

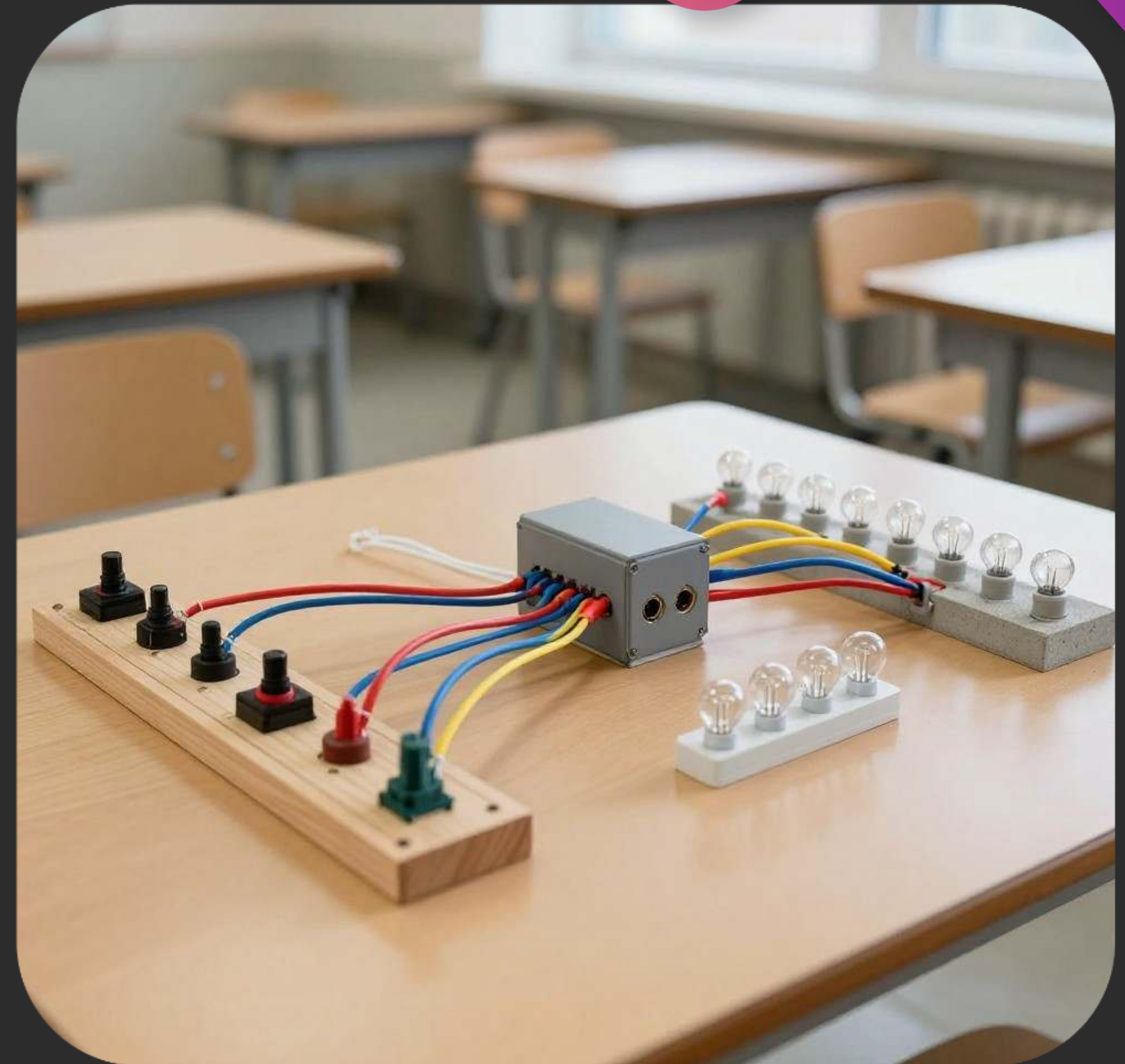
Другие логические операции

Алгебра логики использует правила, чтобы из двух значений получить новое 0 или 1.



Где встречаются дополнительные логические операции

В школьной информатике логические операции рассматривают вместе с двоичной системой и таблицами истинности. Дополнительные операции точнее описывают условия и встречаются в проверках программ, анализе выражений и схемах электронных устройств.



Исключающее ИЛИ

Исключающее ИЛИ обозначают как XOR или символом $\oplus$. Операция даёт 1, только если значения двух высказываний различны: 0 и 1 или 1 и 0.

Если оба входа одинаковые — 0 и 0 или 1 и 1, — результат равен 0. То есть операция «срабатывает» именно на отличие, а не просто на наличие единицы.

По смыслу XOR хорошо передаётся фразой: «либо одно, либо другое, но не оба сразу». Это помогает читать логические условия в задачах и программах.

Таблица истинности XOR

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Таблица истинности операции XOR

Столбцы: A, B, $A \oplus B$. Строки соответствуют входным наборам 0/1: 0 0 $\rightarrow$ 0; 0 1 $\rightarrow$ 1; 1 0 $\rightarrow$ 1; 1 1 $\rightarrow$ 0. Единица получается только при разных входных значениях.

XOR даёт 1 ровно в двух случаях из четырёх: когда входы различаются.

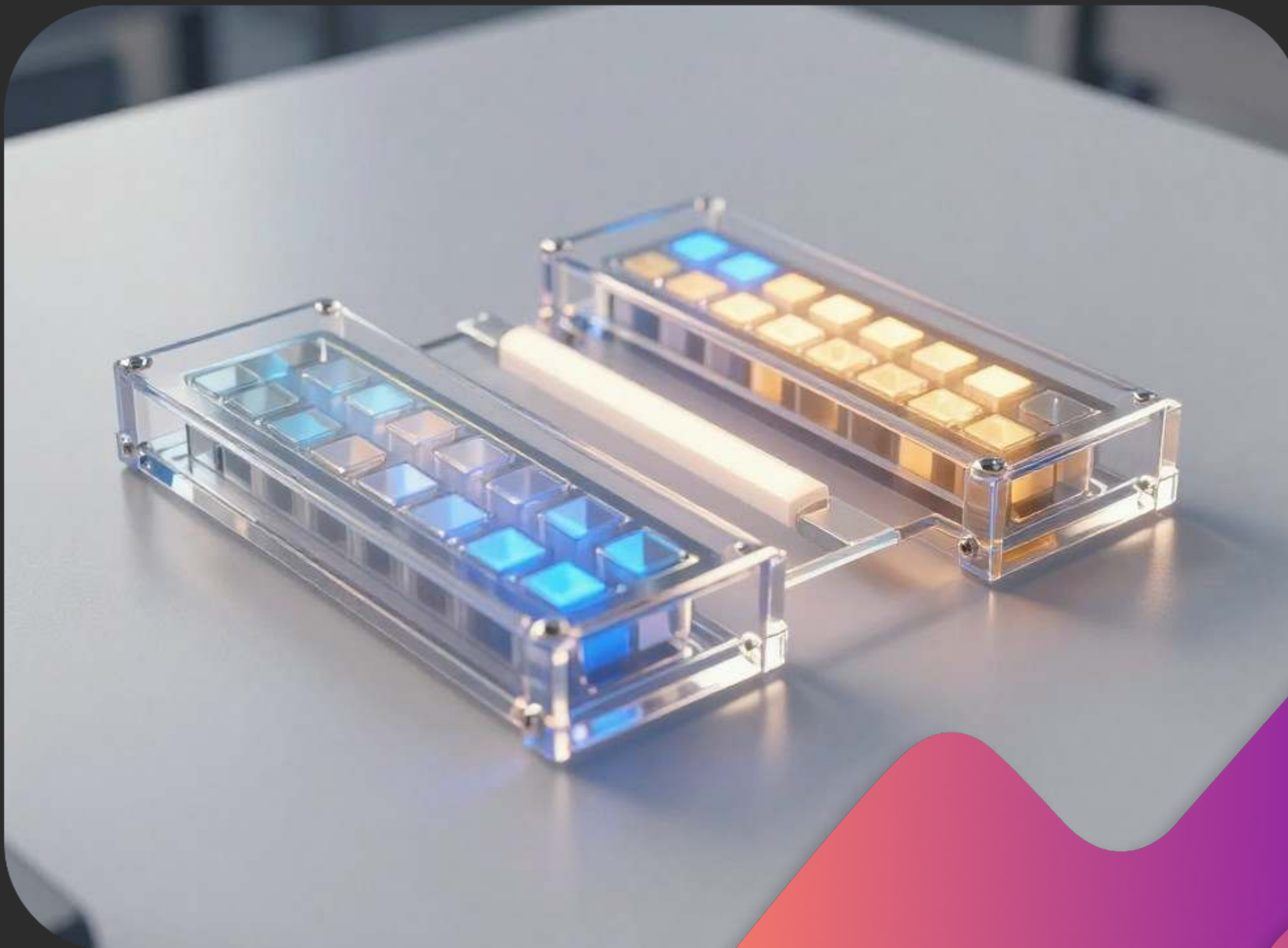
Где используется XOR

Сравнение битов и «не совпадает»

XOR применяют при сравнении двоичных чисел: он показывает, в каких разрядах биты отличаются. Поэтому удобно использовать его для работы с разностью значений поразрядно.

Проверка чётности и выбор варианта

В информатике XOR связывают с проверкой чётности: при нечётном числе единиц результат может стать 1. В цифровой технике XOR встречается в сумматорах и в простых схемах, где нужно выбрать один из двух вариантов.



Импликация $A \rightarrow B$ ложна только тогда, когда $A = 1$, а $B = 0$; в остальных трёх случаях она истинна.

1

Единственный случай ошибки происходит, когда обещание A выполняется, но B не выполняется.

Таблица истинности импликации $A \rightarrow B$

Таблица истинности импликации

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Столбцы: A, B, $A \rightarrow B$. Результаты для наборов входов: $0\ 0 \rightarrow 1$; $0\ 1 \rightarrow 1$; $1\ 0 \rightarrow 0$; $1\ 1 \rightarrow 1$.
Главный вывод: нарушается только ситуация «если A, то B», когда B не выполняется.

Импликация ложна ровно в одном случае из четырёх — когда A истинно, а B ложно.

Примеры импликации в учебных задачах

- Импликация подходит для формулировок «если выполнено условие, то выполняется результат». Например: если введён правильный пароль, доступ разрешён.
- Похожий смысл есть и в записи правил: если число делится на 2, оно чётное. В математике импликацию используют в утверждениях и теоремах, а в программировании — в проверках условий.



Эквивалентность

Эквивалентность обозначают как $A \leftrightarrow B$ и читают как «А тогда и только тогда, когда В». Она показывает не просто связь, а совпадение смысла двух высказываний.

Операция истинна, когда оба значения одинаковые: либо оба 0, либо оба 1. То есть одинаковая «правда/неправда» для А и В ведёт к результату 1.

Если значения различаются, результат равен 0. В задачах эквивалентность помогает проверять, действительно ли два условия выполняются одновременно по одному и тому же смыслу.

Таблица истинности эквивалентности

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Таблица истинности эквивалентности

Столбцы: A, B, $A \leftrightarrow B$. Строки соответствуют входным наборам: $0\ 0 \rightarrow 1$; $0\ 1 \rightarrow 0$; $1\ 0 \rightarrow 0$; $1\ 1 \rightarrow 1$. Ключевой вывод: эквивалентность истинна только при совпадении значений.

$A \leftrightarrow B$ даёт 1 в двух случаях из четырёх — когда входы совпадают (оба 0 или оба 1).

Штрих Шеффера

Штрих Шеффера обозначается $A \mid B$ и означает отрицание операции И: $\neg(A \text{ и } B)$. То есть ответ равен 0 только в одном случае — когда $A=1$ и $B=1$ одновременно.

Если хотя бы одно из значений равно 0 (или $A=0$, или $B=0$), тогда $\neg(A \text{ и } B)$ становится истинным, и результат $A \mid B$ равен 1. Так операция «запрещает» совместную единицу.

Штрих Шеффера ещё называют NAND. Он важен в логике и цифровых схемах, потому что через NAND можно построить другие элементы: например, получить И, ИЛИ и НЕ из комбинаций этой операции.

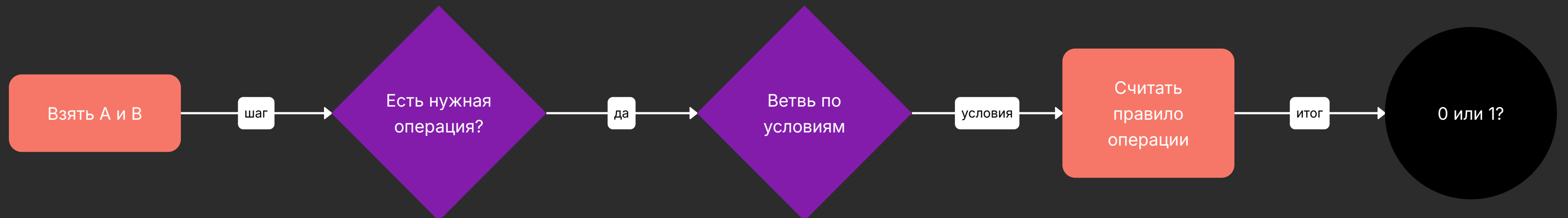
Стрелка Пирса

- Стрелка Пирса обозначается $A \downarrow B$ и означает отрицание операции ИЛИ: $\neg(A \vee B)$. Поэтому результат равен 1 только тогда, когда оба входа равны 0, то есть когда $A=0$ и $B=0$.
- Во всех остальных ситуациях — при $A=1$, или при $B=1$, или при $A=1$ и $B=1$ — выражение $A \vee B$ становится истинным, а значит его отрицание даёт 0. Стрелка Пирса известна как NOR и широко применяется в схемах.



Как определить значение логической операции

Алгоритм для вычисления результата в таблицах истинности по значениям А и В и выбранной операции.



Сравнение числа единичных результатов у операций



Чем больше «единичных» клеток в таблице истинности, тем чаще операция возвращает 1. Это помогает быстрее выбирать логику для нужного условия в задачах.

По диаграмме видно: XOR и эквивалентность дают 1 ровно в половине случаев, NOR даёт 1 только при (0,0), а импликация и NAND — в трёх из четырёх наборов.

Данные рассчитаны по таблицам истинности для бинарных операций (A, B) → результат, из 4 возможных пар.

Как читать составные логические выражения

Составные выражения собираются из нескольких операций, например $(A \sqcap B) \rightarrow C$ или $A \leftrightarrow (B \downarrow C)$. Сначала нужно смотреть на то, что написано в скобках, потому что именно там задаётся порядок вычислений.

При приоритете скобок удобно рассуждать по цепочке: выделить самую внутреннюю часть, определить её значение, заменить скобки на получившуюся 0 или 1 и продолжить дальше.

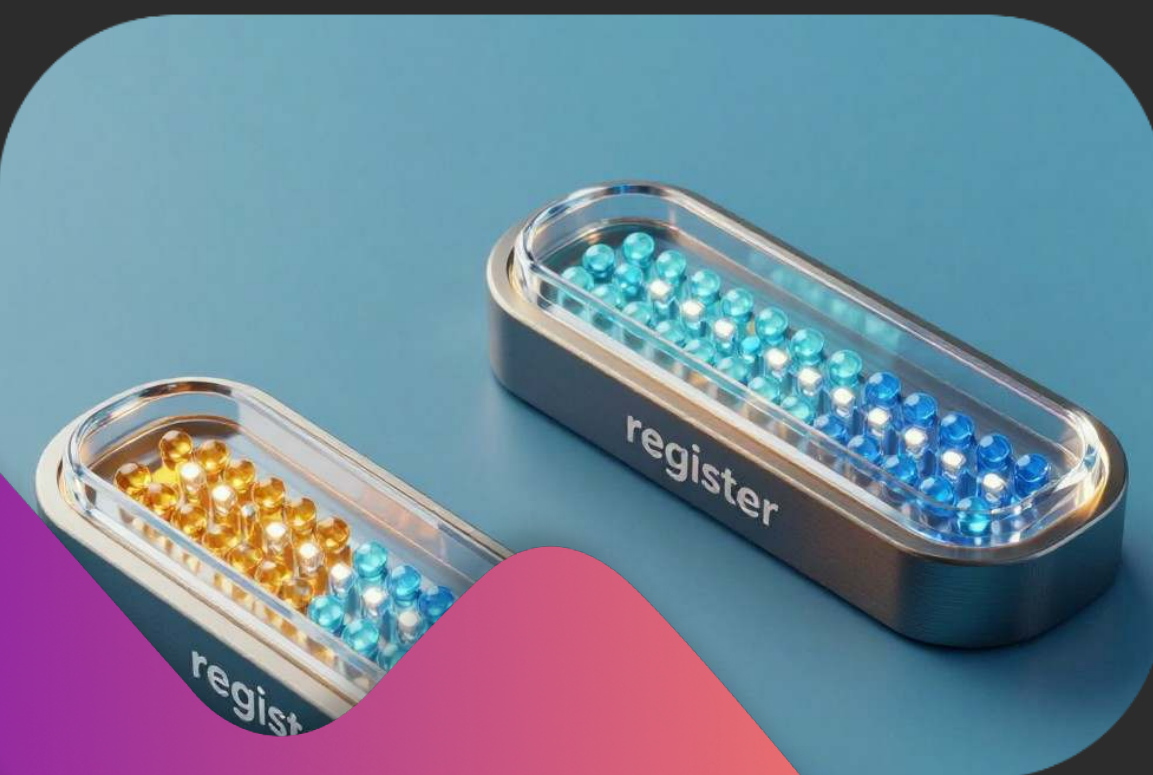
После вычисления значений в скобках получаются новые 0 или 1, и только затем выполняются операции «снаружи». Если перепутать шаги, можно получить другой итоговый результат, даже при том же наборе A и B .

В задачах 9 класса это особенно важно при построении таблиц истинности: сначала заполняют колонки для внутренних операций, а потом уже переходят к тем, что зависят от них напрямую.

Логические операции в компьютере

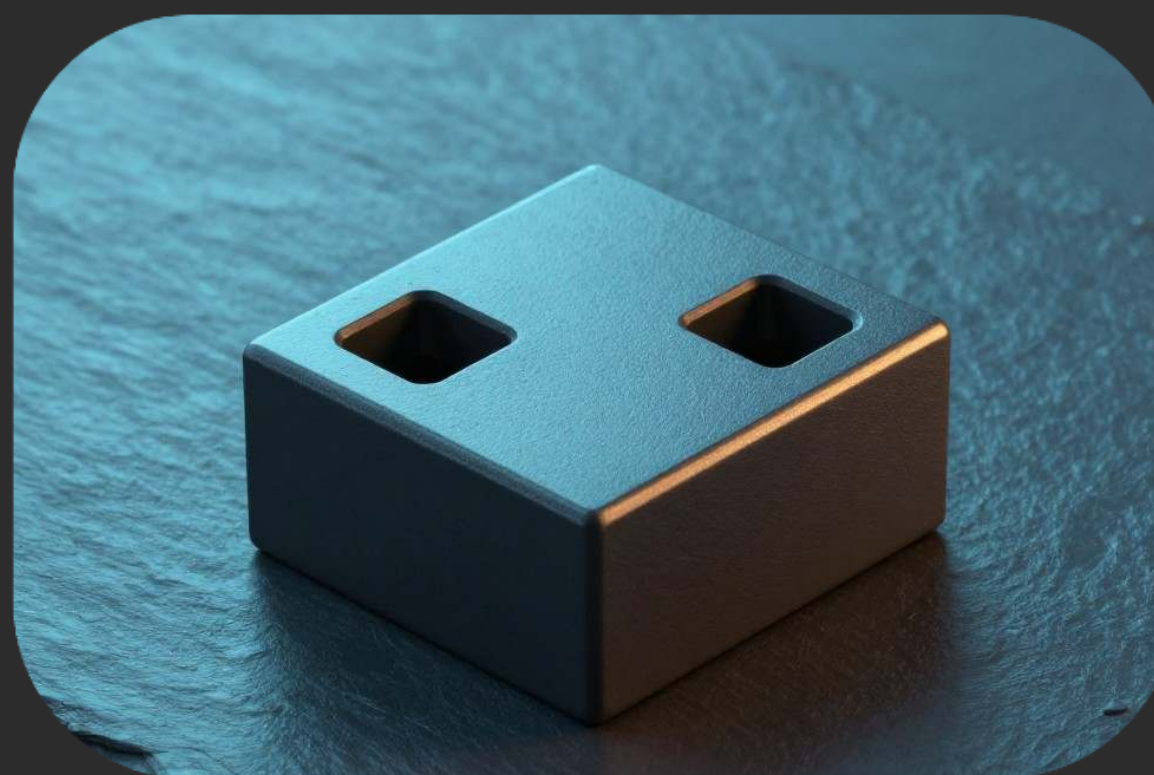
XOR как способ «различать» биты

Представьте, что в двух регистрах сравнивают значения разрядов. XOR помогает понять, где биты отличаются: в таких местах результат становится 1, а где совпадают — 0. Поэтому эту операцию часто используют в сумматорах и проверках при сравнении битов.



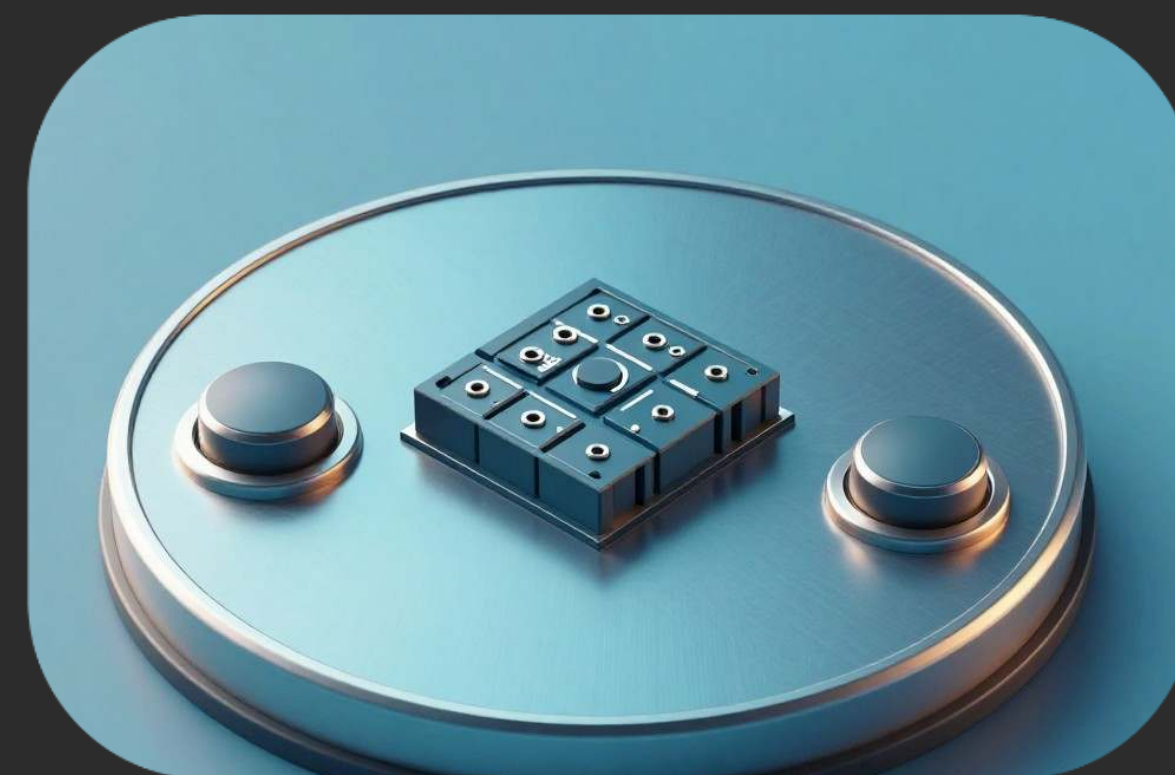
NAND: универсальный кирпичик цифровых схем

Штрих Шеффера (NAND) работает так, что даёт 0 только при совместной единице на входах. На практике это удобно, потому что из NAND можно собрать другие логические элементы. В схемотехнике NAND часто применяют, когда важны компактность и стабильность построения.



NOR: «тишина» при истинности хотя бы одного входа

Стрелка Пирса (NOR) возвращает 1 лишь когда оба входа равны 0. Такая логика хорошо подходит для построения простых систем управления и базовых элементов памяти. Поэтому NOR встречается в цифровых схемах и в учебных моделях построения логики.



Краткое сравнение основных операций

Операция	Когда истинна и основной смысл
XOR	Когда значения разные: 1 при (0,1) и (1,0)
Импликация $A \rightarrow B$	Ложна только при $A=1, B=0$ (нарушено обещание)
Эквивалентность $A \leftrightarrow B$	Когда значения совпадают: 1 при (0,0) и (1,1)
Штрих Шеффера $A B$	1, кроме случая когда оба 1 (это NAND)
Стрелка Пирса $A \downarrow B$	1 только при двух нулях (это NOR)

Операции отличаются не только обозначением, но и тем, в каких наборах A и B они возвращают 1. Ниже — краткая подсказка для быстрых ответов в таблицах истинности.

Самый надёжный способ не перепутать операции — помнить «особые» пары входов: у импликации единственная ошибка ($1 \rightarrow 0$), у NOR единственная победа (0,0), а у XOR и эквивалентности — разные наборы для единицы.

Типичные ошибки при работе с логическими операциями

Частая ошибка — путать XOR с обычным ИЛИ. У XOR результат 0 появляется при (1,1) и это принципиально, а у ИЛИ там результат равен 1. Важно проверять именно пару входов.

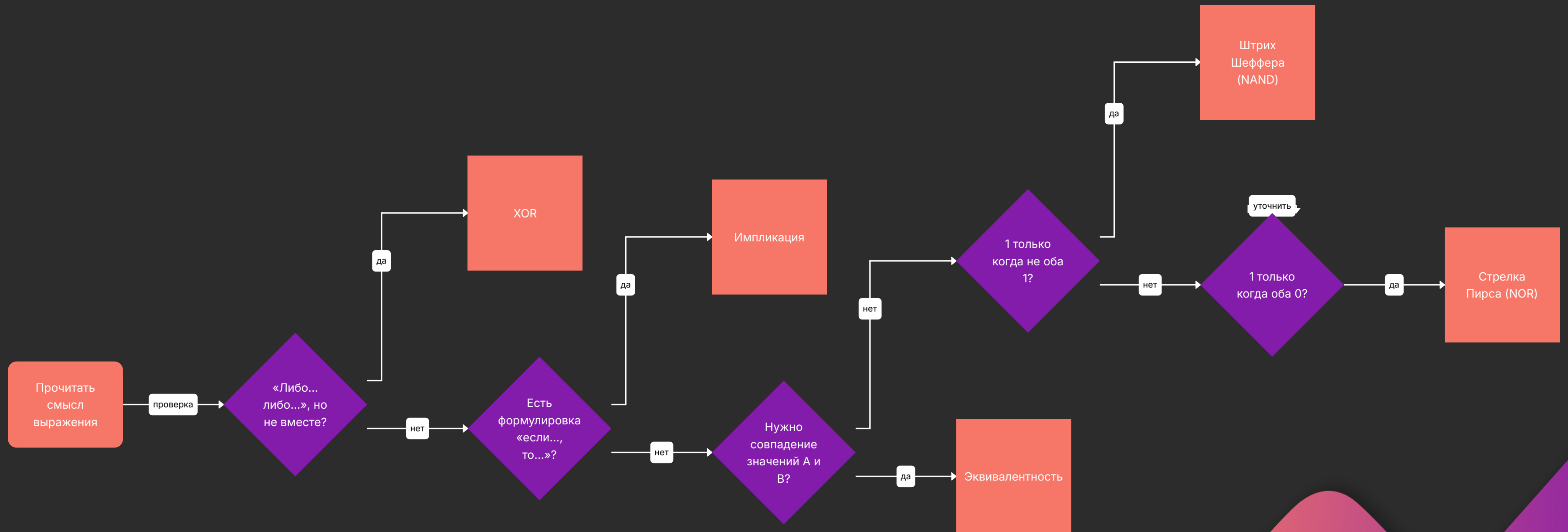
Ещё одна ошибка — думать, что импликация $A \rightarrow B$ ложна всякий раз, когда A ложно. На самом деле при $A=0$ импликация всегда истинна, а единственный случай лжи — когда $A=1$ и $B=0$.

Эквивалентность тоже часто путают с операцией И. Эквивалентность проверяет совпадение значений: она даёт 1 и при (0,0), и при (1,1). Операция И даёт 1 только при одних единицах.

Чтобы снизить ошибки, не полагайтесь на «ощущение» фразы. Всегда сопоставляйте выражение с правилом истинности: какие пары входов дают 0, а какие — 1, и только затем делайте вывод.

Как выбрать нужную операцию по смыслу

Выбор операции по тому, как звучит условие в задаче, и как должен вести себя результат.



Логика стала точнее: итоги темы

Дополнительные логические операции расширяют возможности алгебры логики и позволяют точнее записывать условия. XOR, импликация, эквивалентность, штрих Шеффера и стрелка Пирса помогают решать задания 9 класса и понимать цифровые схемы.