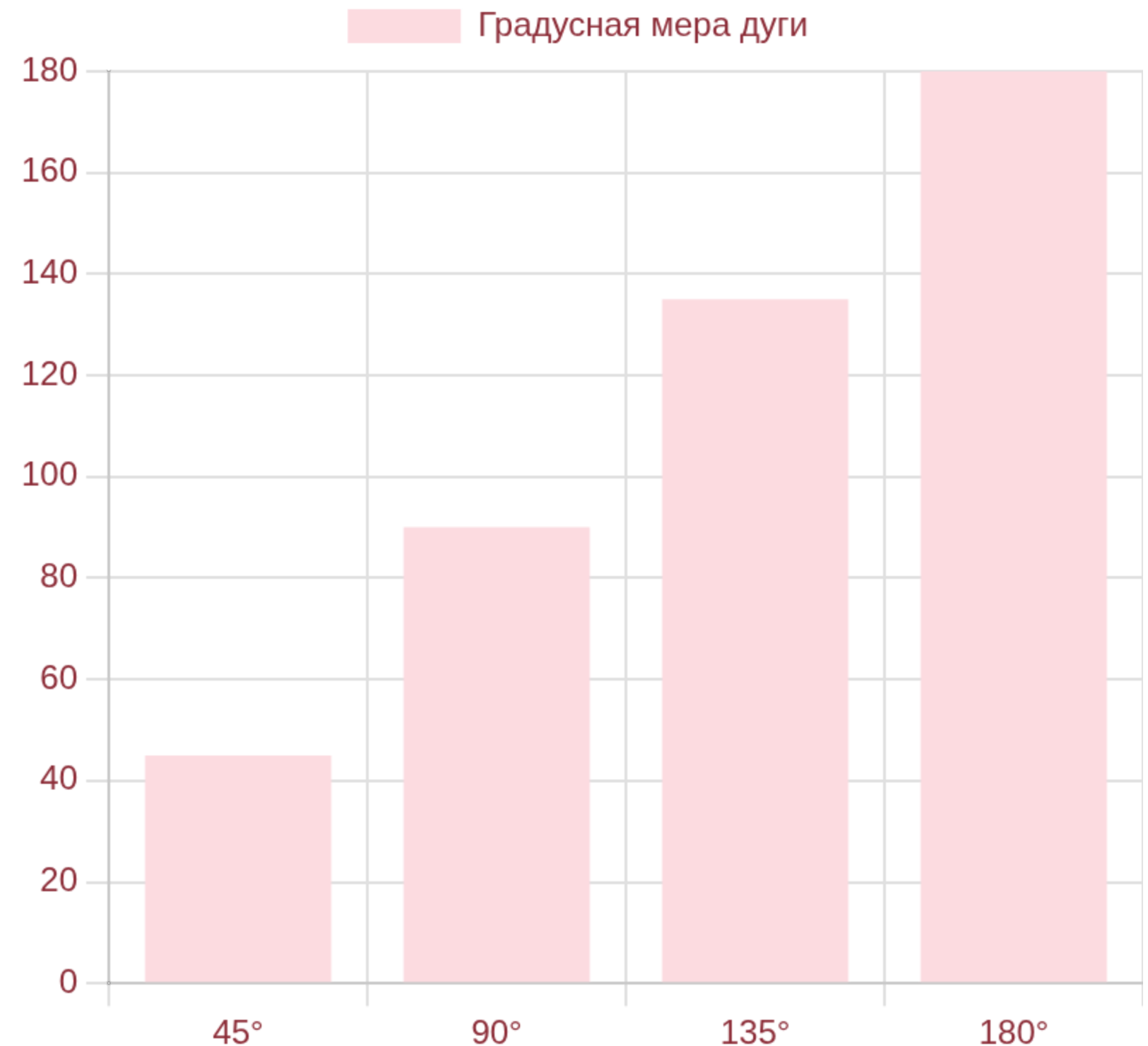
Угол АОВ расположен в центре окружности и стягивает дугу АВ. Если подписаны все элементы, легче сравнивать дугу, угол и сектор, а также верно записывать ответ в задаче.

Сравнение дуг при разных углах

На диаграмме видно, как одинаковый принцип работает для разных значений: чем больше центральный угол, тем больше соответствующая дуга.

Рост дуги идёт пропорционально углу, поэтому сравнение можно делать прямо по градусам без дополнительных построений.

Учебное соответствие центрального угла и дуги окружности





Путаница между углом и дугой, выбор хорды вместо дуги и ошибка с большей и меньшей дугой встречаются чаще всего и дают неверный ответ.

Анализ типичных ошибок при изучении темы

3

основные ошибки чаще всего мешают верно читать чертёж.

Опорные значения для быстрых расчётов

Часть круга	Градусы
$1/12$	30°
$1/4$	90°
$1/2$	180°
$3/4$	270°

Эти соответствия удобно держать в памяти: они помогают быстро переводить долю круга в градусы и обратно.

Чем проще дробь, тем быстрее можно оценить дугу без сложных вычислений.

Стандартные соотношения долей окружности

Центральные углы в реальной жизни



Циферблат как круговая модель

Часы наглядно показывают деление окружности на равные части. Каждая отметка на циферблате соответствует одному из 12 секторов, поэтому удобно видеть, как угол поворота связан с частью круга.



Круговая диаграмма в отчётах

Круговые диаграммы используют, когда нужно показать доли целого. Каждый сектор отражает часть общего результата, а его размер напрямую связан с центральным углом, поэтому сравнение получается быстрым и наглядным.



Колёса и механизмы

У колёс, шестерёнок и других круглых деталей важна точность деления на равные углы. Это помогает сохранять равномерное движение, правильно располагать метки и рассчитывать положение деталей относительно центра.

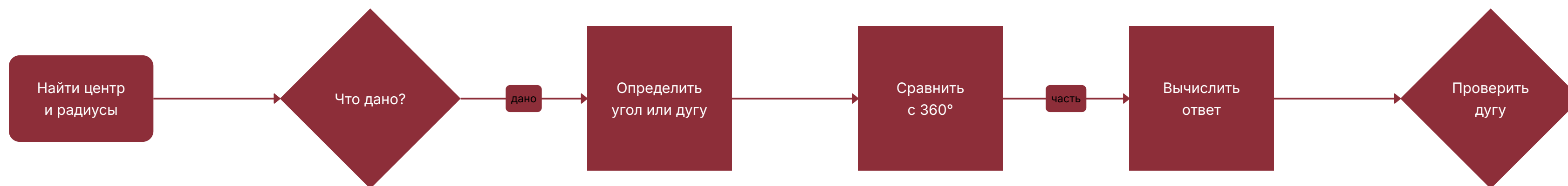
Длина дуги как часть длины окружности



- 1 Найти угол дуги**
Сначала определяют центральный угол, который соответствует дуге. Без этого невозможно понять, какую долю всей окружности занимает искомая часть и как перейти к вычислению длины. **Сравнить с 360°**
- 2**
Затем угол дуги соотносят с полным кругом, то есть с 360° . Это позволяет записать отношение вида угол к 360 и использовать его как основу для расчёта.
- 3 Составить пропорцию**
Длину дуги находят как такую же долю от длины окружности, какую составляет её угол от 360° . Так 90° дают четверть окружности, а 72° — одну пятую.
- 4 Проверить ответ**
После вычисления полезно оценить результат: дуга не может быть длиннее всей окружности и должна соответствовать меньшей или большей части круга на рисунке.

Как решать задачи с дугами и углами

Последовательность действий при работе с чертежом и данными задачи

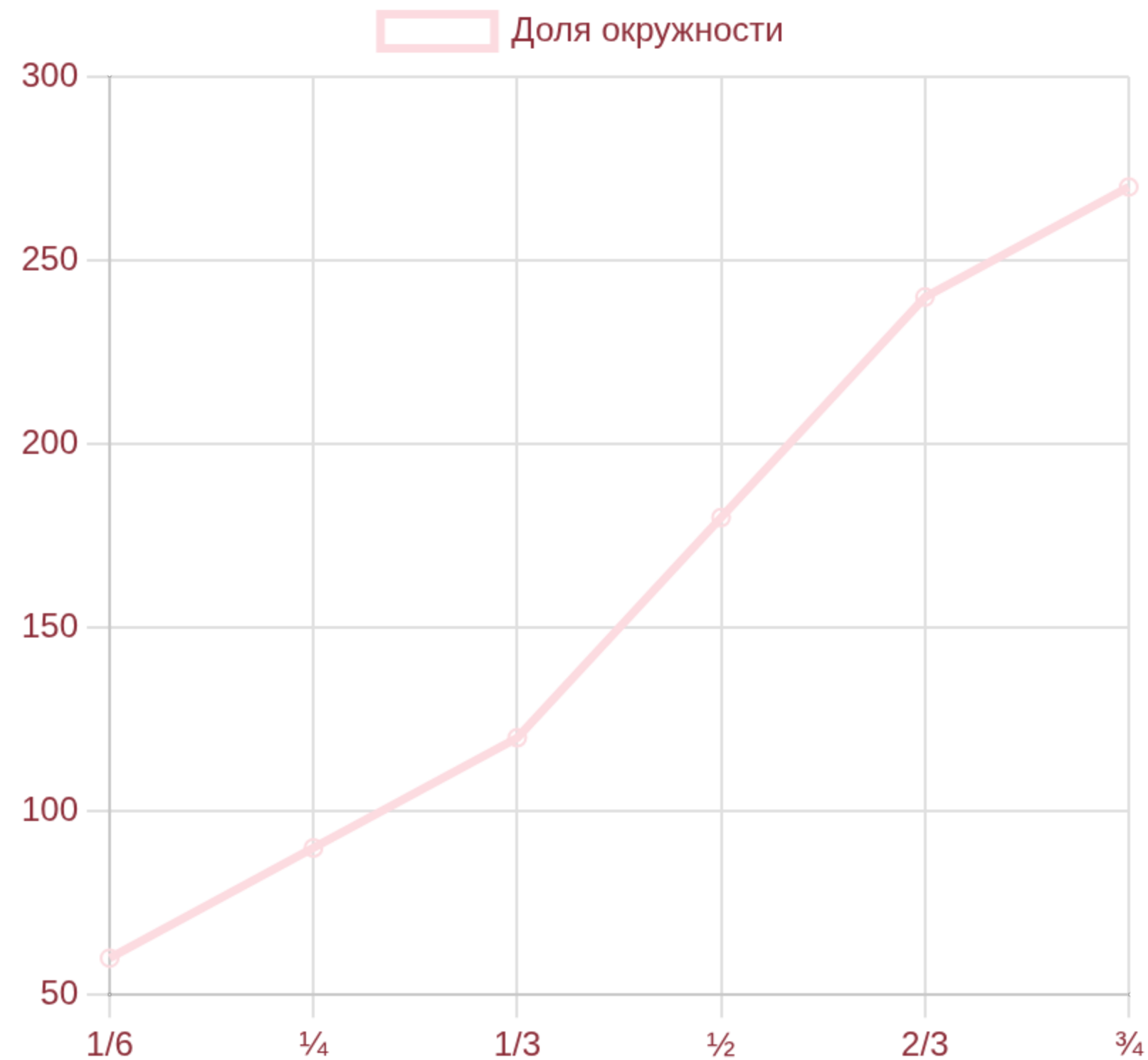


Градусы и доли окружности

Каждая точка на графике показывает точное соответствие между дробью круга и градусной мерой, что удобно для устных проверок.

Зависимость линейна: достаточно знать часть окружности, чтобы сразу определить градусную меру дуги.

Соотношение долей окружности и 360°



Что нужно запомнить по теме



Центр угла

Вершина центрального угла всегда находится в центре окружности. Именно поэтому такой угол удобно связывать с радиусами и частью круга, которую он выделяет.



Угол и дуга равны

Градусная мера дуги совпадает с градусной мерой центрального угла, который её стягивает. Это главное правило помогает быстро находить ответ в большинстве задач.



Полный круг

Вся окружность составляет 360° . От этой величины удобно отсчитывать половину, четверть и другие доли, чтобы уверенно работать с чертежами и вычислениями.



Итоги изучения центральных углов и дуг

Центральный угол и дуга окружности тесно связаны, а число 360° помогает быстро находить нужную часть круга. Эти знания делают чертежи понятными и упрощают решение геометрических задач.