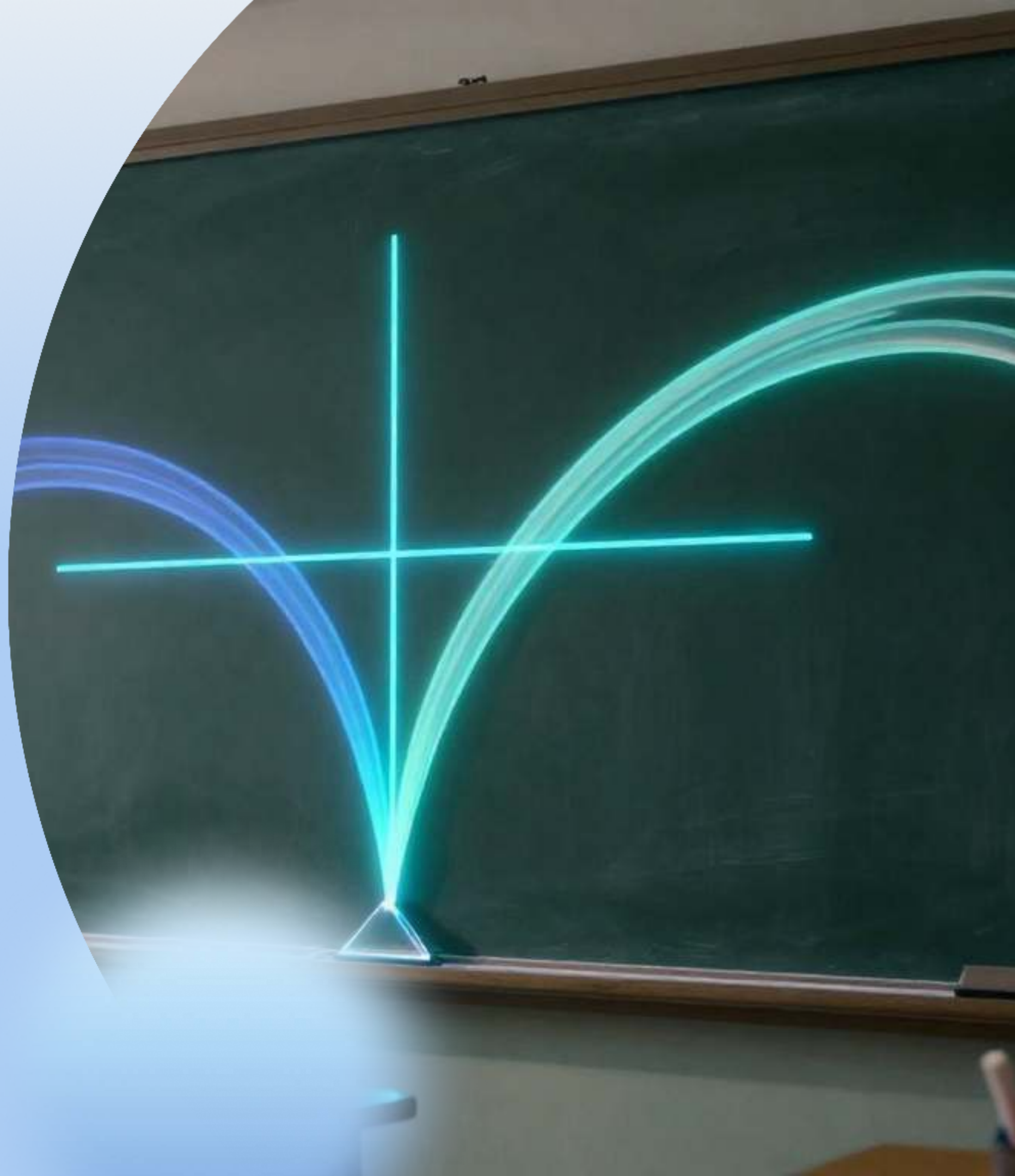


Комплексные числа: основные определения, сложение и умножение

Расширяем алгебру: от действительных чисел
к комплексным.



Зачем нужны комплексные числа



Некоторые уравнения не решаются в области действительных чисел, и тогда требуется более широкая числовая система. Комплексные числа не только устраняют это ограничение, но и становятся удобным инструментом для алгебры, физики и инженерных задач.



Определение комплексного числа

Общий вид

1

Комплексное число записывают как $z=a+bi$, где a и b — действительные числа. Такая форма сразу показывает две независимые части одного объекта.

Множество $\mathbb{C}$

2

Все комплексные числа образуют множество $\mathbb{C}$. Оно включает действительные числа как частный случай и дополняет привычную числовую прямую новой структурой.

Действительные числа

3

Если мнимая часть равна нулю, то число считается действительным. В этом случае запись $z=a+0i$ фактически совпадает с обычным числом a .

Чисто мнимые числа

4

Если действительная часть равна нулю, получается чисто мнимое число вида bi . Такие числа помогают работать с выражениями, которые не имеют решений среди действительных.

Различие чисел

5

Два числа $a+bi$ и $c+di$ считаются разными, если не совпадает хотя бы одна из частей. Для равенства требуется одновременное совпадение и действительной, и мнимой части.



Мнимая единица i и ее степени

Определение i

Мнимую единицу вводят условием $i^2 = -1$. Это соглашение позволяет записывать и преобразовывать корни из отрицательных чисел в новой числовой системе.

Первая и вторая степени

Последовательность начинается с $i^1 = i$, затем $i^2 = -1$. Уже на этом шаге видно, что степени i образуют не привычную, а особую циклическую закономерность.

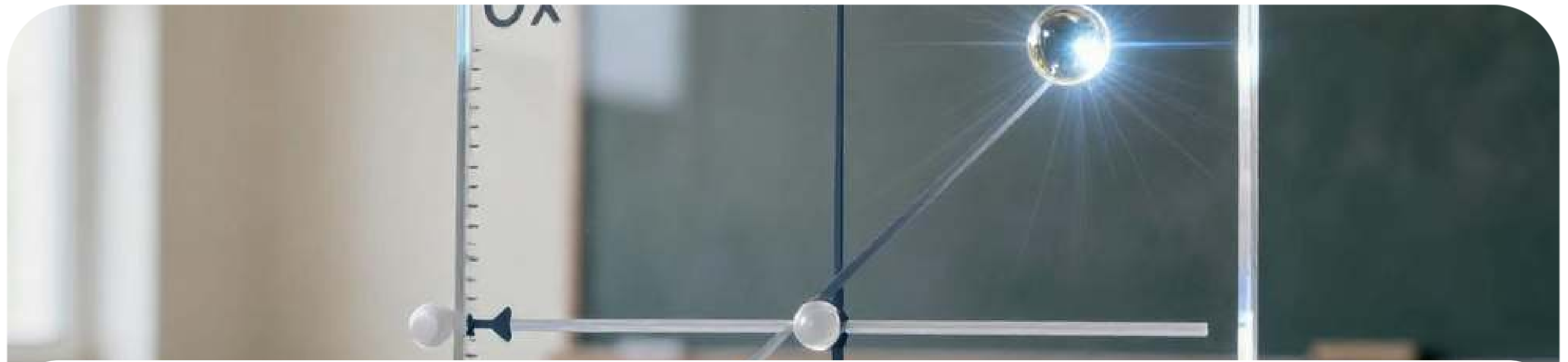
Третья и четвертая степени

Дальше получаем $i^3 = -i$ и $i^4 = 1$. После четвертой степени значения повторяются, поэтому дальнейшие вычисления удобно сводить к этому циклу.

Любая степень

Чтобы найти i^n , достаточно определить остаток от деления n на 4. Это правило заметно упрощает вычисления в выражениях с большими степенями мнимой единицы.

Действительная и мнимая части комплексного числа :::



+ Действительная часть Для $z=a+bi$ действительная часть обозначается $\text{Re}(z)=a$. Она показывает, какое обычное число скрыто в записи, и соответствует горизонтальной координате точки на плоскости.	+ Мнимая часть Мнимая часть обозначается $\text{Im}(z)=b$. Именно коэффициент при i определяет, насколько число смещено по вертикали относительно начала координат.	+ Координатная запись Комплексное число удобно представлять точкой $z(a, b)$. Такая запись связывает алгебраическую форму с координатами и помогает сразу видеть положение числа на плоскости.	+ Наглядность модели Когда части числа изображены на осях Ox и Oy, становится проще сравнивать числа и выполнять преобразования. Геометрическая модель делает абстрактную запись более понятной.
---	--	--	---

Комплексная плоскость как геометрическая модель

Ось действительных чисел

Горизонтальная ось соответствует действительной части. По ней откладывается значение a , поэтому комплексное число можно рассматривать как точку с одной из координат из привычной числовой системы.

Ось мнимых чисел

Вертикальная ось отражает мнимую часть. Значение b показывает, насколько точка поднята или опущена относительно начала координат, и задаёт вторую координату числа.

Точка на плоскости

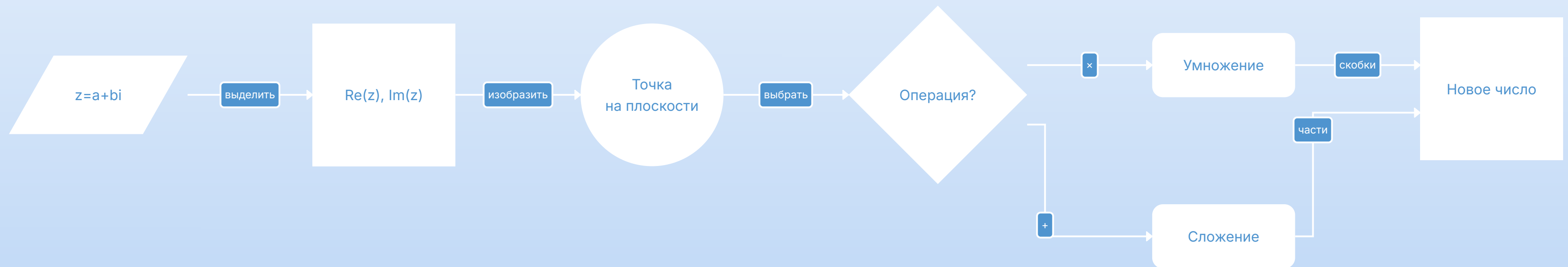
Каждому числу $z=a+bi$ соответствует точка (a, b) . Благодаря этому комплексные числа можно не только вычислять, но и изображать, сравнивая их положение визуально.

Геометрические характеристики

На плоскости удобно находить расстояние до начала координат и анализировать взаимное расположение чисел. Это делает комплексные числа полезными не только в алгебре, но и в геометрии.

От записи числа к выполнению операций

Пошаговая схема работы с комплексными числами в алгебраических вычислениях.



Равенство комплексных чисел

1

Главное условие

Два комплексных числа равны только тогда, когда совпадают обе их части одновременно: действительная и мнимая. Достаточно расхождения хотя бы в одном коэффициенте, чтобы числа считались различными.

2

Запись равенства

Если $a+bi=c+di$, то обязательно $a=c$ и $b=d$. Это правило позволяет быстро проверять преобразования без перехода к приближённым вычислениям и без лишних преобразований.

3

Практическая польза

Сравнение по частям особенно удобно при решении уравнений и проверке ответов. Оно помогает точно фиксировать результат и избегать ошибок, связанных с одинаковой внешней формой выражений.

Основные обозначения и свойства комплексных чисел



Обозначение	Смысл	Пример
$z=a+bi$	общий вид	$3+2i$
$\operatorname{Re}(z)=a$	действит. часть	$\operatorname{Re}(3+2i)=3$
$\operatorname{Im}(z)=b$	мним. часть	$\operatorname{Im}(3+2i)=2$
$\bar{z}=a-bi$	сопряжённое	$3-2i$

- + Таблица показывает базовые обозначения, их смысл и краткий пример записи.
- + Все записи сводятся к двум координатам, а сопряжение меняет знак мнимой части, сохраняя действительную.
- Определения комплексных чисел из школьного курса алгебры

Структура комплексного числа

Действительная часть Мнимая часть
Модуль Сопряжение

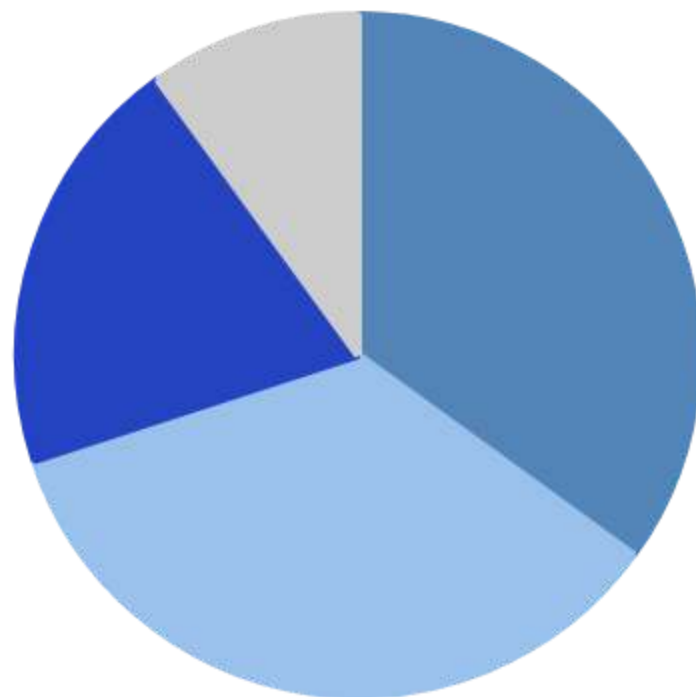


Диаграмма отражает не численные измерения, а логическое соотношение ключевых характеристик записи.

Комплексное число удобно понимать как систему взаимосвязанных свойств, а не как одно число в привычном смысле.

Схематическое представление основных характеристик комплексного числа

Правило сложения комплексных чисел

1

Записываем сумму

Сложение комплексных чисел выполняют по формуле $((a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i)$. Сначала выписывают оба числа в стандартной форме, чтобы отдельно видеть действительные и мнимые коэффициенты.

2

Складываем одноимённые части

Действительные части объединяют с действительными, а мнимые — с мнимыми. Коэффициент при i тоже складывается как обычное число, поэтому операция полностью сводится к поэлементному счёту.

3

Сохраняем свойства суммы

Для комплексных чисел сохраняются переместительный и сочетательный законы. Это позволяет менять порядок слагаемых и группировать их так же, как при работе с многочленами или координатами.

4

Проверяем результат

После вычисления ответ записывают снова в виде $(x+yi)$. Если части сложены верно, полученное число сразу можно интерпретировать как точку на комплексной плоскости с новыми координатами.

Итоговая действительная часть суммы $(z_1 + z_2)$ равна 8; мнимая часть при этом становится (-2) , поэтому результат остаётся комплексным числом.

8

получается действительная часть суммы двух чисел в примере.

Расчёт по данным примера из условия.

Алгебраический смысл сложения

:::

+

Сумма как вектор

На комплексной плоскости сложение совпадает с прибавлением векторов: к координатам одной точки добавляются координаты другой. Поэтому результат можно увидеть как новое положение точки после переноса.

+

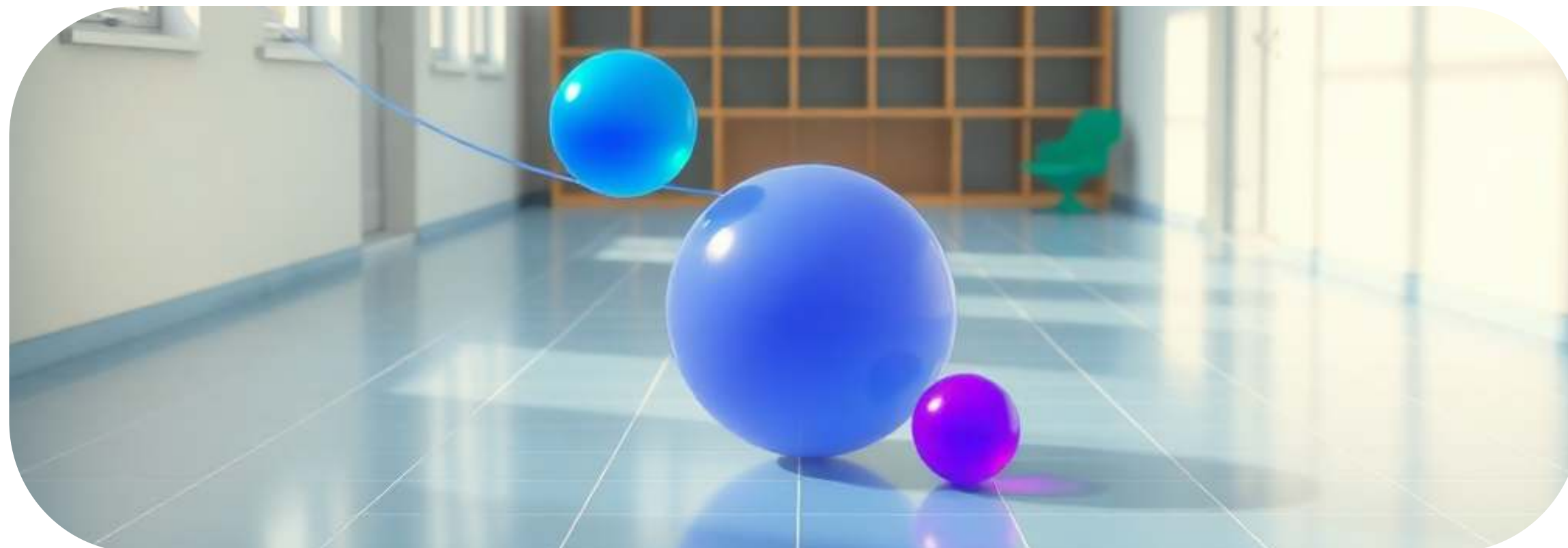
Независимость координат

Действительная и мнимая части изменяются отдельно, не влияя друг на друга. Такая независимость делает операцию линейной и удобной для вычислений в задачах с двумя направлениями изменения.

+

Связь с движением

Если комплексное число описывает перемещение, то сложение соответствует последовательному суммированию шагов. Это особенно полезно в координатных задачах, где нужно объединить два сдвига по осям.



+

Геометрическая наглядность

Алгебраическая запись и геометрическое изображение дают один и тот же результат. Поэтому сложение комплексных чисел легко проверять на плоскости, сопоставляя координаты исходных точек и итоговой точки.

Правило умножения комплексных чисел

1

Раскрываем скобки

Умножение начинают с обычного распределительного закона: $((a+bi)(c+di)=ac+adi+bsci+bdi^2)$. Важно не пропустить ни один из четырёх членов и аккуратно сохранить знаки при раскрытии.

2

Используем свойство i

Далее заменяют (i^2) на (-1) . Именно этот шаг превращает последний член в действительную величину и позволяет получить стандартную форму комплексного числа без лишних степеней.

3

Собираем части

После подстановки объединяют действительные слагаемые $(ac-bd)$ и мнимые $(ad+bc)$. В результате получается формула $((ac-bd)+(ad+bc)i)$, удобная для практических вычислений.

4

Избегаем типичных ошибок

Чаще всего ошибки возникают из-за неверного распределения знаков или потери члена (bdi^2) . Проверка по отдельности действительной и мнимой частей помогает быстро обнаружить неточность.

После раскрытия скобок и замены (i^2) на (-1) произведение $((2+i)(1+3i))$ даёт действительную часть (-1) , а мнимая часть равна 7.

-1

получается действительная часть произведения в данном примере.

Расчёт по данным примера из условия.

Как умножение изменяет комплексное число



Диаграмма показывает, что умножение меняет не только величину, но и знак действительной части. Мнимая составляющая при этом может заметно увеличиваться.

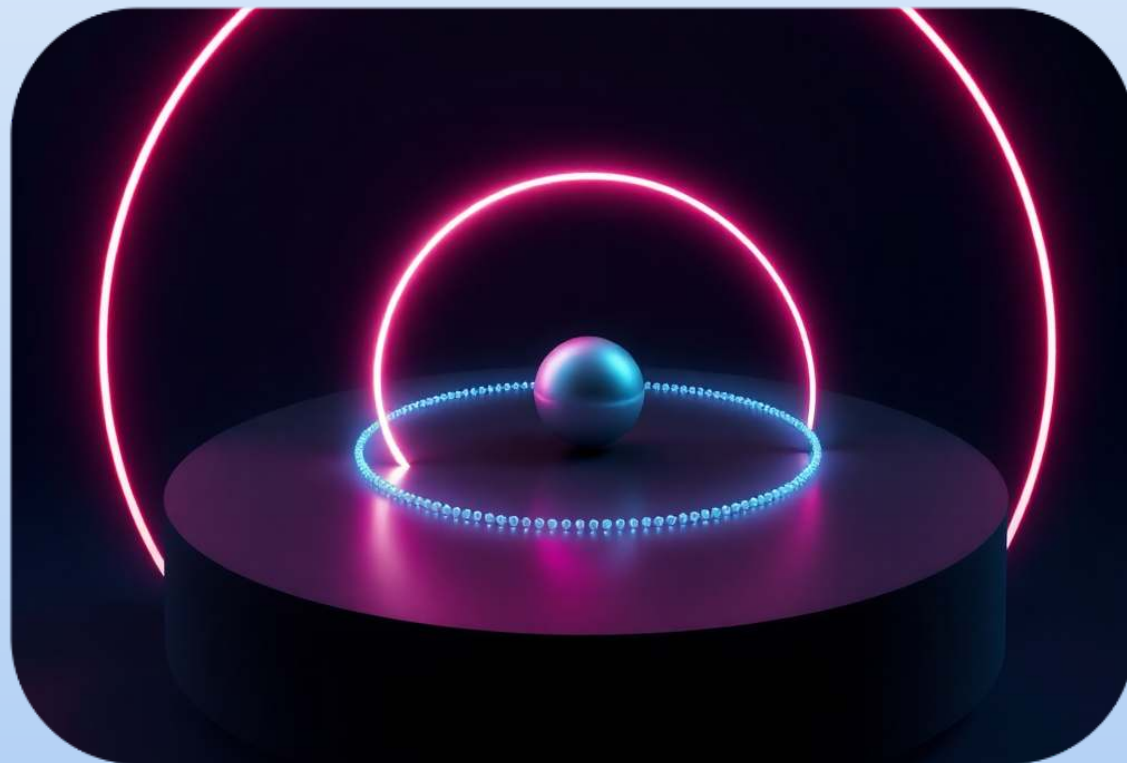
После умножения обе части преобразуются одновременно: действительная часть может сменить знак, а мнимая — существенно вырасти. Это делает операцию более сильной, чем простое сложение.

Расчёт по примеру $((2+i)(1+3i)=-1+7i)$, 11 класс.

Как увидеть умножение на плоскости :::

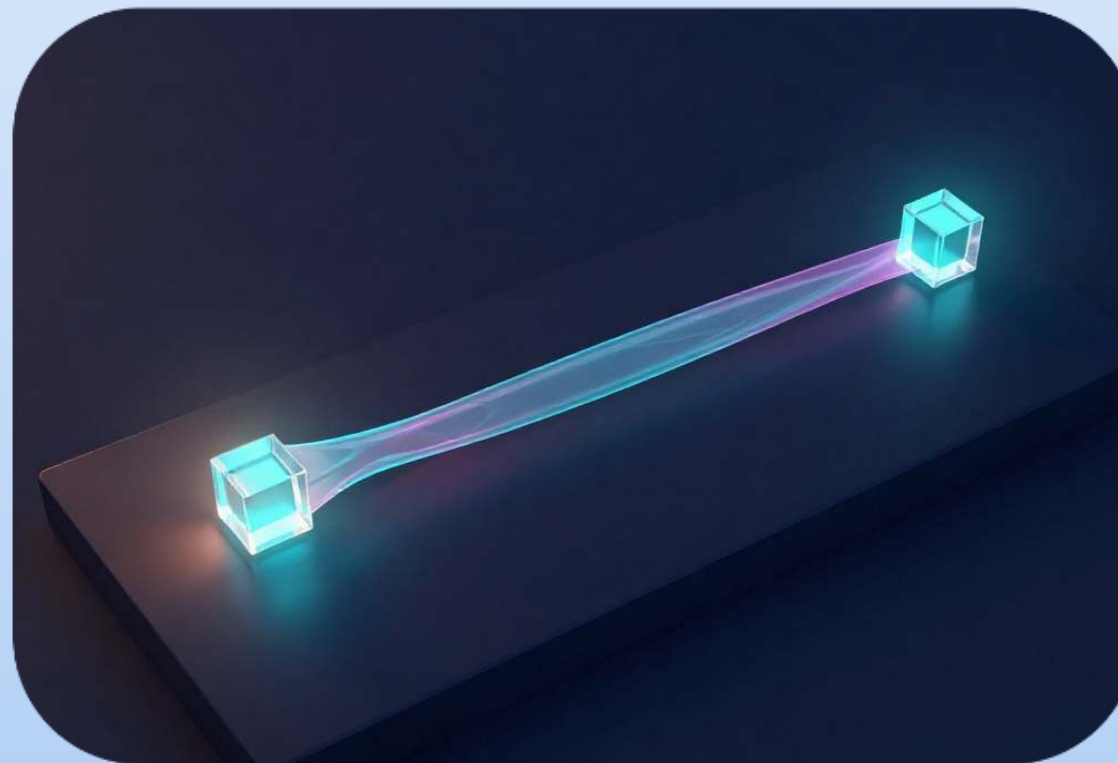
Поворот без линейки и транспортира

Если умножить комплексное число на фиксированный множитель, его радиус-вектор поворачивается на определённый угол. На рисунке это удобно показать как переход одной точки в другую по окружности вокруг начала координат.



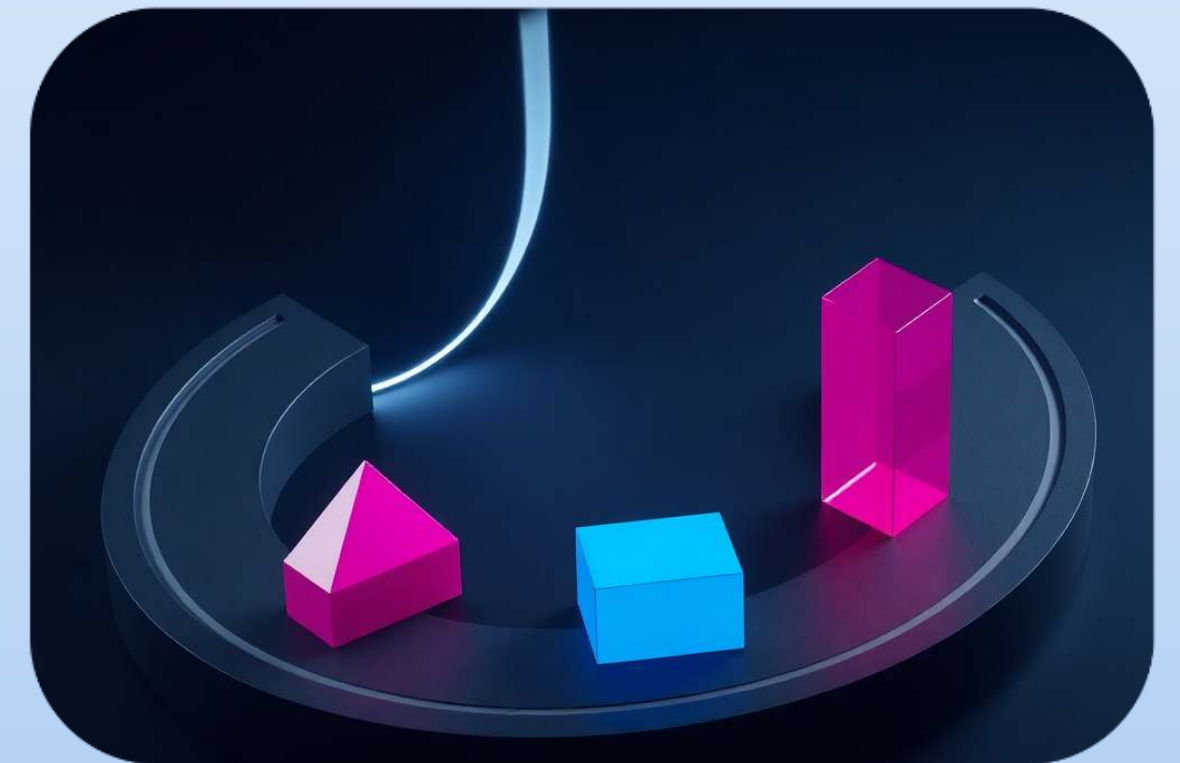
Удлинение и сжатие

Модуль произведения равен произведению модулей множителей, поэтому длина радиус-вектора либо возрастает, либо уменьшается. Так умножение одновременно меняет и направление, и масштаб изображения на плоскости.



Один закон — две интерпретации

Алгебраическая формула даёт точный результат в вычислениях, а геометрическая модель объясняет, почему он выглядит именно так. Благодаря этому умножение комплексных чисел становится наглядным и логически понятным.



Сложение и умножение: сравнение правил

- Правила действий с комплексными числами, школьный курс алгебры.

Операция	Формула	Действие	Результат
Сложение	$(a+bi)+(c+di)$	По частям	$(a+c)+(b+d)i$
Умножение	$(a+bi)(c+di)$	Скобки и i^2	$(ac-bd)+(ad+bc)i$

Сравнение показывает, что обе операции выполняются по строгим формулам, но их смысл и результат различаются.

Сложение работает как поэлементное объединение координат, а умножение требует раскрытия скобок и учёта $(i^2=-1)$. Поэтому умножение обладает более сложной структурой преобразования.

Алгоритм вычислений с комплексными числами

Последовательность действий для типовых задач на сложение и умножение.



Главное, что нужно запомнить

Комплексные числа записываются в виде $(a+bi)$, складываются по частям и умножаются с учётом $(i^2=-1)$. Эти правила расширяют алгебру и открывают путь к новым задачам.