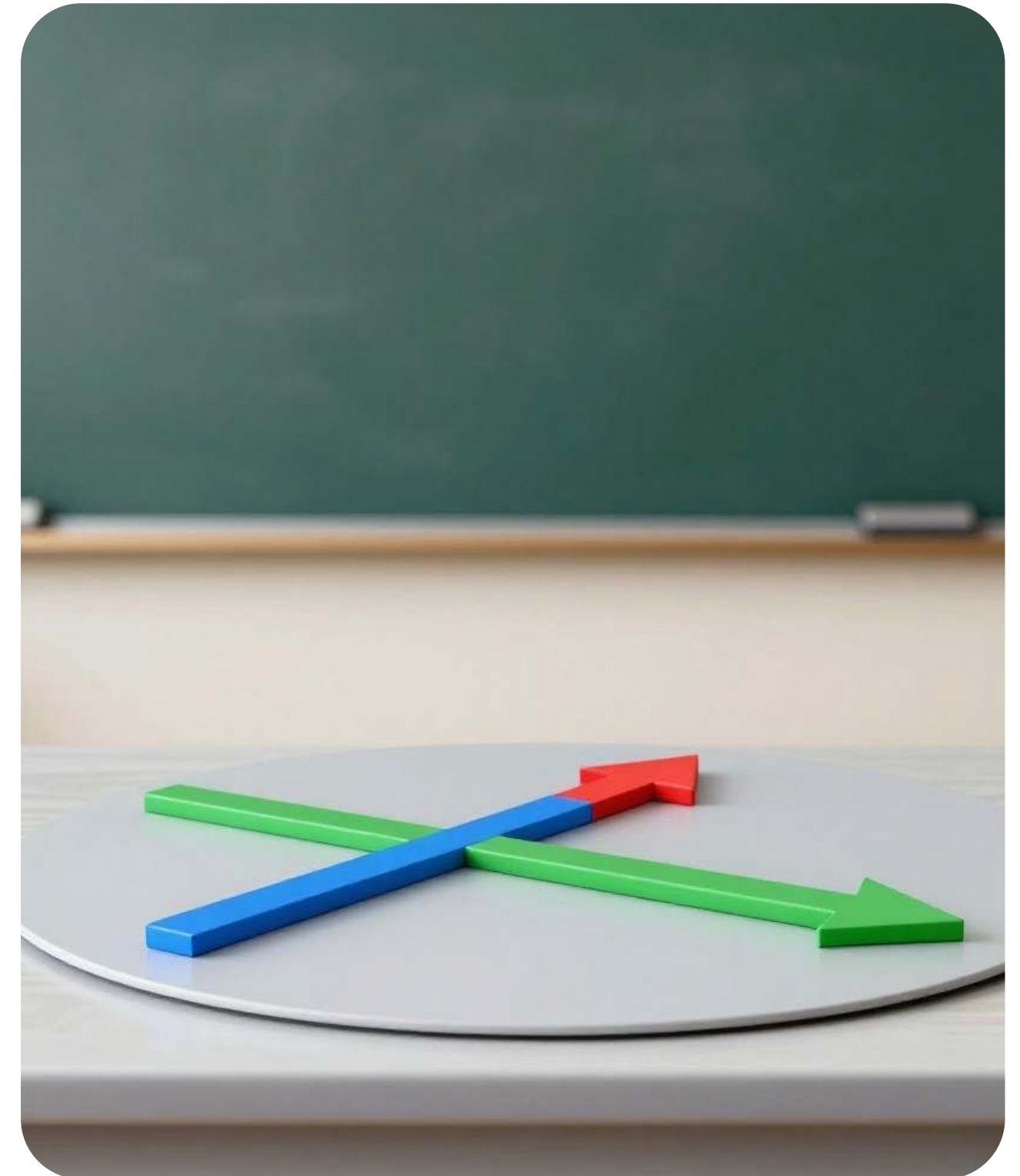




Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам

Как выразить один вектор через два направления на плоскости?



Почему это важно в геометрии



Разложение вектора помогает находить неизвестные величины, проверять построения и описывать движение на плоскости. Эта тема особенно полезна в задачах с треугольниками, параллелограммами и координатной сеткой.



Основные понятия: коллинеарные и неколлинеарные векторы



Одна прямая

Коллинеарные векторы лежат на одной прямой или на параллельных прямых, поэтому они задают одно направление и не образуют удобную основу для разложения.



Два разных направления

Неколлинеарные векторы не параллельны. Они задают на плоскости два независимых направления, по которым можно описать положение любого другого вектора.



Запись разложения

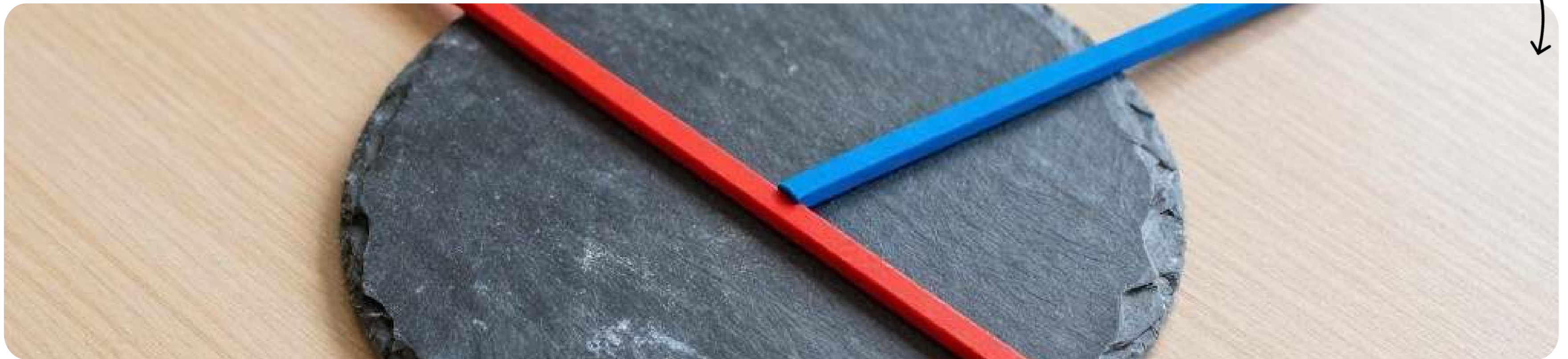
Разложение вектора означает, что один вектор представляют как сумму двух векторов с числовыми коэффициентами: $v = x \cdot a + y \cdot b$.



Что означают числа

Коэффициенты x и y показывают, насколько сильно каждый из двух направлений влияет на итоговый вектор, и могут быть не только положительными, но и отрицательными.

Геометрический смысл разложения



Начало в одной точке

Если от одной точки отложить векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$, они зададут две стороны будущей фигуры и покажут, как складываются направления.

Параллелограмм

После переноса параллельно самим себе эти векторы образуют параллелограмм, а его диагональ изображает сумму двух направленных отрезков.

Итоговый вектор

Конечный вектор получается именно как диагональ параллелограмма. Поэтому разложение удобно показывать на чертеже без лишних вычислений.

Что видно на рисунке

На схеме обычно заметны исходные направления, их параллельные переносы и общий результат — один вектор, полученный сложением двух частей.

Почему разложение возможно и почему оно единственно



01

Есть два направления

Если векторы a и b не коллинеарны, они дают на плоскости две независимые линии движения. Поэтому через них можно описать любой вектор этой плоскости.

02

Коэффициенты определяются точно

Для заданного вектора можно подобрать такие числа x и y , чтобы сумма $x \cdot a + y \cdot b$ дала именно нужный результат. Других подходящих пар для того же вектора не будет.

03

Почему ответ один

Одна и та же пара неколлинеарных векторов не может по-разному дать один и тот же итоговый вектор. Значит, разложение существует и является единственным.

Случаи, когда разложение работает и когда не работает



Ситуация	Любой вектор?	Единственно?	Пример
a и b неколлинеарны	да	да	два направления
a и b коллинеарны	нет	нет	одна прямая
Один вектор нулевой	нет	нет	нет второго направления

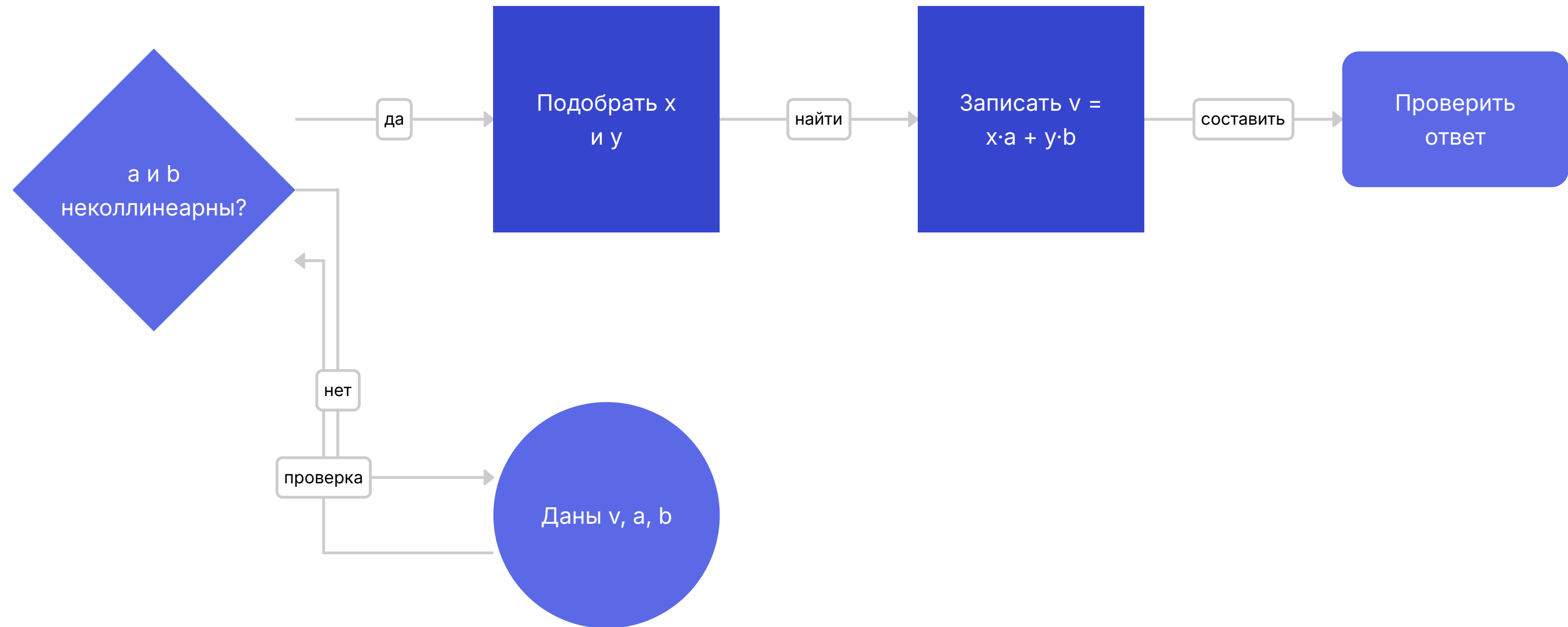
Общее свойство разложения вектора по двум неколлинеарным векторам.

Таблица показывает, при каких условиях любой вектор можно разложить по двум векторам и когда это невозможно.

Для разложения нужны два независимых направления; если их нет, решение либо отсутствует, либо не определяется однозначно.

Алгоритм разложения вектора

Последовательность действий при решении школьной задачи по векторам.



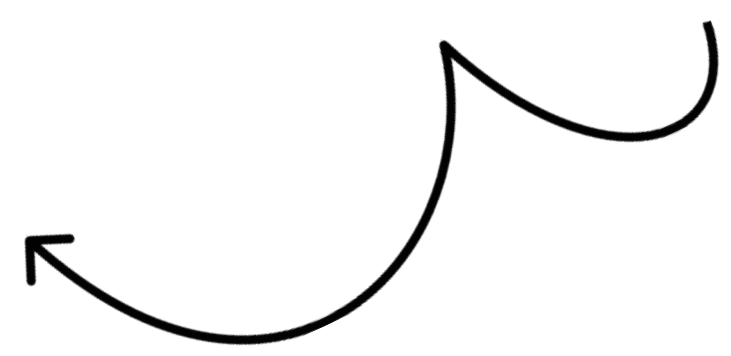
Коэффициенты в нескольких примерах



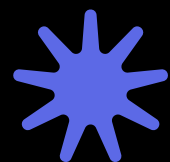
На диаграмме удобно сравнивать вклад каждого направления в итоговый вектор и замечать, как меняется знак коэффициента.

Коэффициенты могут усиливать, ослаблять или менять направление вклада; знак не менее важен, чем величина.

Учебные примеры из условия презентации.



Разложение через координаты



01 Записываем координаты

Если векторы заданы координатами, каждый из них можно представить парой чисел. Тогда разложение удобно переводится на язык уравнений.

02 Составляем систему

Для $x \cdot a + y \cdot b = v$ получают два равенства: по первой координате и по второй. Это и есть система для поиска x и y .

03 Находим коэффициенты

Решив систему, получают числа x и y . Именно они показывают, сколько раз каждый из двух векторов входит в разложение.

04 Почему это удобно

На координатной плоскости такой способ особенно понятен: каждый вектор уже задан числами, а значит, ответ можно проверить обычным вычислением.

Пример разложения на координатной плоскости



01

Даны векторы

Пусть $a = (2,1)$, $b = (1,2)$, а искомый вектор $v = (5,4)$. Нужно понять, какие коэффициенты дают именно такой результат.

02

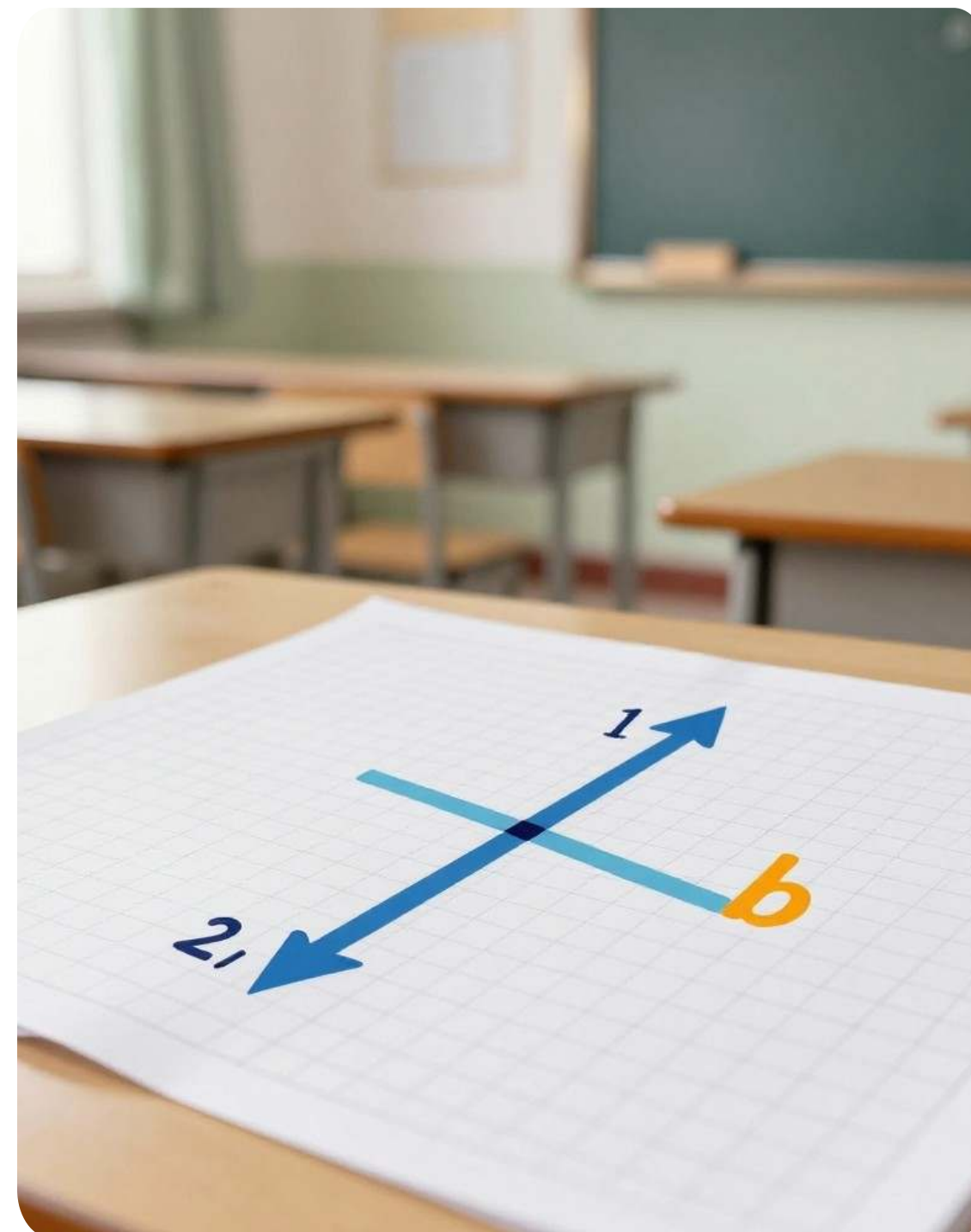
Находим разложение

Подходит запись $v = 2a + b$. Здесь два шага вдоль a и один шаг вдоль b приводят к нужному вектору.

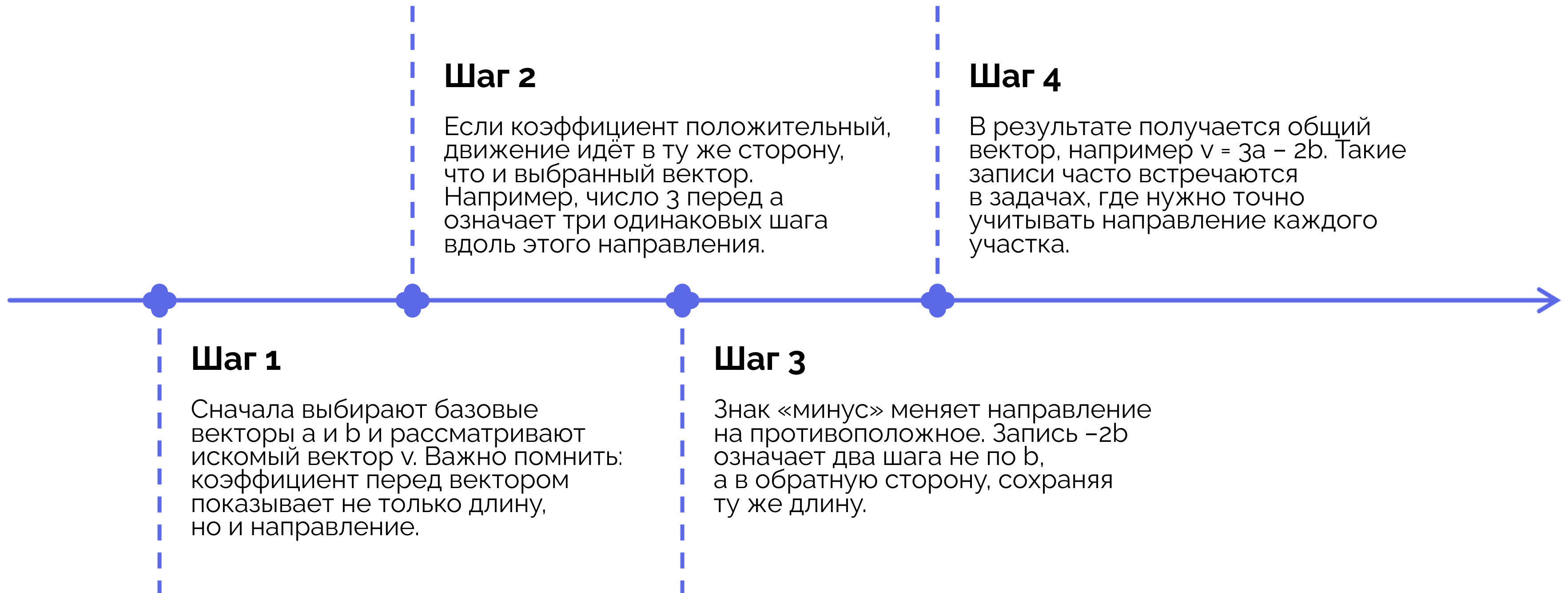
03

Проверяем ответ

Проверка по координатам подтверждает результат: $2 \cdot (2,1) + (1,2) = (4,2) + (1,2) = (5,4)$.



Отрицательные коэффициенты в разложении



Три учебных примера с проверкой



v	a, b	x, y	Проверка
(5,4)	(2,1), (1,2)	2,1	совпало
(1,7)	(3,0), (1,2)	-1,4	совпало
(0,3)	(1,1), (1, -1)	1,1	не совпало

Сравнение показывает, что разложение считается верным только тогда, когда после подстановки и сложения получается исходный вектор.

Совпадение координат подтверждает ответ, а несовпадение сразу указывает на ошибку в вычислениях или знаках.

Учебные примеры по теме разложения вектора по двум неколлинеарным векторам



Как коэффициенты влияют на результат

■ вдоль a ■ вдоль b (+) ■ вдоль b (-)

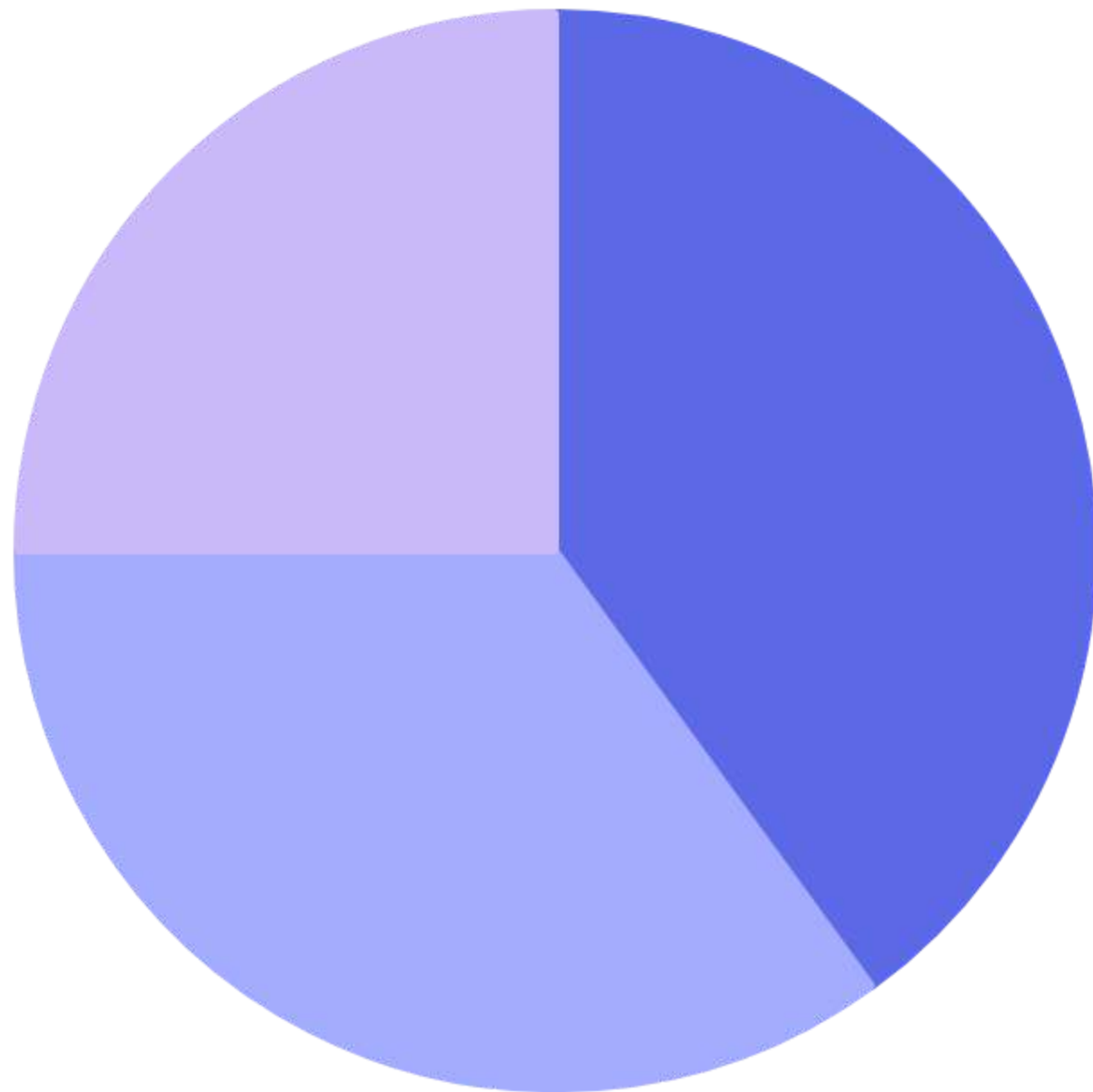
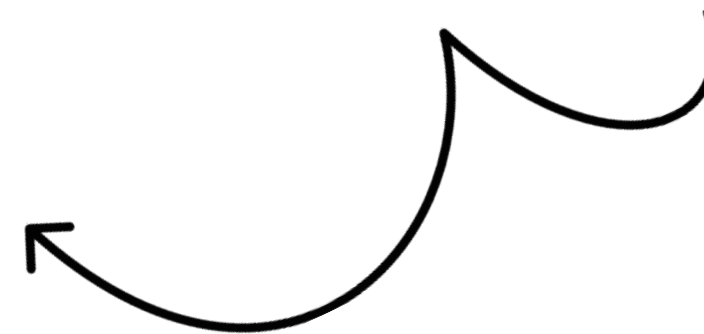


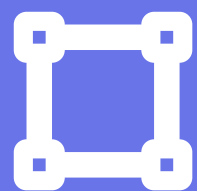
Диаграмма показывает, что знак коэффициента меняет направление вклада, а не только его размер.

Итог зависит от сочетания всех частей; без учёта знаков получить правильный вектор невозможно.

Учебная схема по теме разложения вектора по двум неколлинеарным векторам



Связь с правилом параллелограмма



Два вектора из одной точки

Когда оба вектора откладывают из одной точки, их удобно рассматривать вместе. Такое расположение помогает увидеть, как отдельные направления складываются в один общий результат.



Диагональ как сумма

Диагональ параллелограмма показывает сумму двух векторов. По рисунку легко понять, куда направлен итоговый вектор и как меняется его длина при изменении каждого слагаемого.



Проверка по чертежу

На школьном рисунке можно без вычислений проверить, верно ли выбраны знаки коэффициентов. Если построение согласуется с диагональю, разложение выполнено правильно.

Частые ошибки при разложении



Когда два вектора выглядят разными, но на самом деле параллельны

Ученики иногда принимают коллинеарные векторы за два независимых направления. В таком случае разложение не даёт полного описания плоскости, и нужный вектор может вообще не получиться. Ошибка заметна уже на чертеже: оба вектора лежат на одной линии.



Потерянный знак меняет ответ

Если перепутать плюс и минус, итоговый вектор смещается в противоположную сторону. На рисунке это видно сразу: вместо ожидаемой диагонали получается вектор с другим направлением, хотя длина отдельных частей может казаться правильной.

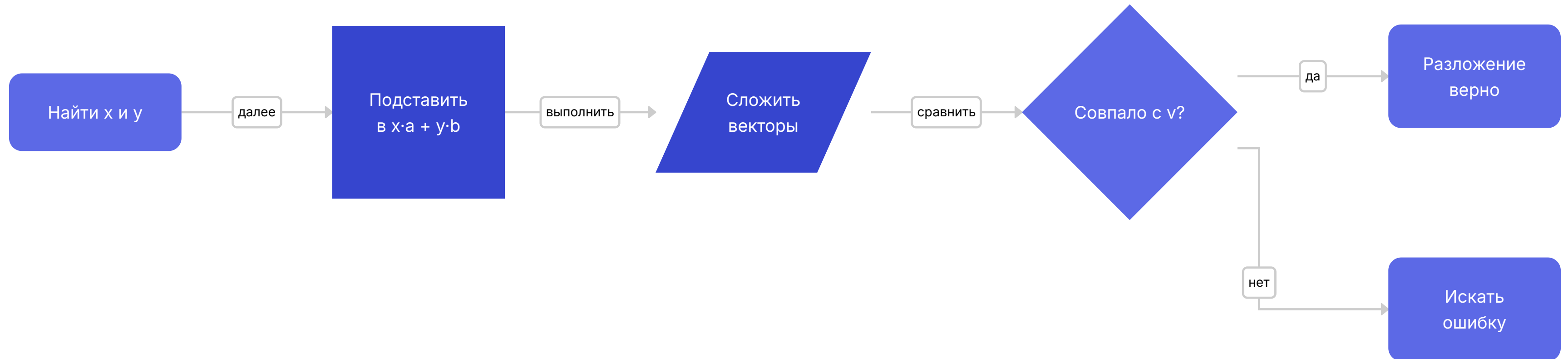


Проверку пропускают слишком рано

Даже верно найденные коэффициенты нужно подставить обратно и сложить векторы. Без проверки легко не заметить арифметическую ошибку. Сравнение с исходным вектором показывает, совпали ли координаты и действительно ли решение завершено.

Проверка правильности найденного разложения

Пошаговая схема проверки через подстановку коэффициентов, сложение векторов и сравнение результата с исходным вектором.

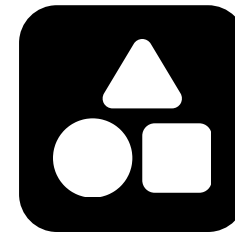


Где используется разложение векторов



Движение по клеткам

Разложение помогает описывать путь на клетчатой бумаге: сначала один шаг по одному направлению, затем другой. Так удобно записывать перемещения и проверять маршрут по чертежу.



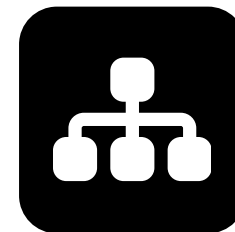
Построение фигур

В задачах на треугольники и параллелограммы разложение показывает, как составлена сторона или диагональ. Это упрощает поиск неизвестных частей фигуры и проверку построения.



Координаты точек

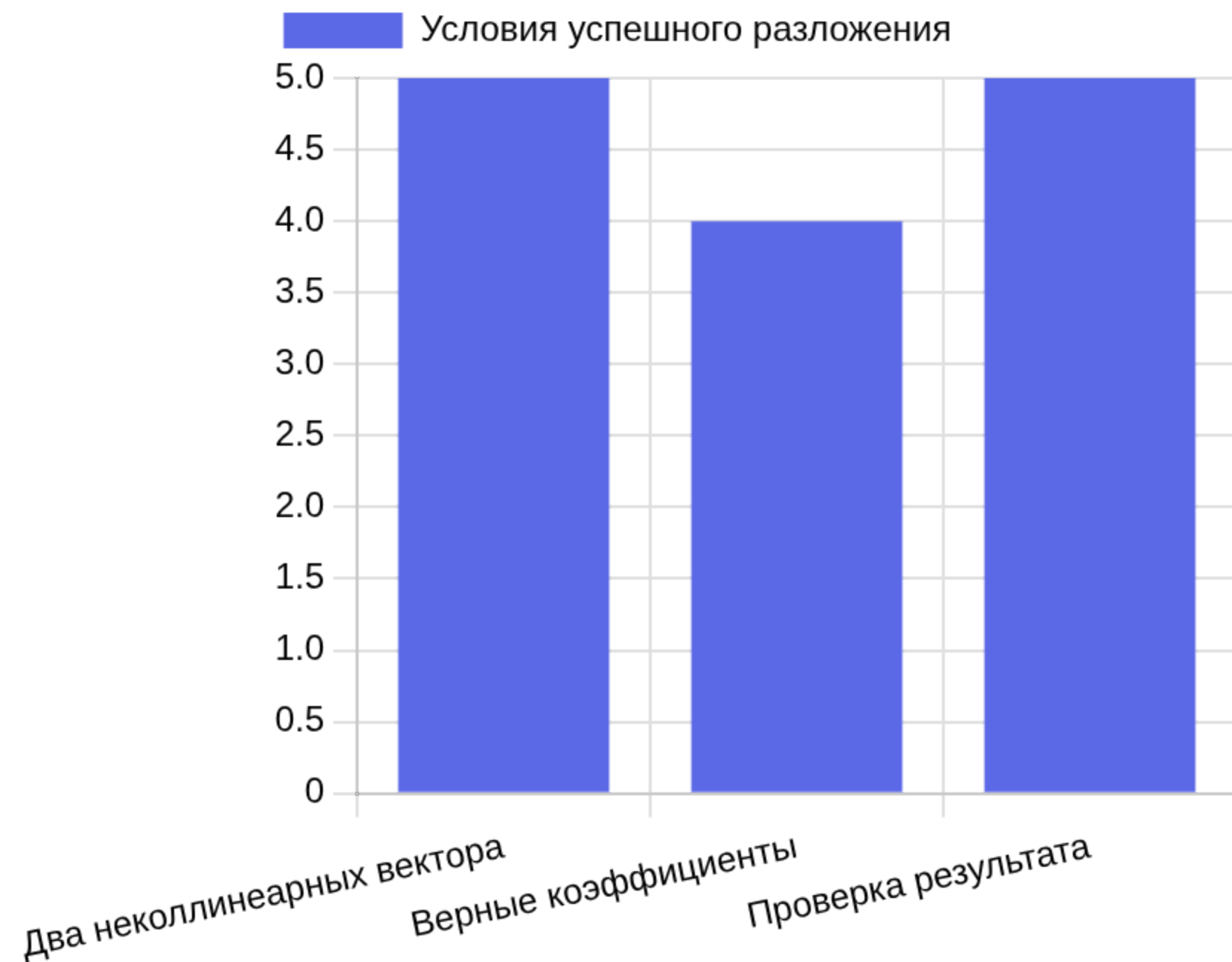
Если точку нужно задать через два направления, разложение вектора помогает найти её положение на плоскости. Такой подход особенно полезен в координатных чертежах.



Основа дальнейших тем

Идея разложения нужна для более сложных задач по координатной геометрии и векторному методу. Она учит связывать рисунок, координаты и алгебраические вычисления.

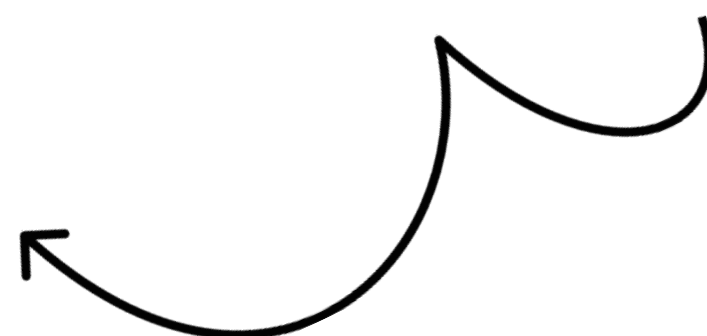
Три условия успешного разложения



Каждое условие важно по-своему: одно делает разложение возможным, другое помогает найти ответ, третье защищает от ошибки.

Лучший результат получается только при выполнении всех трёх шагов; пропуск любого из них снижает надёжность решения.

Учебная схема по теме разложения вектора по двум неколлинеарным векторам



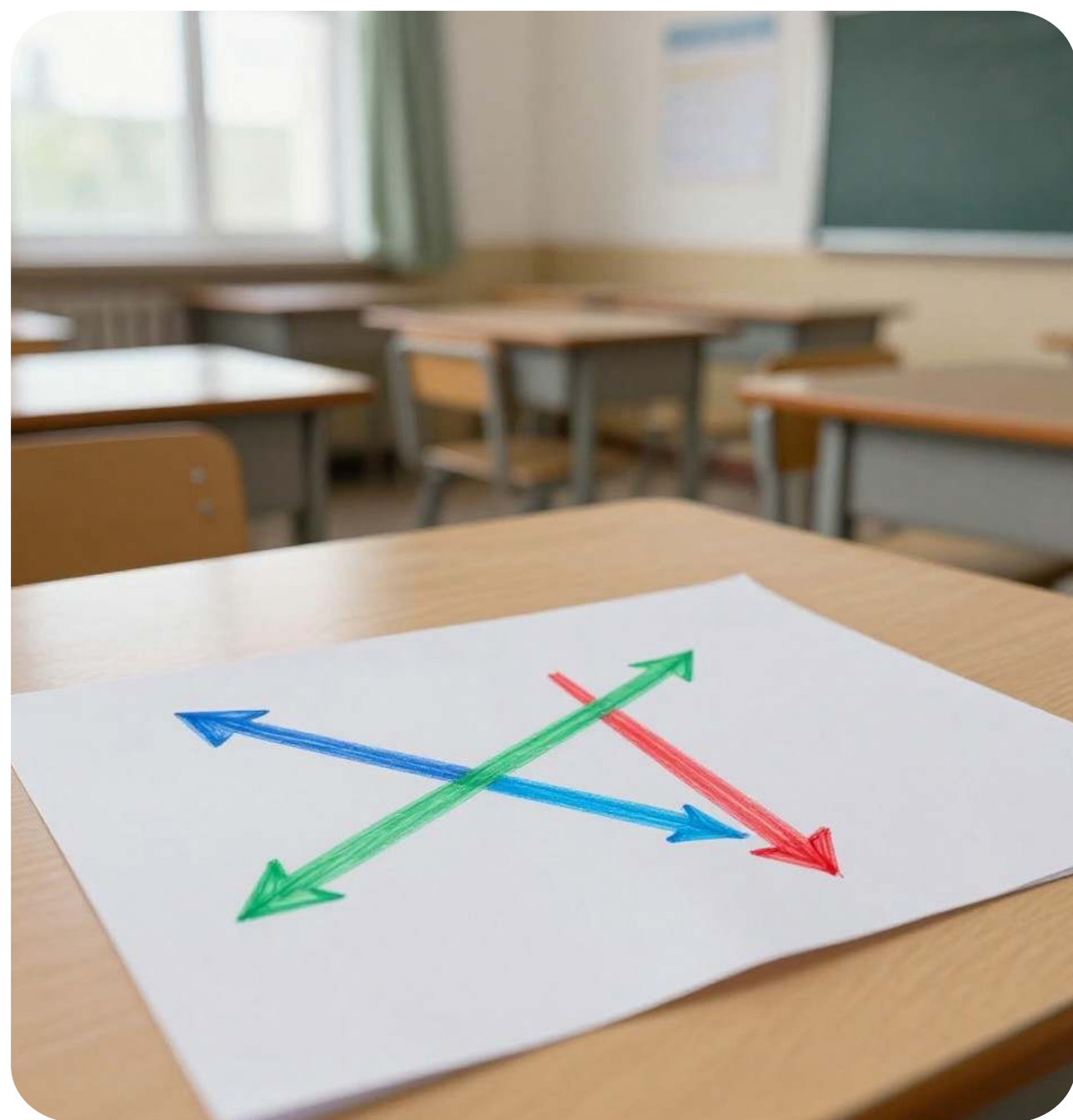
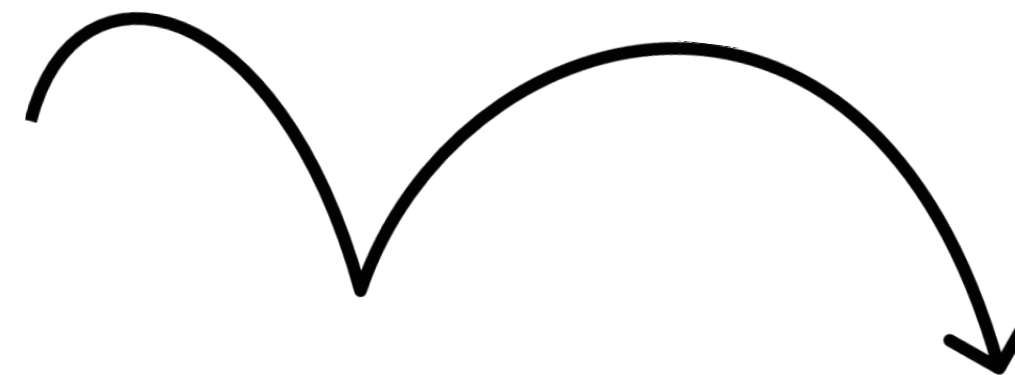
Именно два неколлинеарных вектора
становятся основой формулы $v = x \cdot a + y \cdot b$
и позволяют однозначно описать положение
вектора.



2

независимых направления
задают разложение любого
вектора на плоскости.

Разложение векторов: итог урока



Разложение по двум неколлинеарным векторам помогает точно описывать вектор через направление и длину. Коэффициенты находят по чертежу или координатам, а затем обязательно проверяют сложением.

