

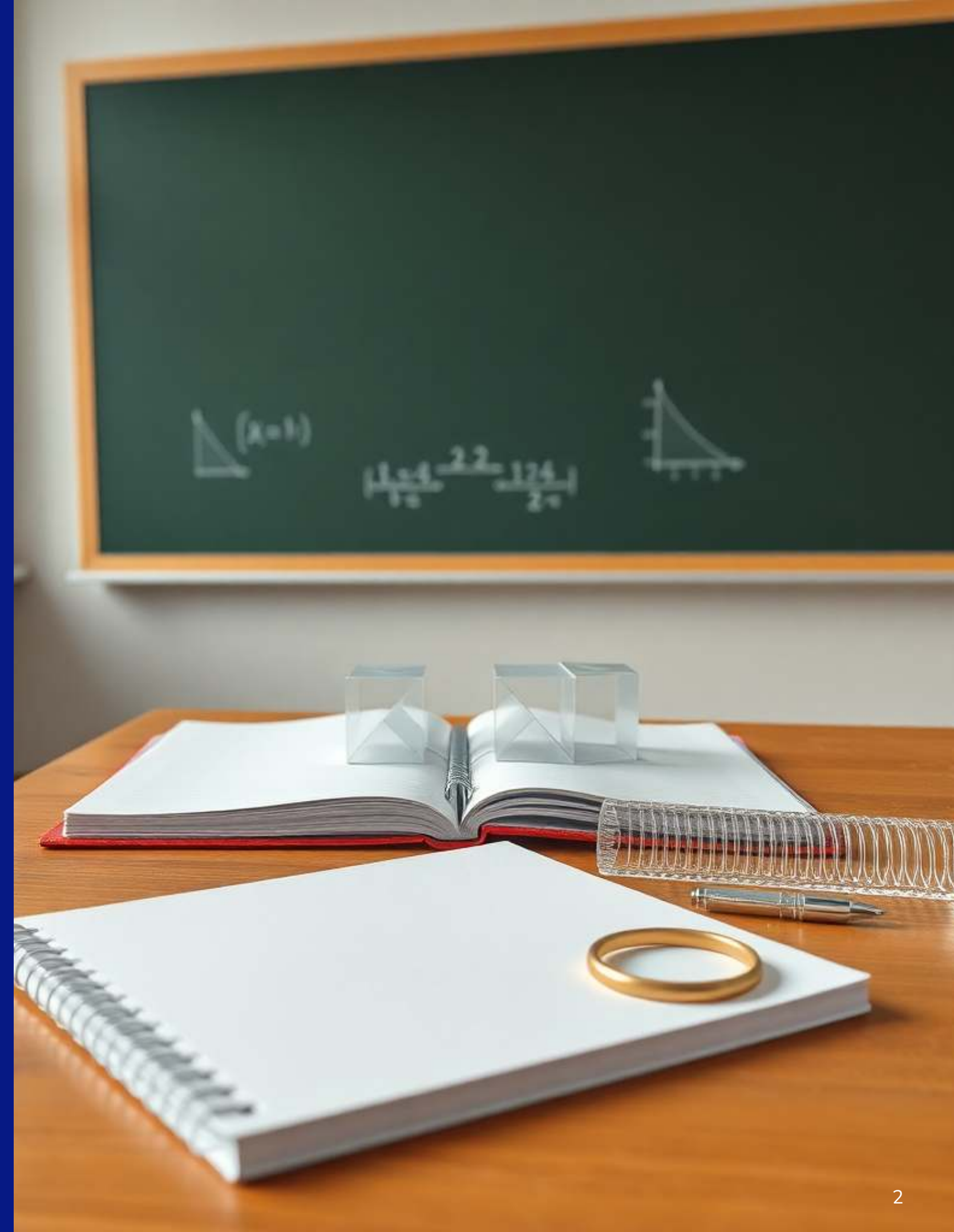
Функции $y = x^m$: виды, свойства и графики



Степенная функция с целым показателем: три случая, разные графики.

Зачем изучать функции $y = x^m$

Функции вида $y = x^m$ помогают понять, как меняется график при разных степенях, сравнивать зависимости и быстро находить свойства функции по формуле и рисунку.



Определение функции $y = x^m$ при целом m

Положительный показатель

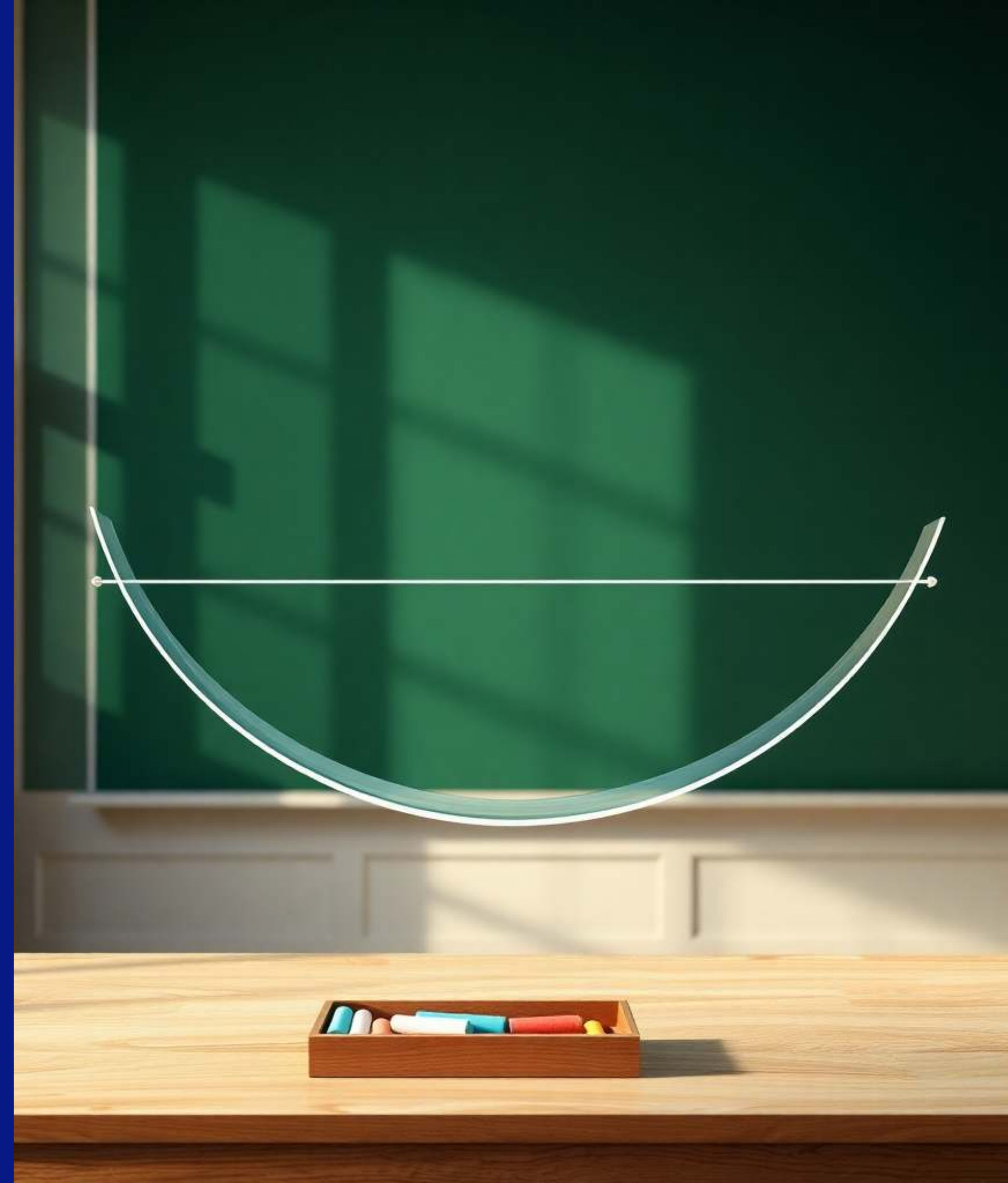
При $m > 0$ число x возводят в степень обычным умножением: x умножается само на себя m раз. Такие значения определены для всех действительных x .

Нулевая степень

При $m = 0$ для любого ненулевого x выполняется равенство $x^0 = 1$. Это означает, что функция становится постоянной, но точка $x = 0$ исключается.

Отрицательный показатель

При $m < 0$ используют правило $x^m = 1 / x^{|m|}$. Поэтому ноль нельзя подставлять в формулу, а график имеет разрыв в точке $x = 0$.



Три основных случая для показателя m

Случай	Формула	Определение	Особенность
$m > 0$	$y = x^m$	все x	через $(0; 0)$
$m = 0$	$y = 1$	$x \neq 0$	горизонталь
$m < 0$	$y = 1/x^{ m }$	$x \neq 0$	разрыв в 0

Общее правило степенной функции с целым показателем из школьного курса алгебры

Таблица показывает, как знак показателя влияет на формулу, область определения и поведение графика.

Знак показателя сразу подсказывает, будет ли график проходить через начало координат или иметь разрыв в нуле.

Положительные целые степени и их особенности

1. Степень 1

При $m = 1$ получаем $y = x$. Это самая простая прямая зависимость: график проходит через начало координат и идёт под углом 45 градусов.

2. Чётные степени

При $m = 2, 4, 6$ и других чётных показателях значения функции неотрицательны. График имеет U-образный вид и расположен выше оси Ox , кроме точки $(0; 0)$.

3. Нечётные степени

При $m = 3, 5, 7$ и других нечётных показателях график проходит через I и III четверти. Слева он уходит вниз, а справа — вверх.

4. Влияние роста m

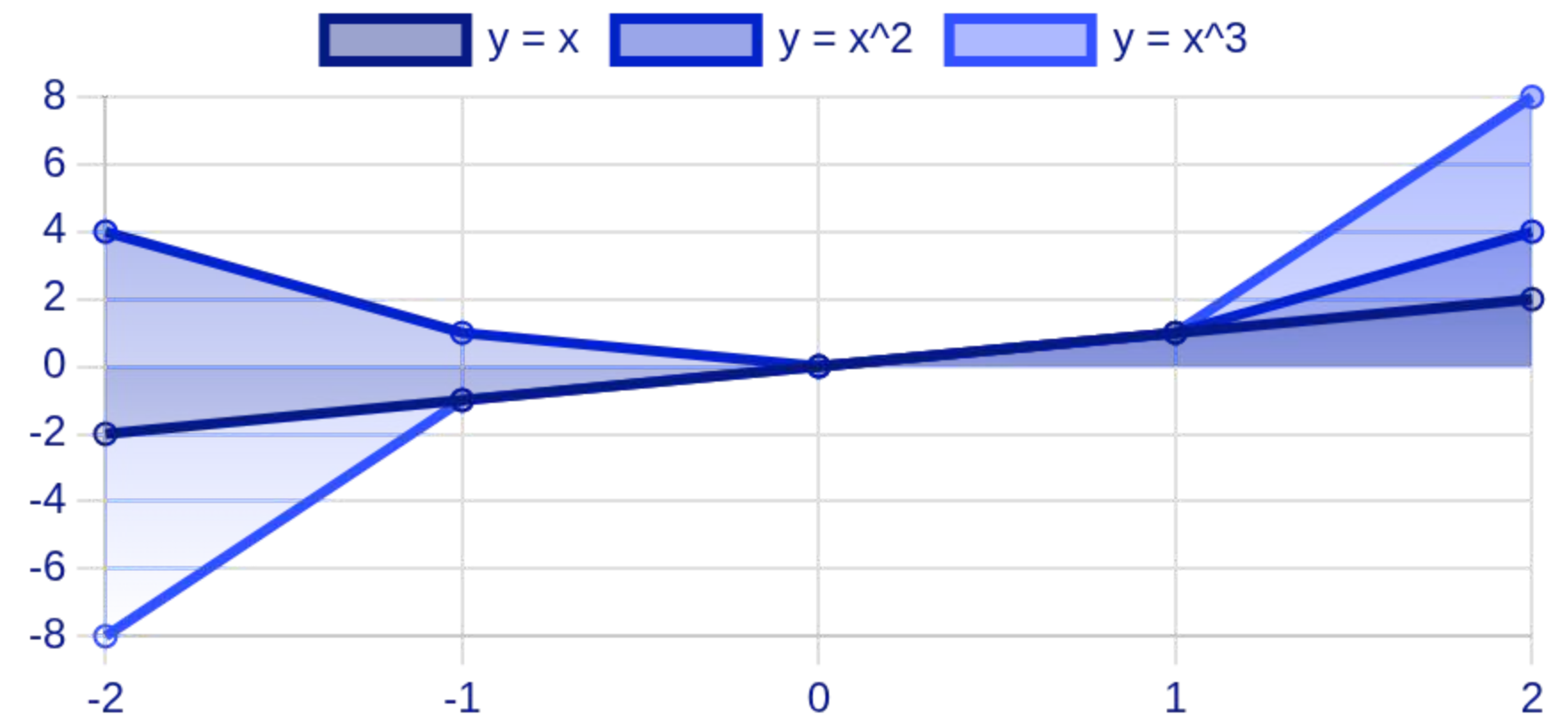
Чем больше положительная степень, тем сильнее график прижимается к оси Ox около нуля. При больших $|x|$ он, наоборот, быстрее поднимается вверх или уходит вниз.



Сравнение графиков $y = x$, $y = x^2$ и $y = x^3$

Все три функции проходят через точку $(0; 0)$, но ведут себя по-разному слева и справа от нуля.

Чётность степени меняет симметрию графика, а рост показателя усиливает различие между положительными и отрицательными x .



Школьные графики функций $y = x$, $y = x^2$ и $y = x^3$



Чётные степени: симметрия относительно оси Oy

Симметрия графика

Если заменить x на $-x$, значение функции не меняется. Поэтому левая и правая части графика совпадают зеркально относительно оси Oy.

Только неотрицательные значения

Для чётных степеней y всегда не меньше нуля. Ноль получается только при $x = 0$, а при остальных значениях аргумента функция положительна.

Как меняется форма

При переходе от x^2 к x^4 и x^6 график у нуля становится более плоским. Зато при больших $|x|$ он возрастает быстрее и круче поднимается вверх.

Визуальный образ

Такие графики легко узнать по плавной чашеобразной форме. Она помогает быстро отличить чётную степень от нечётной даже без точных вычислений.

Нечётные степени: симметрия относительно начала координат

1. Обе стороны графика

Для нечётных степеней при замене x на $-x$ значение функции меняет знак. Поэтому правая часть графика соответствует левой, только повернутой на 180 градусов.

2. Прохождение через начало

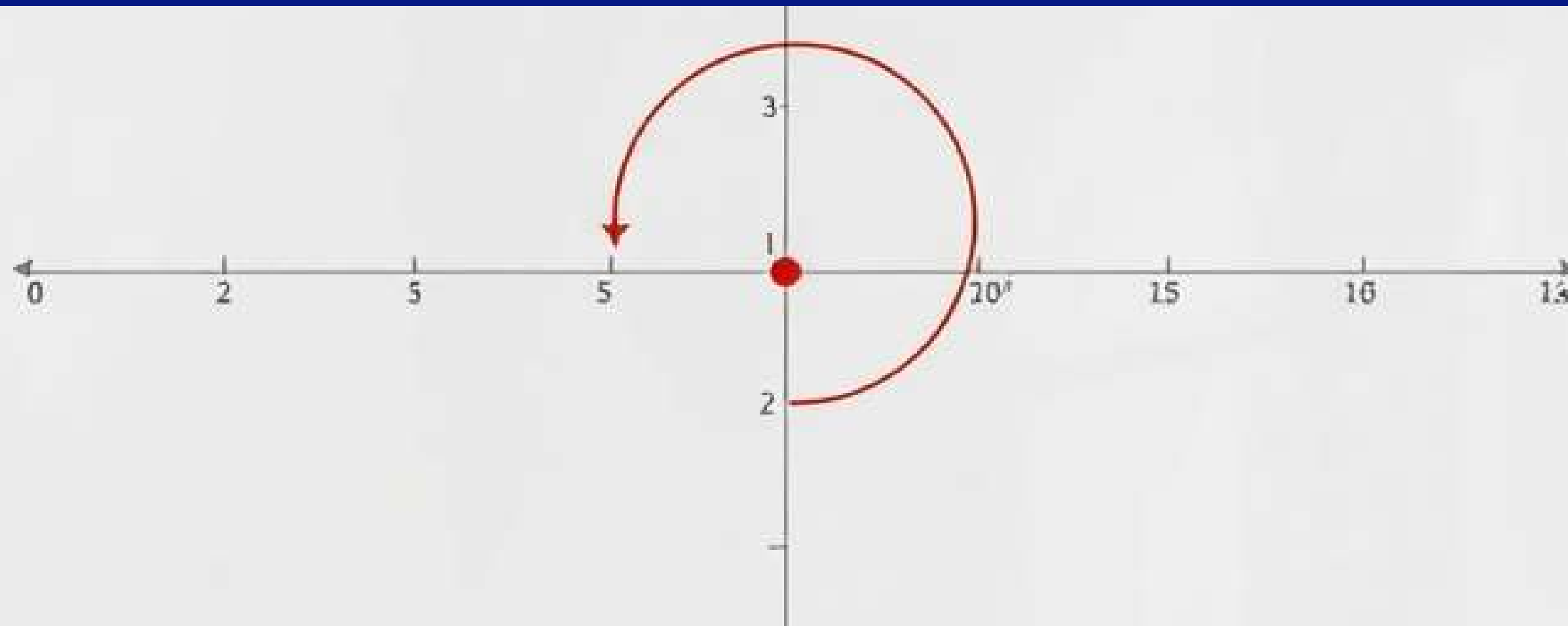
Все графики нечётных степеней проходят через точку $(0; 0)$. Это удобно запоминать: ноль остаётся единственной точкой, где функция меняет знак.

3. Знаки значений

Если x положителен, то и y положителен. Если x отрицателен, то y отрицателен. Так легко определить расположение графика в координатной плоскости.

4. Общий вид

Нечётные степени сохраняют S-образную форму. С увеличением показателя кривая становится более крутой около начала координат, но симметрия остаётся прежней.



1

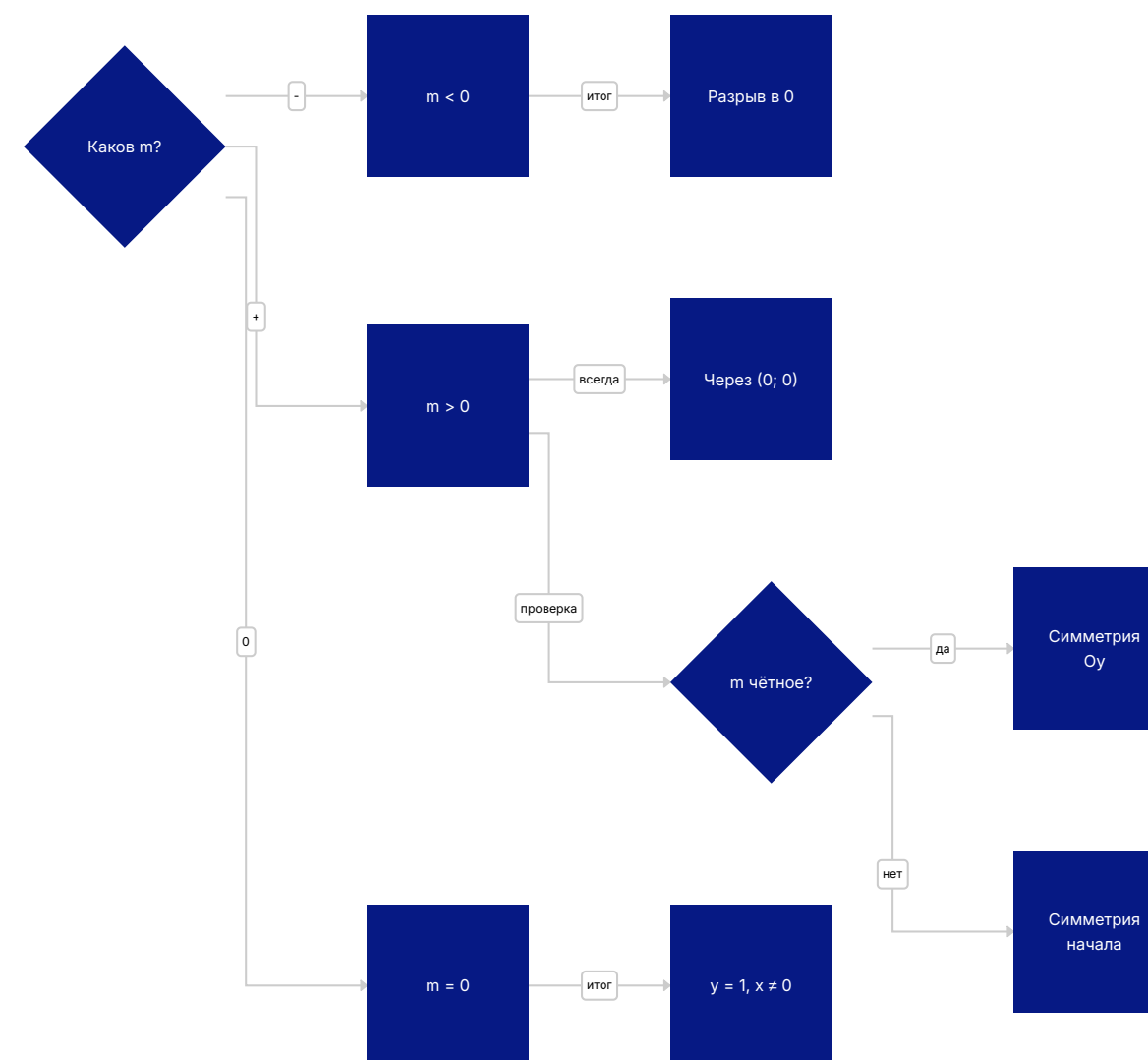
**получается при x^0
для всех $x \neq 0$**

Нулевая степень не задаёт рост или убывание:
значение функции постоянно и равно единице.

Правило степени с нулевым показателем из школьного курса алгебры

Как определить вид графика по показателю m

Последовательность проверки знака показателя, чётности и области определения



Отрицательные степени и обратные зависимости

Запись через дробь

При отрицательном показателе степень можно заменить дробью: $y = 1/x$, $1/x^2$, $1/x^3$ и так далее. Это удобно, потому что сразу видно, как меняется значение функции при изменении x .

Что происходит с ростом x

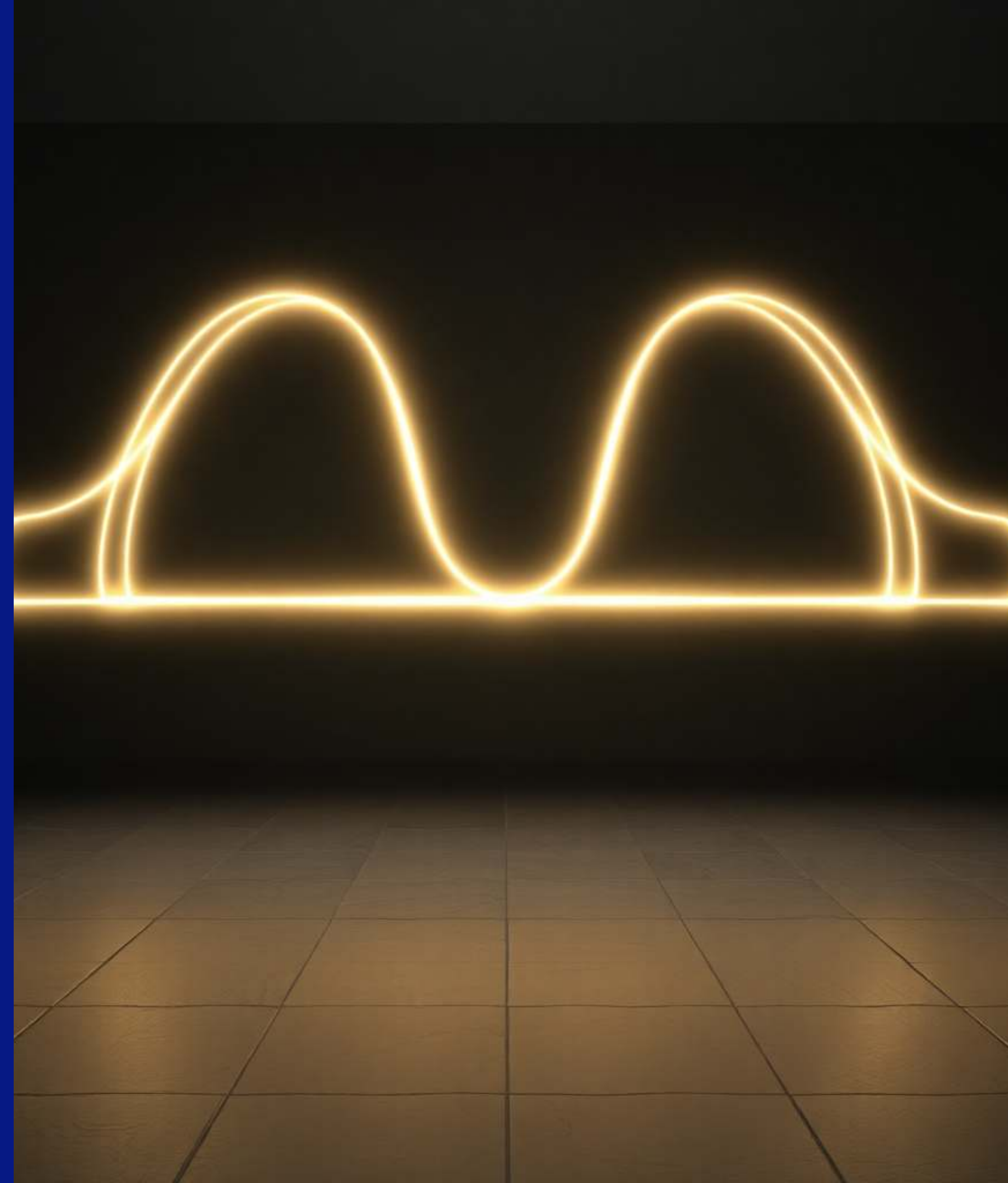
Чем больше модуль числа x , тем меньше значение функции по модулю. График как будто «прижимается» к оси Ox , потому что обратная зависимость становится слабее на больших расстояниях от нуля.

Почему ноль исключён

Точка $x = 0$ не входит в область определения, так как деление на ноль невозможно. Поэтому у функций с отрицательной степенью в нуле всегда есть разрыв, а сама кривая распадается на две части.

Связь с обычными степенями

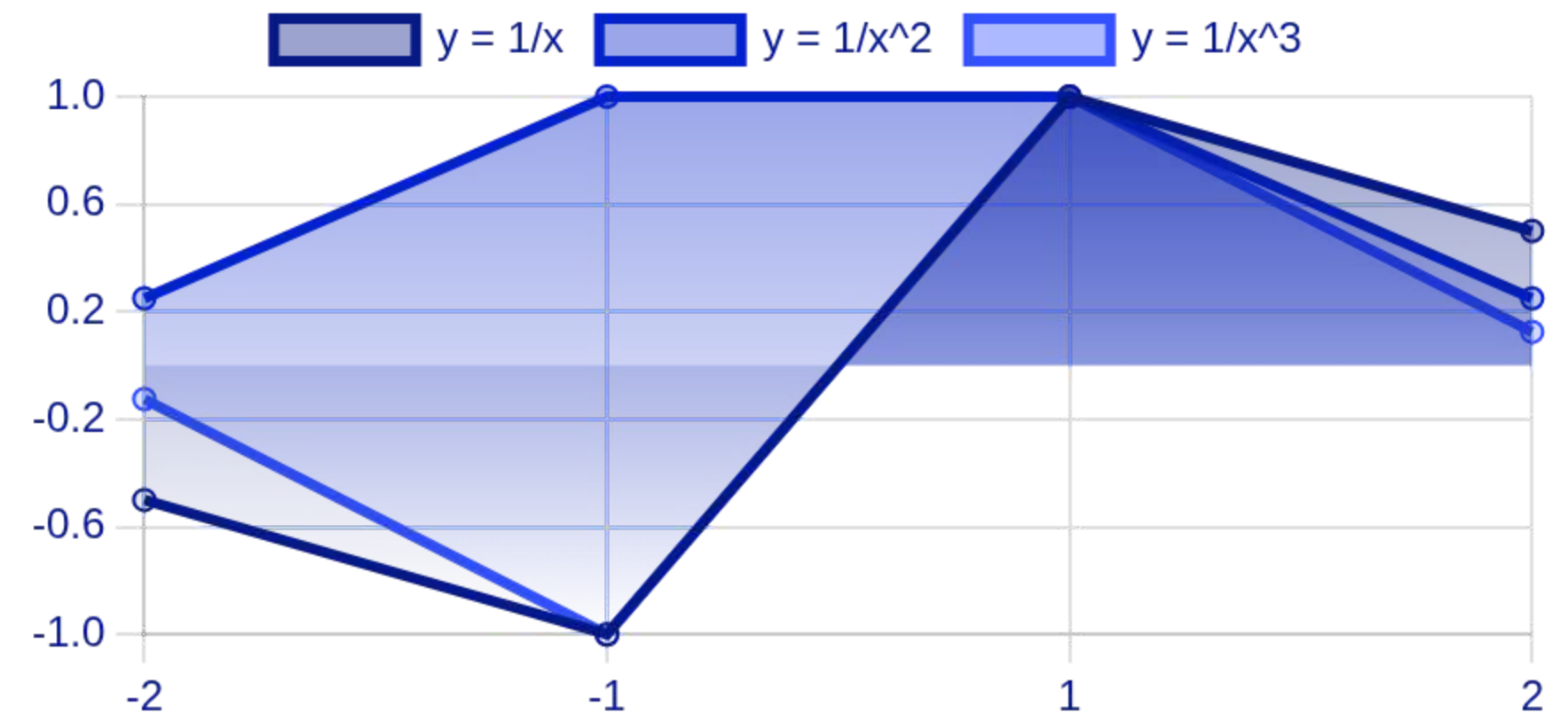
Отрицательная степень показывает противоположное поведение по сравнению с положительной: вместо роста при увеличении x значения уменьшаются. Это помогает быстро отличать такие функции по формуле и по виду графика.



Сравнение графиков $y = 1/x$, $y = 1/x^2$ и $y = 1/x^3$

Все три графика имеют разрыв в нуле, но отличаются расположением ветвей и знаком значений. Особенно заметно различие между чётной и нечётной степенью.

Чётность показателя определяет, где расположены ветви: у чётной степени значения положительны, у нечётной — меняют знак при переходе через ось Oy .



Схематическое сравнение по свойствам функций $y = x^m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Область определения и область значений

1. Положительные степени

Если показатель положительный, функция определена при любом действительном x . Область значений зависит от чётности: при чётных степенях получаются только неотрицательные числа, а при нечётных — все действительные.

2. Нулевая степень

При $m = 0$ функция принимает постоянное значение 1 для всех x , кроме нуля. Поэтому область определения состоит из всех действительных чисел, кроме $x = 0$, а область значений — одно число 1.

3. Отрицательные чётные степени

Если показатель отрицательный и чётный, нуль тоже исключается из области определения. Значения функции всегда положительны, поэтому область значений состоит из всех чисел, больших нуля.

4. Отрицательные нечётные степени

Для отрицательных нечётных степеней область определения также не содержит ноль, но значения могут быть любыми ненулевыми действительными числами. Знак функции зависит от знака x , как и у нечётных положительных степеней.

Свойства функций $y = x^m$ на примерах

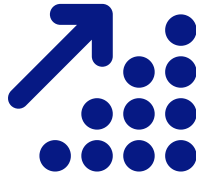
m	D(f)	Свойства
2	$\mathbb{R}$	чётная; $y \geq 0$
3	$\mathbb{R}$	нечётная; $y \in \mathbb{R}$
-2	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	чётная; $y > 0$
-1	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	нечётная; $y \neq 0$

Свойства степенных функций при целых показателях.

Сравнение показывает, как знак и чётность показателя меняют область определения, значения и внешний вид графика.

Положительные степени отличаются наличием точки $(0; 0)$, а отрицательные — разрывом в нуле и асимптотами. Чётность определяет симметрию графика и знак значений.

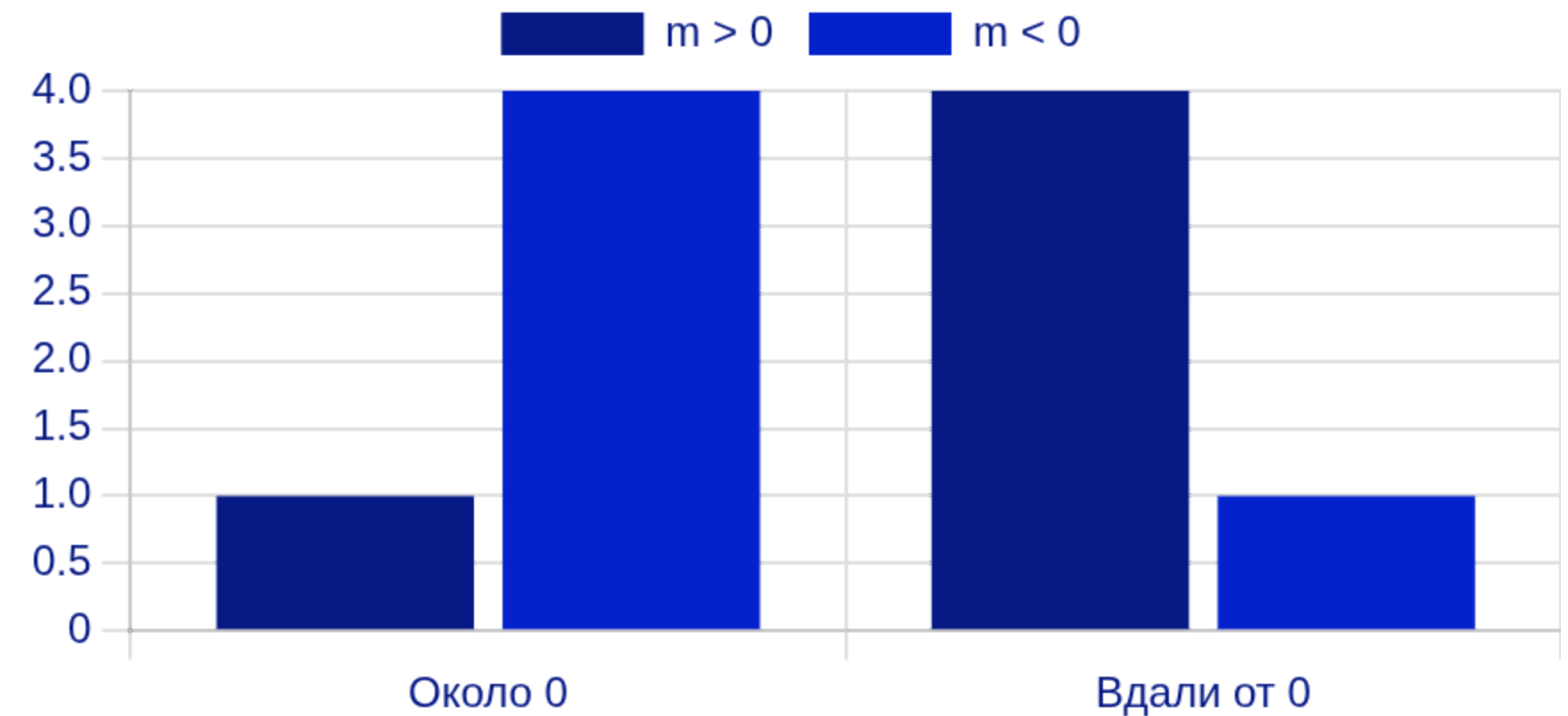
Асимптоты графиков при отрицательных степенях

	Приближение к осям Графики функций с отрицательной степенью могут бесконечно близко подходить к осям координат, но не пересекают их в обычных точках. Это и есть поведение около асимптот.
	Около нуля Когда x стремится к нулю, модуль значения функции быстро растёт. На рисунке это выглядит как резкий подъём ветвей, который особенно заметен у $y = 1/x$ и $y = 1/x^2$.
	Вдали от нуля При большом x значение функции становится всё меньше по модулю и стремится к нулю. Поэтому ветви графика постепенно «распластываются» вдоль оси Ox, не касаясь её.
	Разрыв в нуле Точка $x = 0$ исключена из области определения, потому что деление на ноль невозможно. Из-за этого у таких функций всегда есть две отдельные ветви по разные стороны от нуля.

Поведение функций около нуля и на больших значениях x

Диаграмма показывает противоположность двух типов степенных функций: положительные степени «слабеют» у нуля, а отрицательные, наоборот, резко возрастают.

Если показатель положительный, значение у нуля мало, а вдали от нуля больше. При отрицательном показателе картина меняется на обратную.



Схематическое сравнение по свойствам функций $y = x^m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Как по виду графика распознать показатель степени

Парабола подсказывает чётность

Если кривая похожа на чашу и её ветви направлены вверх, перед нами обычно чётная положительная степень. Такой график симметричен относительно оси Oy и имеет минимум в начале координат или рядом с ним.

S-образная линия ведёт через ноль

График, похожий на плавную S-линию, чаще всего соответствует нечётной положительной степени. Он проходит через точку $(0; 0)$, а его левая и правая части ведут себя по-разному, но сохраняют симметрию относительно начала координат.

Две ветви выдают отрицательный показатель

Если у графика две отдельные ветви и заметны асимптоты, показатель степени отрицательный. Ветви приближаются к осям координат, но не пересекают их, поэтому сразу видно разрыв в нуле.

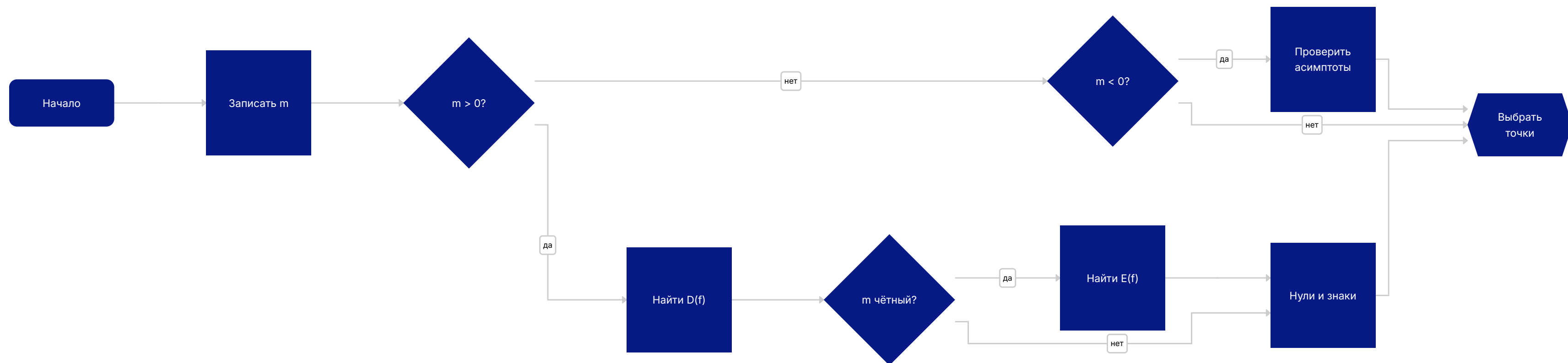
Горизонтальная прямая как особый случай

Когда на рисунке видна прямая $y = 1$, это означает нулевую степень. Такая функция не растёт и не убывает, а сохраняет одно и то же значение для всех x , кроме нуля.



Алгоритм исследования функции $y = x^m$

Последовательность шагов для анализа формулы и построения графика.



Характерные точки для построения графиков

x	x^2	x^3
-2	4	-8
-1	1	-1
1	1	1
2	4	8

Значения степенных функций, вычисленные по формуле.

Несколько опорных точек помогают быстро увидеть симметрию, знак значений и наличие разрыва в нуле.

По точкам легко сравнить чётные и нечётные степени: у чётных значения совпадают для $\pm x$, у нечётных меняют знак. Это упрощает построение графика.

Главные выводы о функциях $y = x^m$

Целые степени объединяют разные по виду, но понятные функции.
Если помнить знак показателя, его чётность и область определения,
график можно узнать быстро и без ошибок.