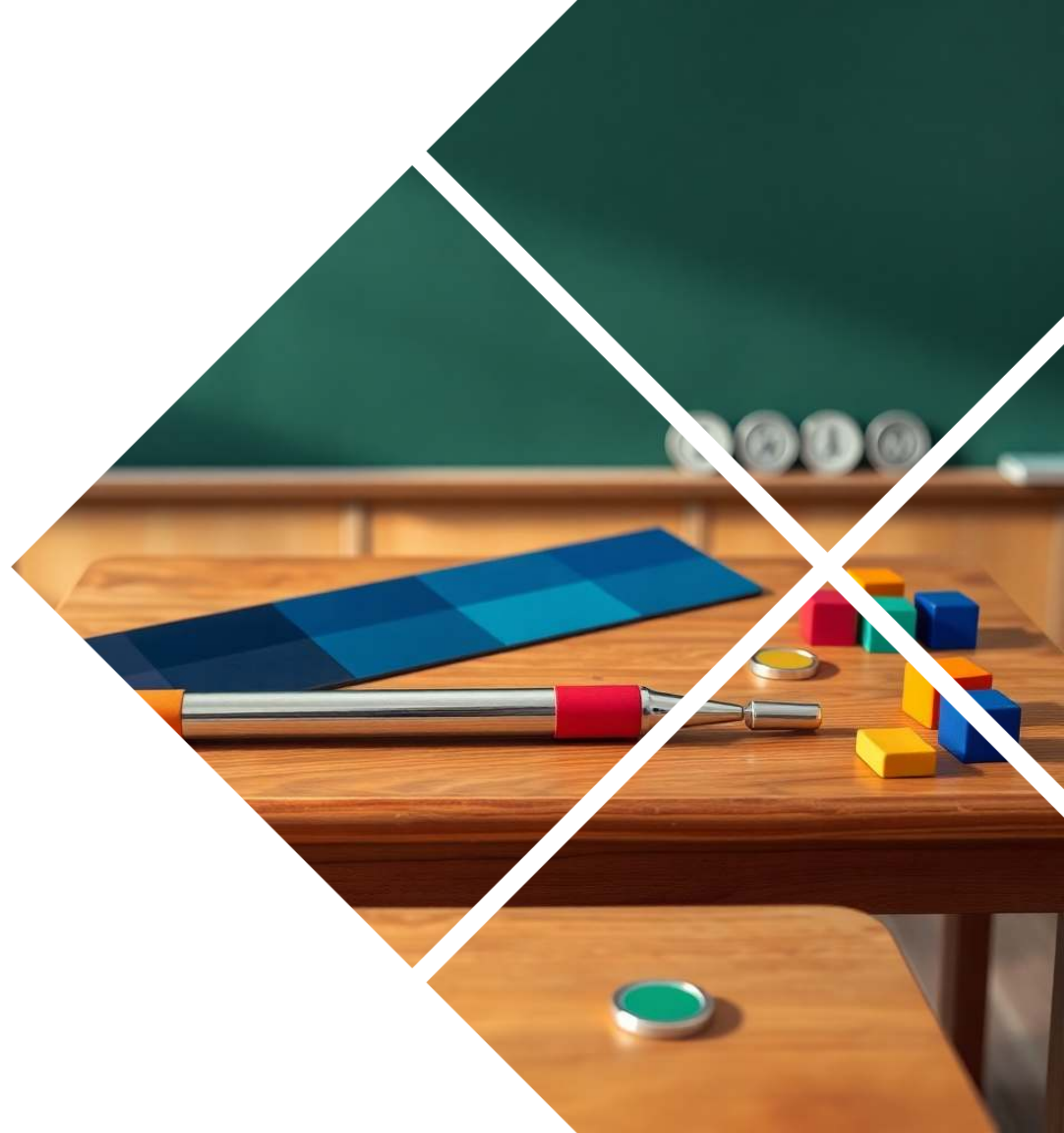


Деление многочлена на линейный двучлен и теорема Безу

Остаток, корни и множители многочлена
связаны одной теоремой.



Почему это важно на уроках алгебры

Эта тема соединяет деление многочленов, поиск корней и разложение на множители, поэтому помогает уверенно решать уравнения и проверять делимость в старшей школе.



Основные понятия: многочлен, двучлен, остаток

■ Многочлен

Многочлен $P(x)$ состоит из суммы одночленов с коэффициентами и степенями переменной. Его форма позволяет изучать значения, корни и делимость в единой записи.

■ Линейный двучлен

Двучлен $x-a$ содержит переменную и число a . Именно деление на такой множитель особенно удобно, потому что остаток можно определить без длинных вычислений.

■ Остаток деления

При делении на $x-a$ получается частное $Q(x)$ и остаток r , который является числом. Для такого деления существует единственное представление результата.

Формула деления с остатком

01

Запись деления

Для любого многочлена выполняется равенство $P(x) = (x-a)Q(x) + r$. Оно описывает деление на линейный двучлен через частное и остаток.

02

Подстановка точки

Если подставить $x=a$, первый множитель обратится в ноль. Тогда останется равенство $P(a) = r$, то есть остаток выражается через значение многочлена.

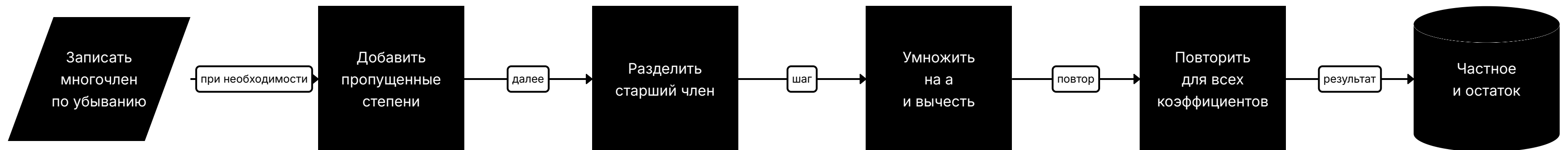
03

Основа теоремы

Именно эта связь между остатком и значением $P(a)$ лежит в основе теоремы Безу и делает проверку делимости очень короткой.

Алгоритм деления многочлена на $x-a$

Последовательность действий при делении многочлена на линейный двучлен



Деление и подстановка: как связаны эти действия

Таблица показывает, почему вычисление $P(a)$ сразу даёт остаток от деления на $x-a$.

Сравнение двух записей показывает, что остаток не нужно искать отдельно: достаточно вычислить значение многочлена в точке a .

Операция	Результат	Смысл
Деление	$P(x)=(x-a)Q(x)+r$	Есть частное и остаток
Подстановка $x=a$	$P(a)=r$	Остаток равен значению
Проверка	$P(a)=0$	Делимость подтверждена

Свойство деления многочлена с остатком и подстановка $x=a$

Связь между корнем и множителем

- **Нулевое значение**

Если $P(a)=0$, то число a является корнем многочлена. Это означает, что при подстановке в выражение получается ноль.

- **Множитель $x-a$**

Если a — корень, то двучлен $x-a$ делит многочлен без остатка. Таким образом, корень сразу указывает на линейный множитель.

- **Разложение на множители**

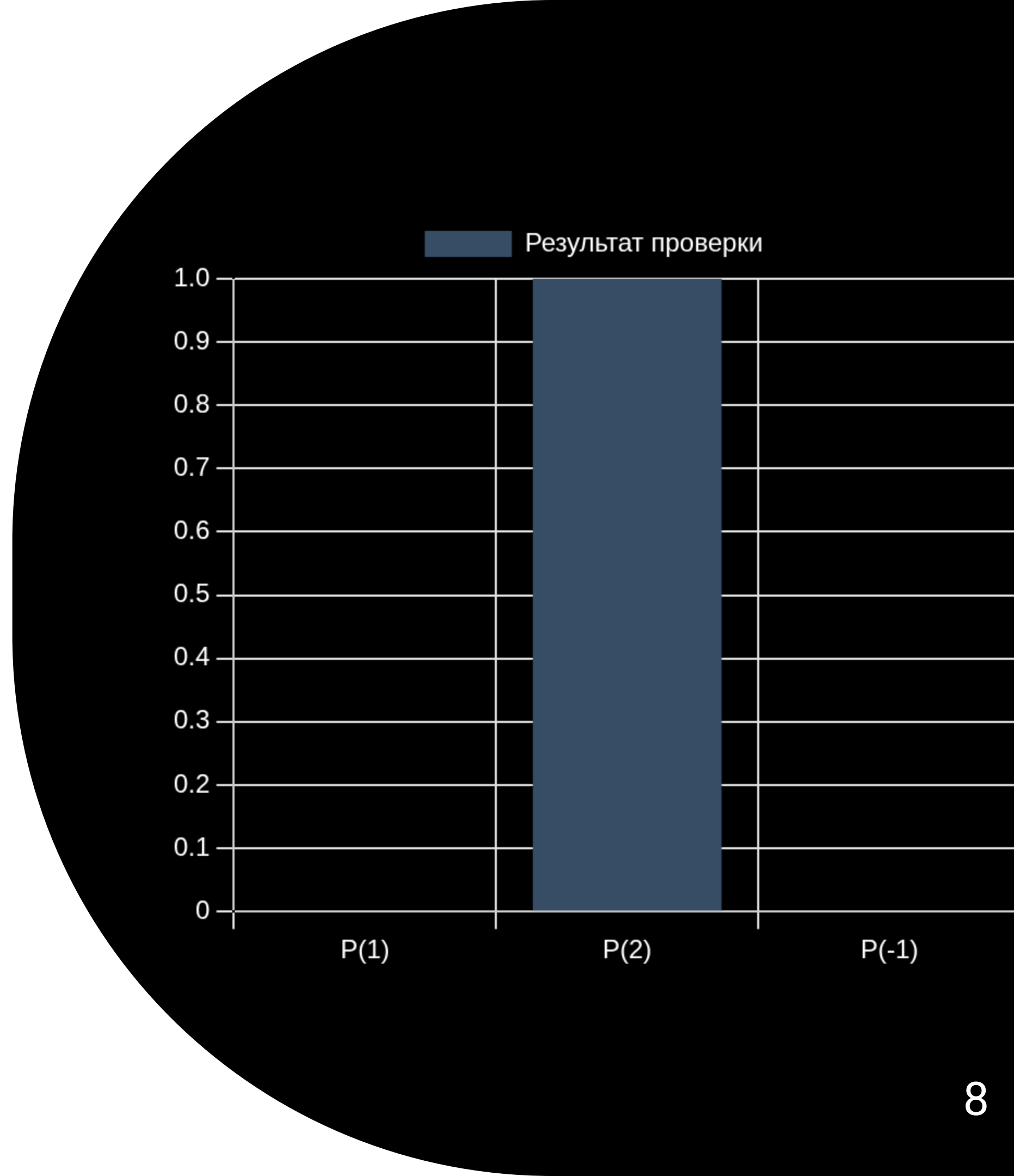
Эта связь позволяет переходить от поиска корней к разложению многочлена на множители и, наоборот, проверять найденные множители через значение функции.

Когда остаток равен нулю

Здесь ноль означает делимость на x -а, а единица показывает ненулевой остаток в примере проверки.

Два нулевых значения подтверждают делимость в соответствующих случаях, а ненулевое значение сразу исключает x -а как множитель.

Иллюстративные результаты проверки:
 $P(1)=0$, $P(2)\neq 0$, $P(-1)=0$



Теорема Безу

01

Формулировка

Остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $x-a$ равен значению $P(a)$. Это и есть содержание теоремы Безу.

02

Критерий делимости

Если $P(a)=0$, то многочлен делится на $x-a$ без остатка. Если значение не равно нулю, делимость отсутствует.

03

Практический смысл

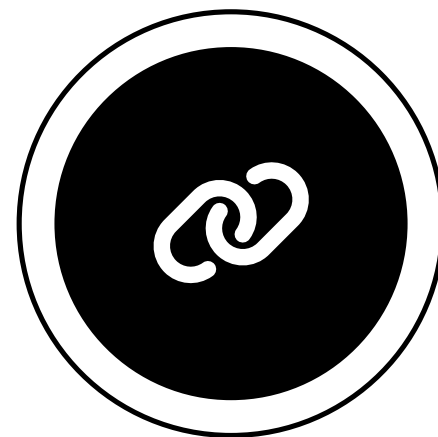
Теорема Безу связывает вычисление остатка, проверку корней и разложение на множители в одно удобное правило для школьной алгебры.

Практическое значение теоремы Безу



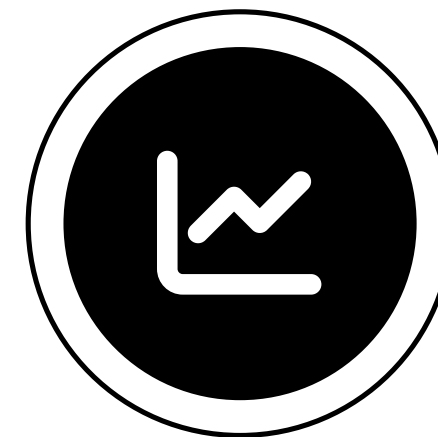
Быстрая проверка

Чтобы проверить предполагаемый корень, достаточно вычислить $P(a)$. Это намного короче, чем выполнять полное деление многочлена вручную.



Связь с разложением

Если найдено значение $P(a)=0$, сразу появляется линейный множитель $x-a$. Это упрощает дальнейшее разложение многочлена на множители.

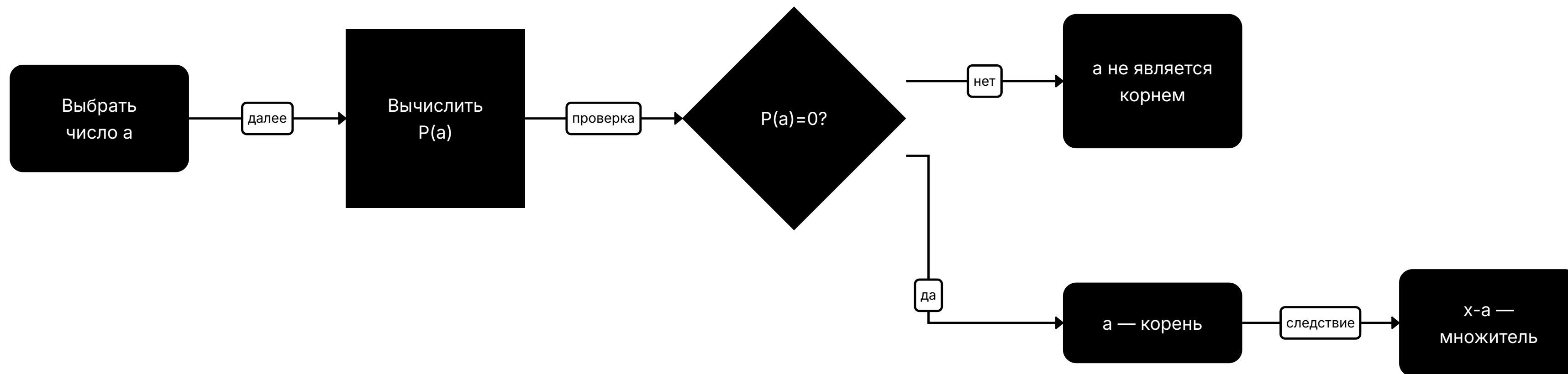


Полезно для уравнений

Метод особенно удобен в уравнениях третьей и более высоких степеней, где один найденный корень снижает степень исходного выражения.

Проверка числа на роль корня

Алгоритм основан на вычислении значения многочлена в точке a и сравнении результата с нулём.



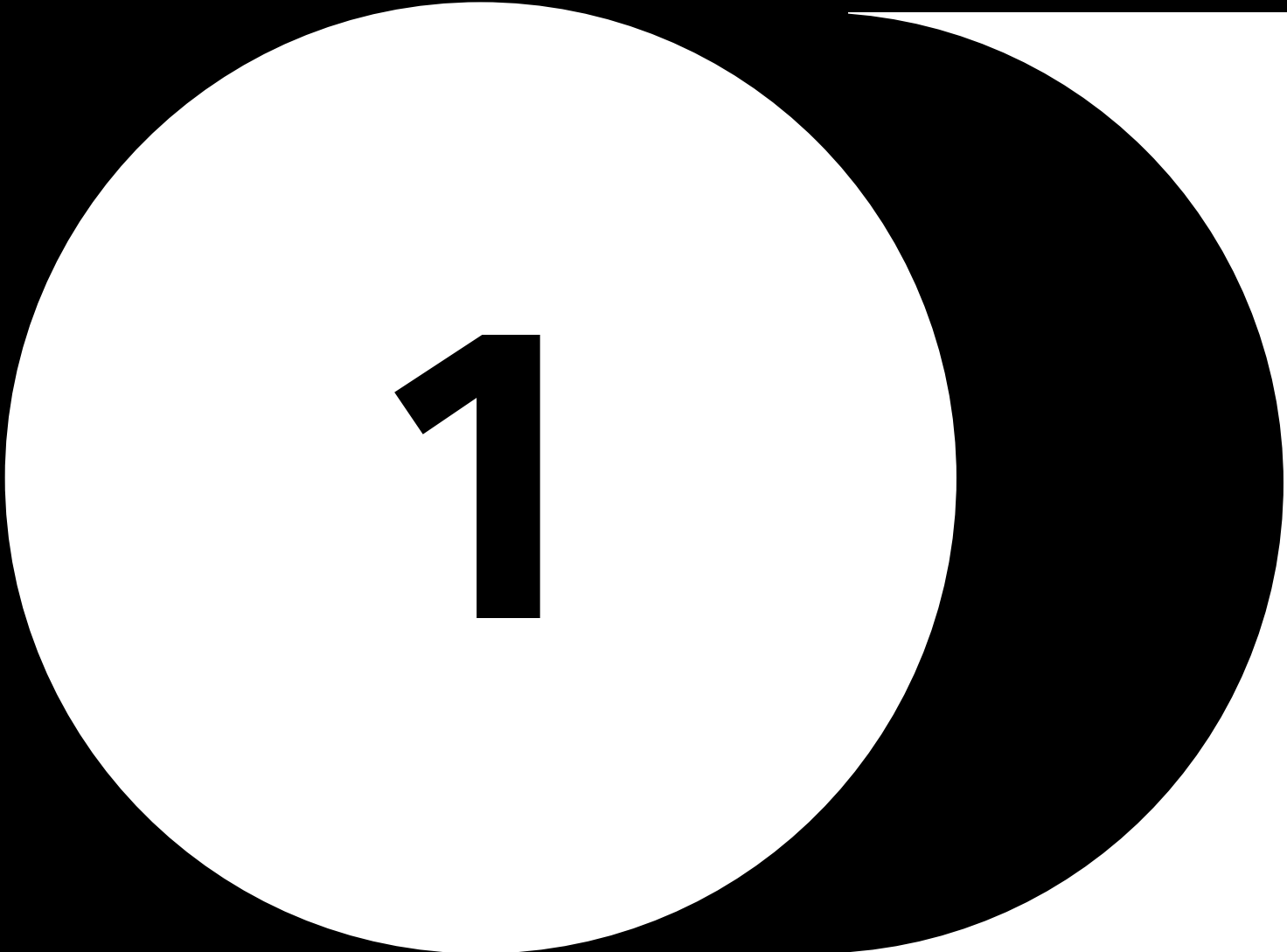
Пример деления многочлена и проверки корня

► Пример показывает, как значение многочлена в точке сразу подтверждает делимость на линейный двучлен и даёт разложение на множители.

► Нулевое значение $P(2)$ означает, что $x-2$ делит многочлен без остатка, а найденное частное позволяет сразу записать разложение.

Шаг	Результат	Вывод
$P(2)$	0	2 — корень
Деление	x^2-2x-3	частное
Запись	$(x-2)(x^2-2x-3)$	разложение

$$P(x)=x^3-4x^2+x+6; a=2$$



1

Для линейного двучлена схема Горнера сводит вычисления к одной цепочке действий и особенно удобна при длинных многочленах.

последовательная запись
коэффициентов
позволяет получить
частное и остаток
без полного столбикового
деления.

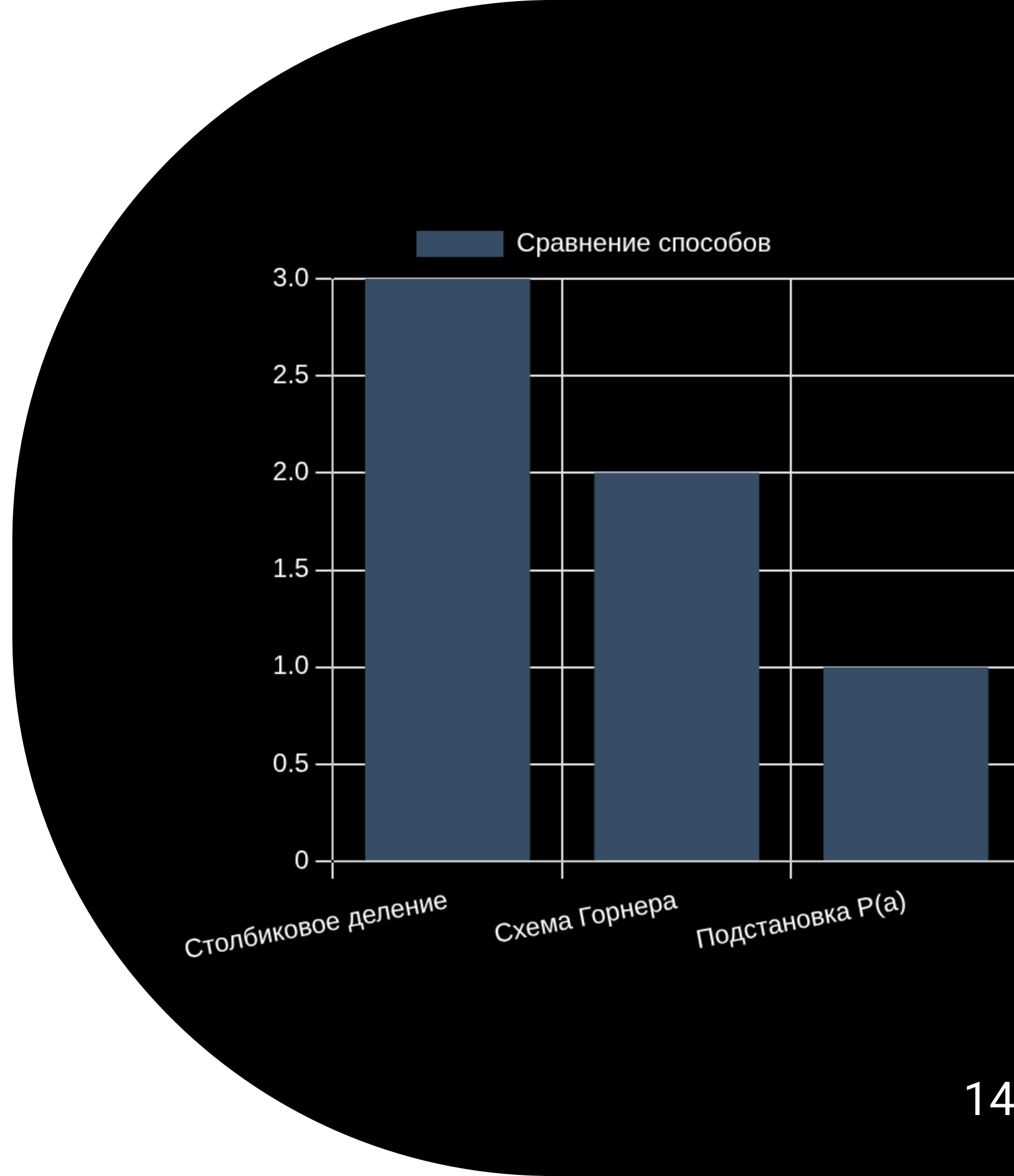
Учебный алгоритм схемы Горнера для деления на $x-a$

Сравнение способов нахождения остатка

Чем короче путь к ответу, тем меньше промежуточных вычислений и риск арифметической ошибки при работе с многочленом.

Подстановка даёт остаток напрямую, схема Горнера сочетает скорость и наглядность, а столбиковое деление остаётся самым трудоёмким способом.

Сравнительная характеристика способов в теме «Деление многочлена на $x-a$ »



Типичные ошибки при делении многочленов



■ Пропуск нулевых членов

Если не вставить отсутствующий член, легко сбиться со степеней и получить неверные коэффициенты частного. Особенно часто ошибка возникает в многочленах с «пропущенными» степенями.

■ Неверный знак двучлена

В записи $x-a$ знак внутри двучлена важно читать точно: при $a=2$ делитель — $x-2$, а не $x+2$. Ошибка меняет и остаток, и вывод о корне.

■ Путаница в остатке

Последний коэффициент частного не равен остатку. Остаток — отдельное число, которое нужно сравнивать со значением $P(a)$, иначе проверка делимости становится неверной.

■ Сбой в вычитании

При последовательных действиях легко потерять знак или ошибиться в арифметике. Даже одна неточность способна полностью изменить ответ и привести к ложному заключению.

Основные случаи и их выводы

Таблица помогает быстро связать значение $P(a)$ с делимостью, корнем и дальнейшим упрощением многочлена.

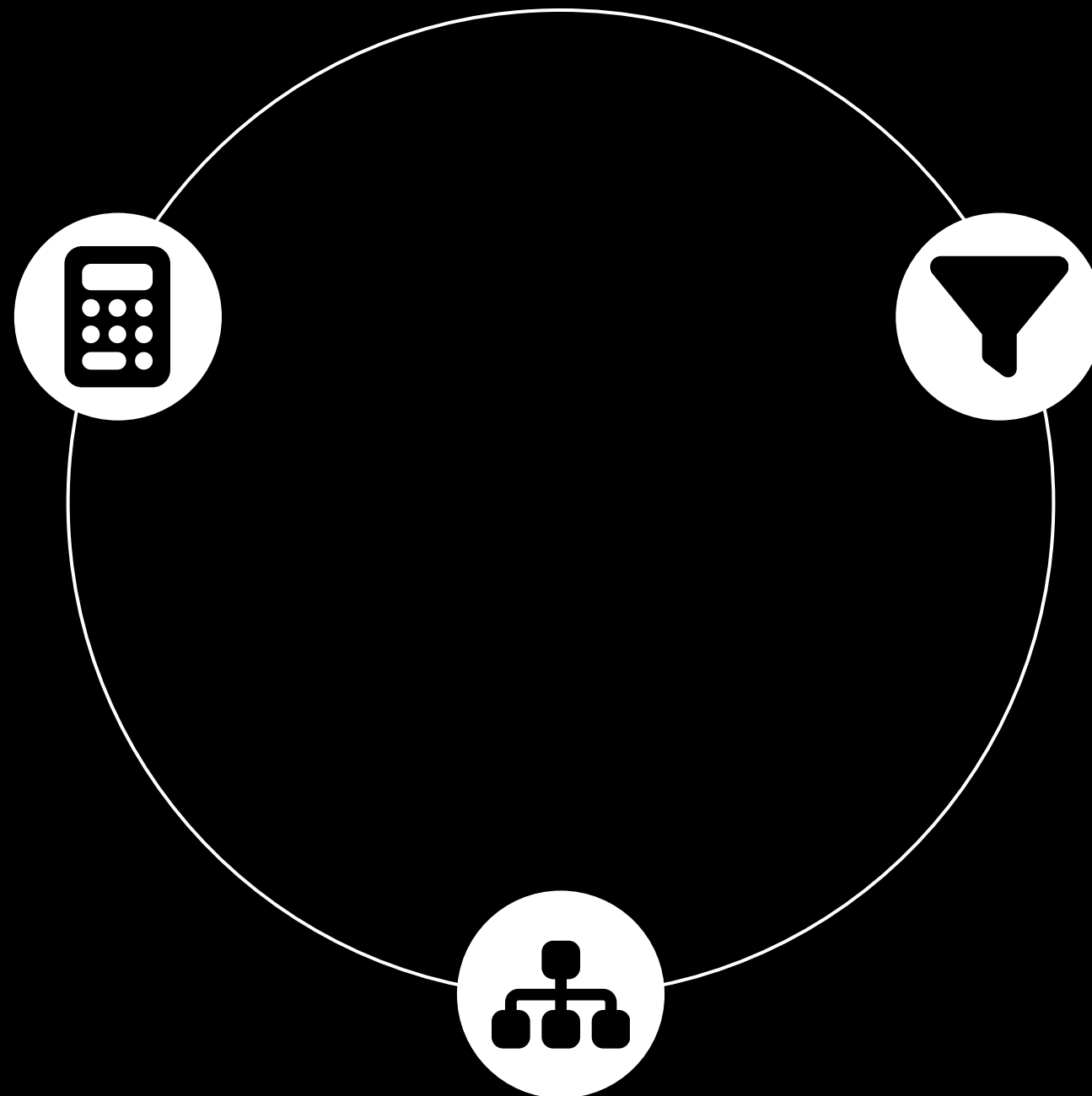
Проверка одного значения позволяет сразу сделать вывод о множителе; найденный корень упрощает дальнейшее разложение многочлена на множители.

Условие	Вывод
$P(a)=0$	$x-a$ — множитель
$P(a)\neq 0$	деления без остатка нет
Найден корень	степень уменьшается

Теорема Безу и свойства делимости
многочленов

Связь с теоремой о рациональных корнях

Кандидаты ограничены
Рациональные корни не ищут вслепую: возможные значения задаются отношением p/q , где p связано со свободным членом, а q — со старшим коэффициентом.



Проверка становится короче
После такого отбора остаётся ограниченный список чисел. Их удобно подставлять в многочлен и быстро выявлять те значения, при которых остаток равен нулю.

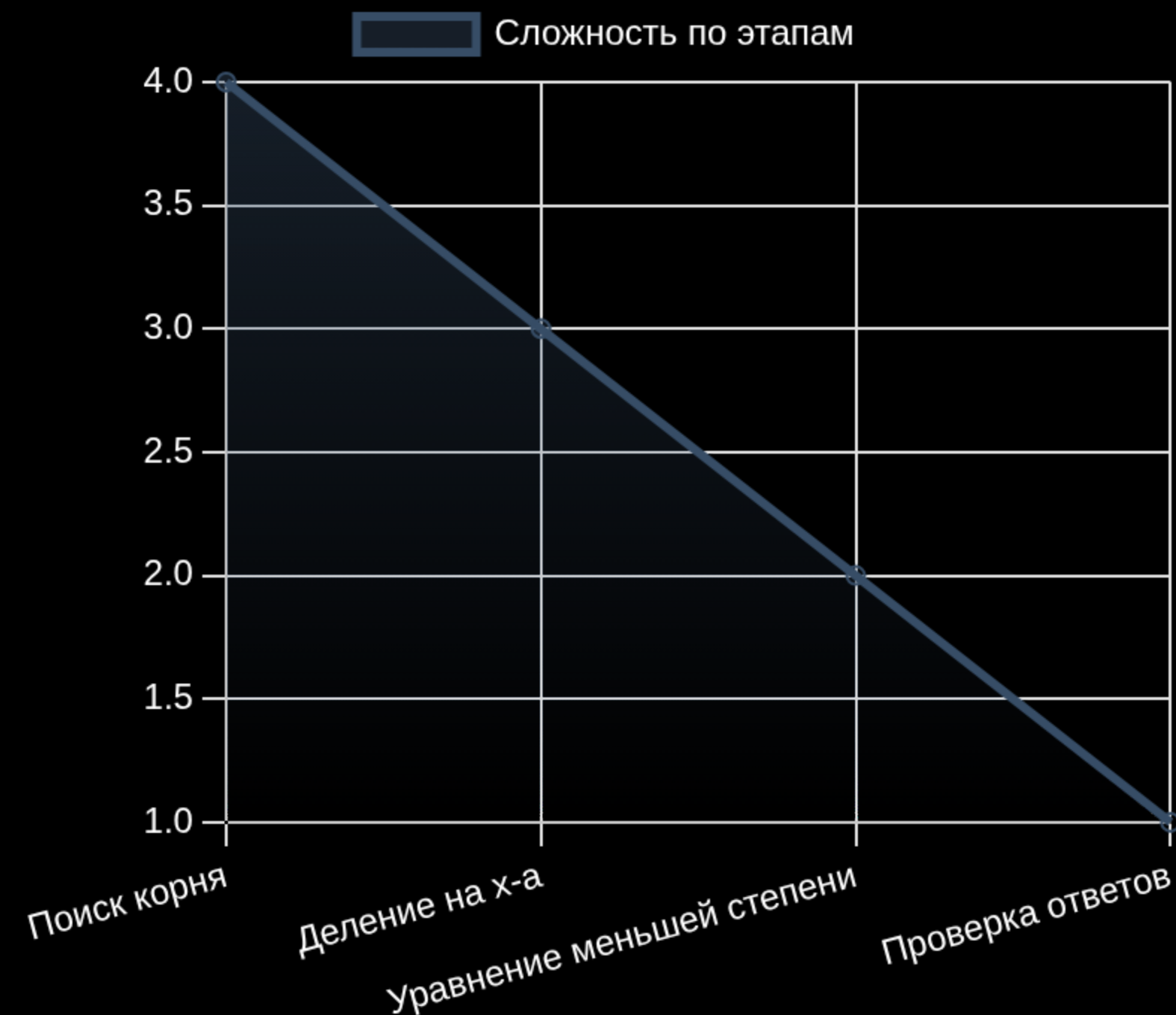
Разложение продолжается
Если найден рациональный корень, теорема Безу позволяет выделить линейный множитель и перейти к многочлену меньшей степени, который уже проще разложить дальше.

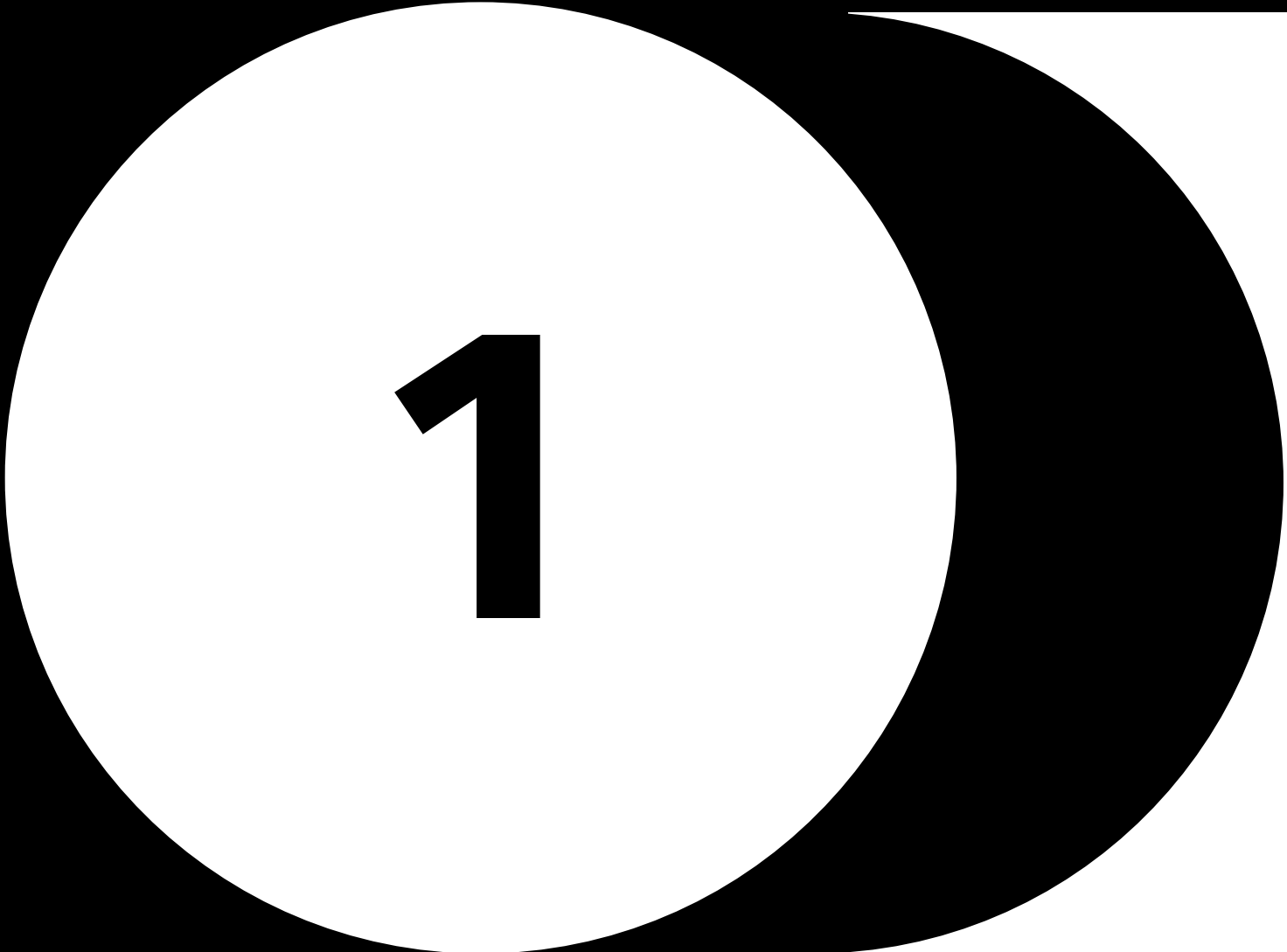
Применение в решении уравнений высших степеней

Один удачно найденный корень уменьшает степень многочлена и часто переводит задачу от кубического или четвертого уравнения к квадратному.

Последовательное применение теоремы Безу сокращает сложность решения и делает поиск корней более управляемым.

Схема решения уравнений высших степеней с использованием деления на $x-a$





1

Запись $P(x)=(x-a)Q(x)+P(a)$ показывает, что значение многочлена в точке сразу определяет остаток и условие делимости.

формула объединяет
остаток, проверку
корня и делимость
в единую логическую
цепочку.

Теорема Безу

Теорема Безу: короткий путь к корням и множителям

Теорема Безу превращает деление многочлена в удобный инструмент: достаточно вычислить $P(a)$, чтобы проверить корень, остаток и делимость. Это основа для разложения на множители и решения уравнений старших степеней.