

Вычисление площадей с помощью интегралов

Площадь можно найти как сумму бесконечно малых частей.

От геометрии к интегралу

01

Когда фигура имеет кривые границы, обычных формул уже недостаточно. Тогда площадь удобно описывать через накопление величины на отрезке — именно так в школьной математике появляется определённый интеграл и формула Ньютона–Лейбница.

Площадь как геометрическая величина

Единицы измерения

Площадь всегда выражают в квадратных единицах: мм^2 , см^2 , м^2 или км^2 . Это подчёркивает, что речь идёт не о длине границы, а о величине внутренней области.

Стандартные фигуры

Для прямоугольника, треугольника, параллелограмма и круга существуют готовые формулы. Они удобны, пока границы фигуры остаются прямыми или описываются простой геометрией.

Криволинейные области

Если граница задана графиком функции, обычные формулы часто не работают. Интеграл позволяет находить площадь областей с плавным, изогнутым контуром и без привычной формы.

Связь с графиком

В задачах область может быть ограничена осью Ox , одной функцией или двумя кривыми. Именно такой способ описания делает интеграл универсальным инструментом для школьных задач на площадь.

Геометрический смысл определённого интеграла

Разбиение отрезка

Отрезок $[a; b]$ делят на множество узких частей. На каждом участке строят прямоугольник, высота которого берётся по значению функции, а ширина равна Δx .

Предел сумм

При неограниченном увеличении числа разбиений прямоугольная сумма стремится к точному значению. Так возникает строгая математическая модель площади под кривой.

Приближение площади

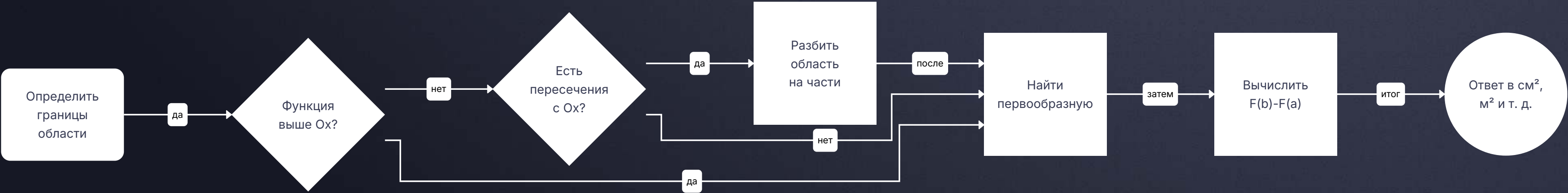
Сумма площадей всех прямоугольников даёт приближённое значение площади под графиком. Чем уже полосы, тем меньше заметны промежутки между ними и точнее результат.

Наглядный образ

График $y = f(x)$, ось Ox и вертикальные полосы вместе показывают, как непрерывная фигура заменяется набором простых элементов, из которых складывается итоговая площадь.

Алгоритм нахождения площади под графиком

Последовательность действий при решении задач на площадь через определённый интеграл



Формула Ньютона–Лейбница

01

Связь с первообразной

Если $F'(x)=f(x)$, то определённый интеграл сводится к разности значений первообразной на концах промежутка. Это превращает сложную сумму площадей в компактное вычисление.

02

Удобство для школьных задач

В большинстве задач функция задана аналитически, поэтому достаточно найти первообразную и подставить границы. Именно этот приём делает вычисление площадей доступным и прозрачным.

03

Смысл результата

Формула показывает, что интеграл измеряет не отдельную точку, а накопление величины на всём отрезке. Поэтому она одинаково полезна и в геометрии, и в анализе.

Как точность приближения зависит от числа разбиений



Переход от 4 к 32 прямоугольникам показывает, как уточнение разбиения постепенно сглаживает погрешность и делает приближение визуально ближе к истинной площади.

Чем больше число прямоугольников, тем меньше относительная ошибка. Это подтверждает идею: точность возрастает при уменьшении ширины разбиения.

Учебная иллюстрация на основе модели прямоугольных сумм

1/3

— такова площадь
под графиком $y = x^2$
на отрезке $[0; 1]$.

Пример из школьного курса математики

Этот результат показывает, что определённый интеграл сразу даёт точное значение площади, если функция на промежутке неотрицательна.

Что делать, если график уходит ниже оси Ox

01

Не смешивать знаки

Если часть графика лежит ниже оси Ox , определённый интеграл может стать отрицательным. Для геометрической площади это неприемлемо, поэтому знак нужно учитывать отдельно.

02

Использовать модуль

Когда требуется именно площадь, удобно интегрировать модуль функции. Такой подход позволяет получить положительную величину, даже если график на части промежутка расположен ниже оси.

03

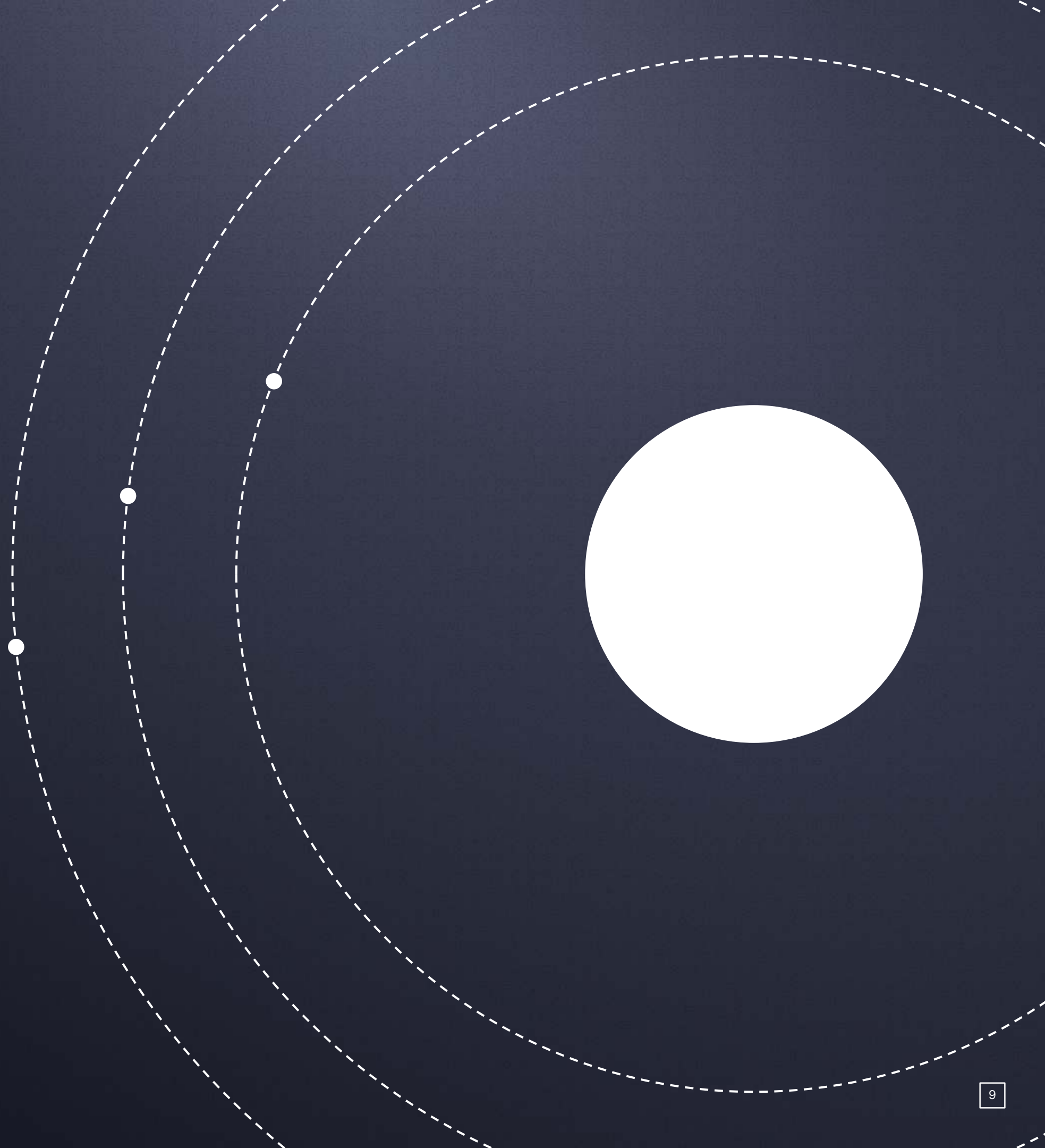
Разбивать по точкам пересечения

Если функция меняет знак, область делят в точках пересечения с осью Ox . На каждом участке знак известен, и площадь вычисляется без неоднозначности.

04

Проверять верх и низ

При работе с областями важно определить, где график расположен выше оси, а где ниже. Это помогает избежать ошибки при записи пределов и подынтегрального выражения.



Основные формулы площадей через интеграл

Выбор формулы зависит от знака функции и расположения графиков на каждом участке.

Для простых областей достаточно одной формулы, а для сложных — разбиения на участки. Главное правило: сначала определить знак и взаимное расположение графиков.

Вид фигуры	Формула	Условия
Под графиком	$\int f(x)dx$	$f(x)\geq 0$
Между кривыми	$\int (f-g)dx$	$f(x)\geq g(x)$
При смене знака	$\int f(x) dx$	разбиение

Школьные формулы вычисления площадей через определённый интеграл

Площадь между двумя кривыми

Когда сверху одна функция, а снизу другая

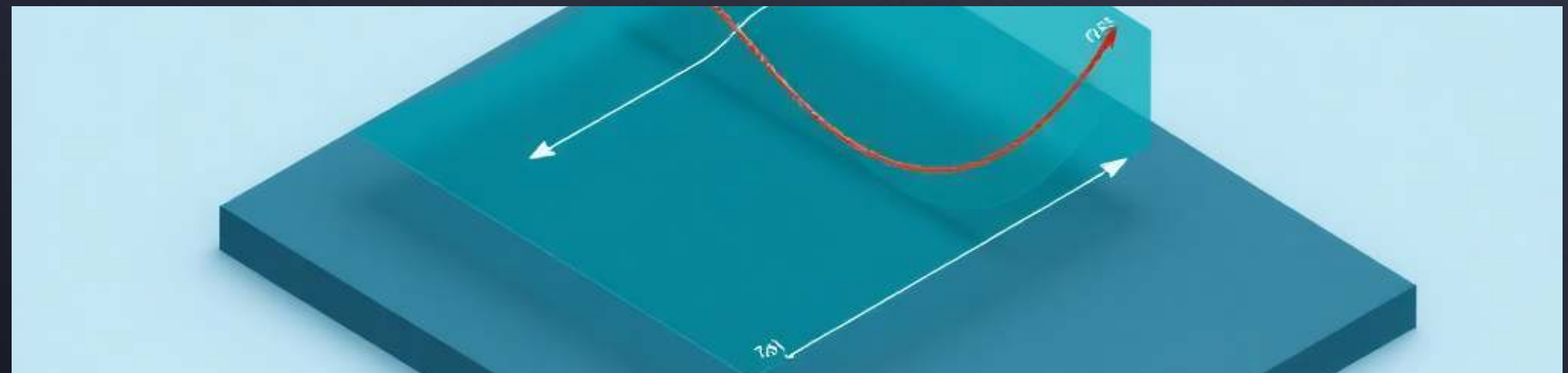
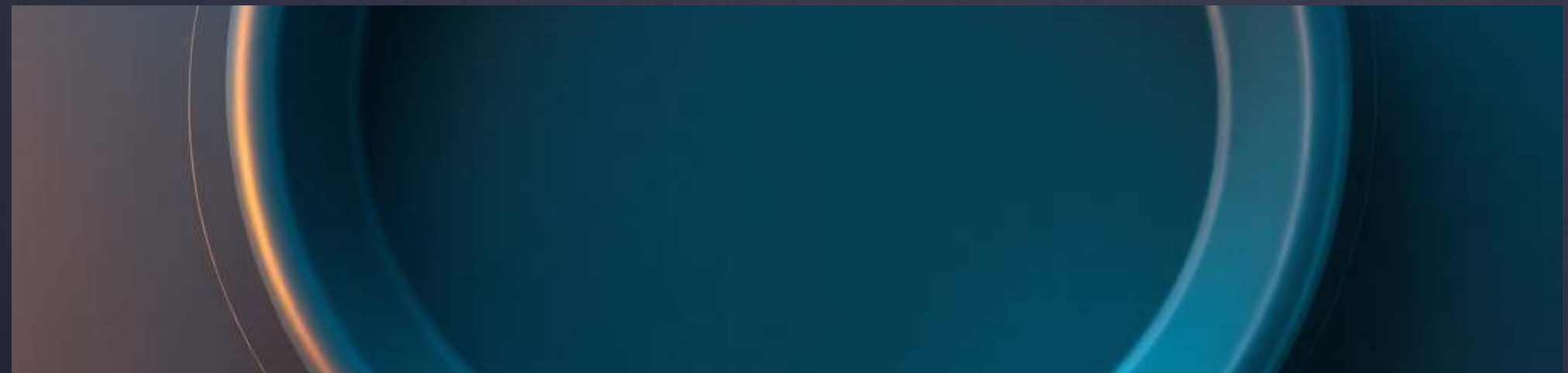
На одном и том же промежутке две кривые образуют замкнутую область, если одна из них всё время лежит выше другой. Тогда площадь удобно понимать как сумму вертикальных полос, высота которых равна разности значений функций. Такой рисунок показывает саму идею вычитания нижней границы из верхней.

Точки пересечения задают границы

Прежде чем считать площадь, нужно найти, где графики пересекаются, потому что именно эти точки часто становятся концами интегрирования. На схеме они отмечают начало и конец области, а между ними проводятся тонкие вертикальные сечения. Это помогает увидеть, что площадь считается только внутри нужного контура.

Одна задача — две зависимости

Метод особенно нагляден, когда сравниваются две величины на одинаковом отрезке: например, два графика роста, скорости или прибыли. В таких задачах площадь между кривыми показывает не отдельную функцию, а разницу между ними. Поэтому геометрия напрямую отражает смысл сравнения.



Вклад отдельных участков в итоговую площадь



Диаграмма показывает, что общий результат складывается из трёх отдельных вкладов. При смене знака функции каждый участок удобно считать отдельно, а затем объединять в один ответ.

Наибольший вклад даёт участок [2; 3]; сумма всех трёх значений формирует итоговую площадь без потери знака и структуры.

Иллюстративные данные для учебной диаграммы

Ключевые приёмы разбиения области



Разделить по границам

Сначала выделяют все линии, которые реально ограничивают фигуру. Это помогает не смешивать разные участки и сразу видеть, где одна часть области заканчивается, а другая начинается.



Выбрать удобное направление

Если границы проще выражаются через x , область делят вертикально; если удобнее по y , используют горизонтальные сечения. Выбор направления часто сокращает число интегралов и упрощает запись пределов.



Свести к простым фигурам

Сложную область разбивают так, чтобы каждая часть описывалась одной понятной формулой. Тогда итоговая площадь получается как сумма нескольких простых интегралов без лишних преобразований.

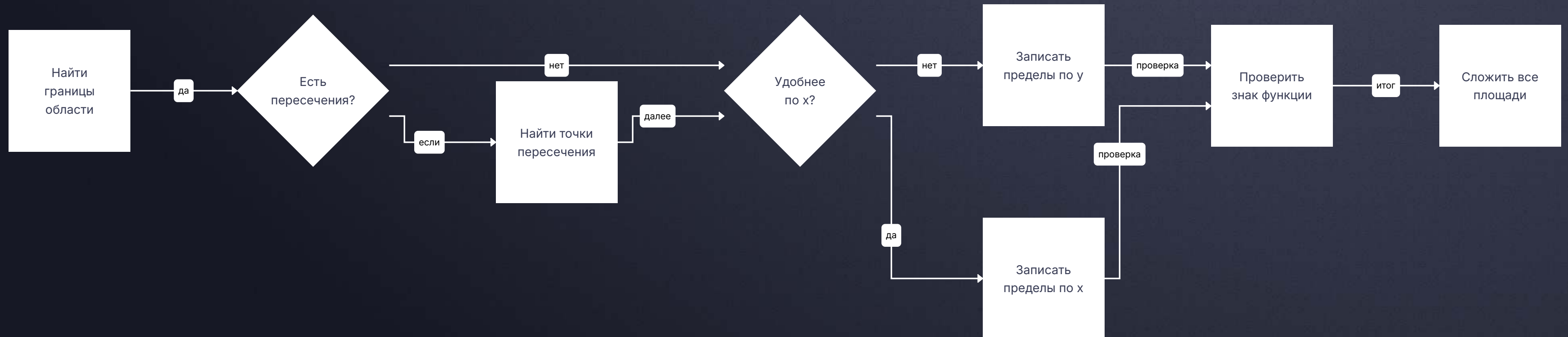


Собрать результат по частям

После вычисления каждого вклада важно аккуратно сложить все части и проверить, не потеряны ли участки выше или ниже оси. Такой контроль особенно важен для фигур с изломами и несколькими пересечениями.

Порядок выбора границ интегрирования

Последовательность действий при поиске площади сложной области по её границам и точкам пересечения



На что чаще всего ошибаются

Площадь и знак

Самая частая ошибка — считать, что значение интеграла всегда равно площади. Если график уходит ниже оси Ox , часть результата становится отрицательной, и это нужно учитывать отдельно.

Неверные точки пересечения

Иногда границы выбирают на глаз, не проверяя, где именно графики пересекаются. Из-за этого в ответ попадает лишний участок или, наоборот, теряется часть нужной области.

Не та верхняя кривая

При вычислении площади между двумя графиками важно каждый раз определять, какая функция лежит выше. Если перепутать порядок вычитания, получится отрицательный интеграл вместо площади.

Забывтые единицы

Ответ без квадратных единиц измерения выглядит неполным и снижает точность решения. Для площади обязательно указывать мм^2 , см^2 , м^2 или другую подходящую единицу.

Пропуск разбиения

Если область состоит из нескольких частей или функция меняет знак, нельзя ограничиваться одним интегралом. Нужно разбить задачу на участки и отдельно проверить каждый из них.

Какие приёмы чаще всего используются в задачах на площадь



Большинство задач сводится к нескольким повторяющимся схемам, поэтому важнее понимать логику выбора метода, чем запоминать множество отдельных случаев.

Лидирует формула Ньютона–Лейбница, а остальные приёмы дополняют её, когда область сложнее или функция меняет знак.

Иллюстративные данные для учебной диаграммы

Где интегралы работают на практике

Физика движения

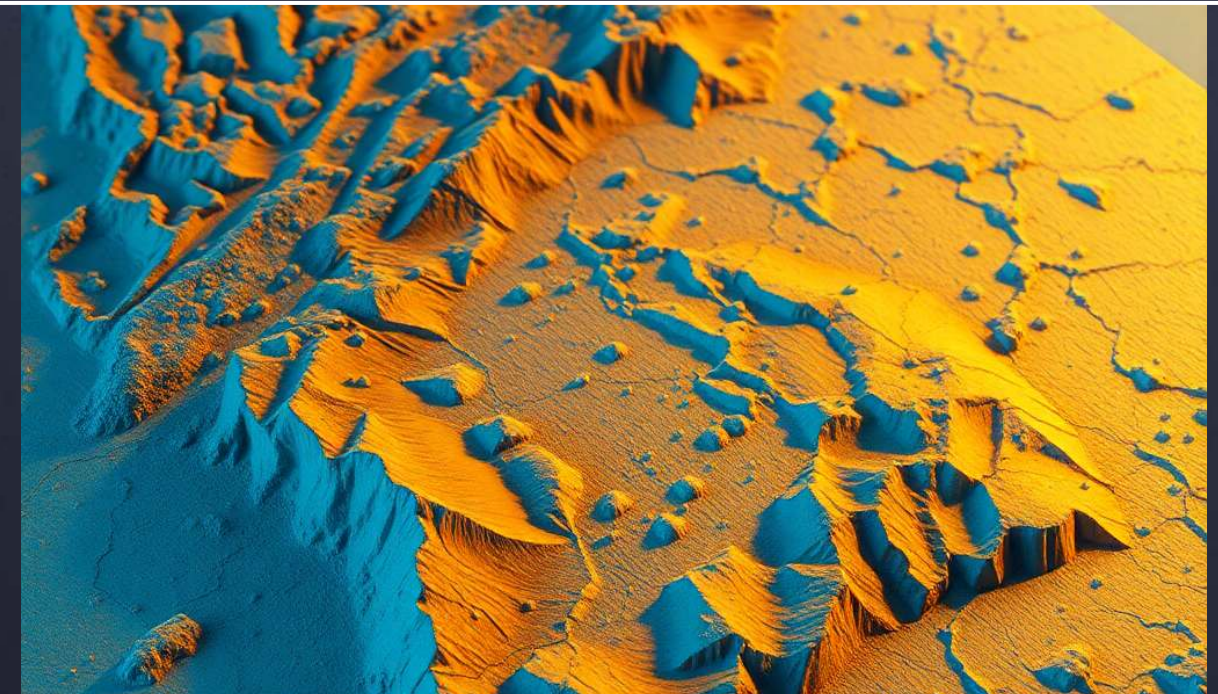
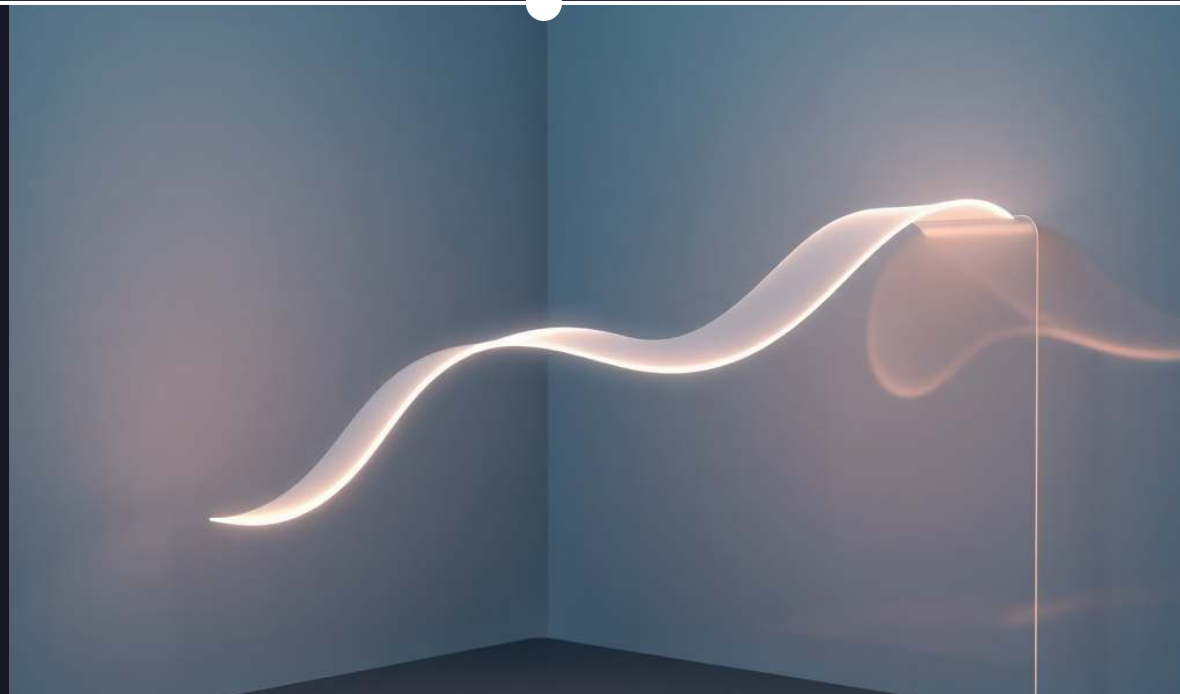
В физике интеграл позволяет находить путь по графику скорости, когда значение меняется со временем. Площадь под кривой здесь уже означает не геометрическую фигуру, а накопленное перемещение, поэтому визуально важны оси времени и скорости. Такой график помогает связать формулу с реальным процессом.

Экономика накопления

В экономике интегралы описывают накопленную прибыль, расход ресурсов или суммарный доход за период. На диаграмме это можно показать как площадь под графиком зависимости величины от времени, где каждый малый участок добавляет свой вклад. Так математика превращается в язык анализа изменений.

География и картография

При измерении участков сложной формы интеграл помогает работать с неровными границами, которые трудно описать стандартными формулами. На иллюстрации это можно сопоставить с контуром территории и разбиением его на узкие полосы. Метод особенно полезен, когда нужен точный расчёт площади.



Мини-практикум по вычислению площадей

Условие	Границы	Формула	Результат
$y = x^2$	$[0; 1]$	$\int x^2 dx$	$1/3$
$y = 2x$	$[0; 2]$	$\int 2x dx$	4
$y = x+1$ и $y = x^2$	точки пересечения	$\int (\text{верх}-\text{низ}) dx$	по частям

Учебные примеры по теме определённого интеграла

Три короткие задачи показывают, как одна и та же идея применяется к разным графикам и границам.

Во всех трёх случаях алгоритм один: найти границы, определить верхнюю и нижнюю границы области и затем вычислить соответствующий интеграл.

Что важно запомнить перед решением задач

01

Сначала понять область

Прежде чем вычислять интеграл, нужно чётко увидеть, какая именно фигура рассматривается. Это помогает не перепутать границы и сразу заметить, где область состоит из нескольких частей.

02

Проверить знак функции

Если график расположен ниже оси Ox , значение интеграла не совпадает с геометрической площадью. В таких случаях используют модуль или делят область на участки с разным знаком.

03

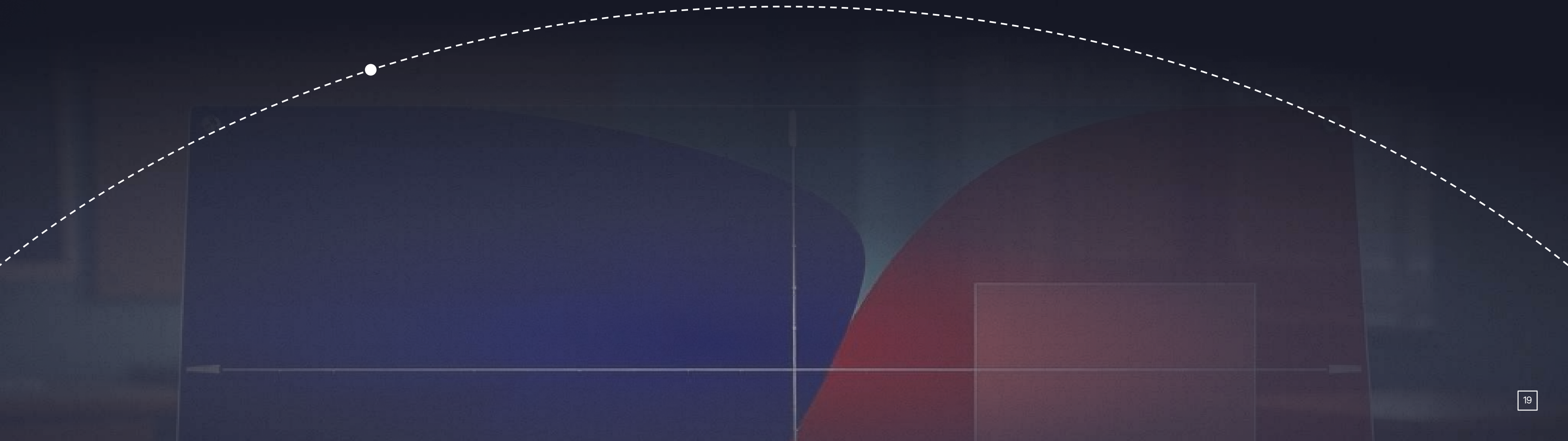
Определить верх и низ

При площади между двумя кривыми всегда важно понять, какая функция лежит выше на данном промежутке. Именно разность верхней и нижней функций даёт правильный результат.

04

Не забыть единицы

Ответ без квадратных единиц измерения считается незавершённым. Даже в коротком решении нужно указать, в каких единицах выражена площадь, чтобы сохранить математическую точность.



Интеграл помогает увидеть площадь глубже

Определённый интеграл превращает площадь из формулы в способ описания накопления. Он связывает графики, первообразные и границы области, а потому становится главным инструментом для точного решения задач.

