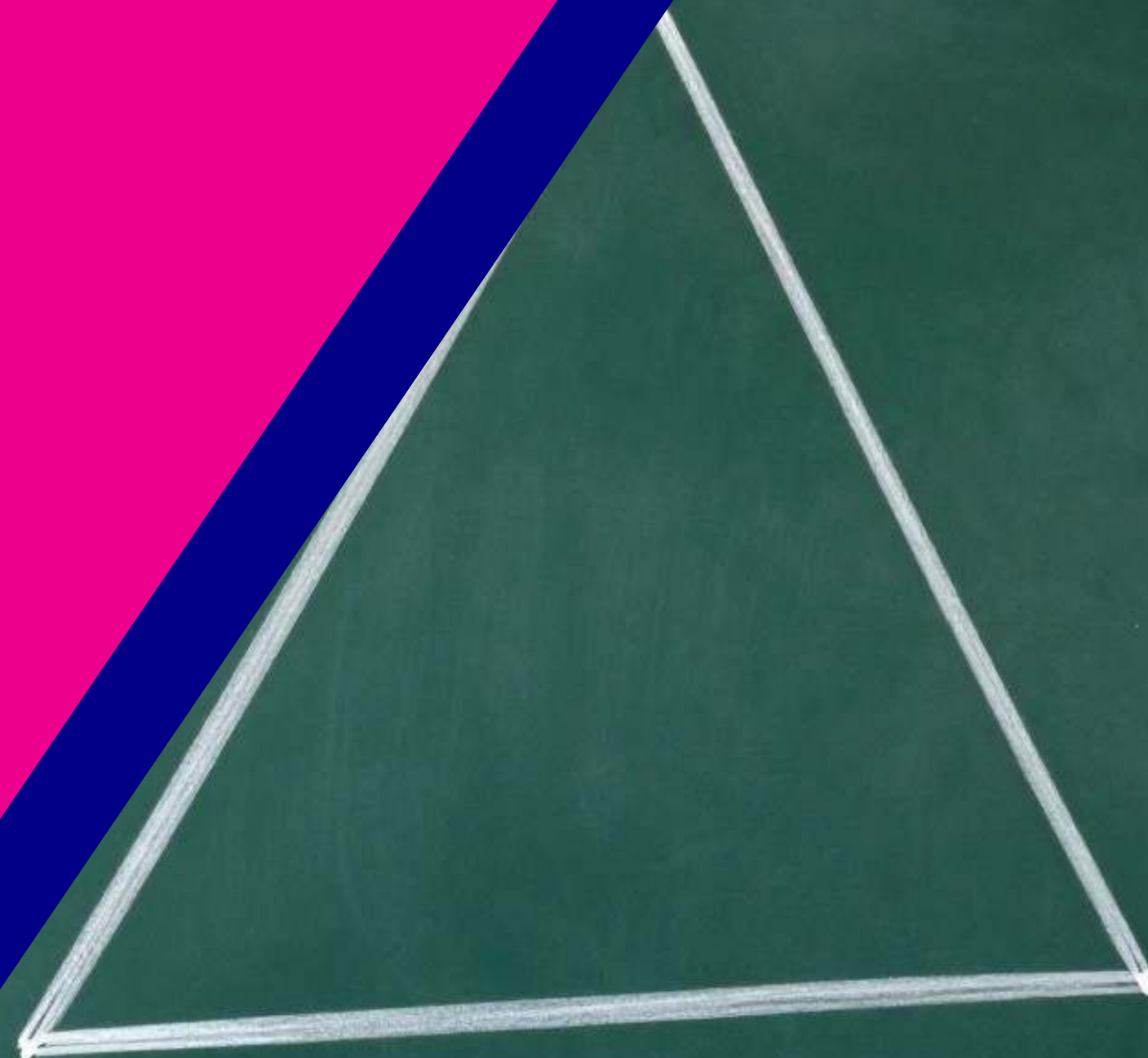


Неравенства в треугольнике через касание

Касание превращает геометрию
в точные числовые связи.





Касание как язык неравенств

В треугольнике многие соотношения можно увидеть через окружности: касательные, радиусы и точки касания быстро переводят чертёж в понятные сравнения длин.

Что такое неравенства в треугольнике

О чём речь

Неравенства в треугольнике описывают, как связаны его стороны, высоты, радиусы и отрезки на сторонах. Они помогают понять, какие длины возможны, а какие — нет.

Главное правило

Самое известное правило говорит, что каждая сторона меньше суммы двух других. Эти записи называют неравенствами треугольника и используют как основу многих задач.

Почему помогает касание

Если в задаче есть окружность, касательная или точка касания, связи между отрезками становятся особенно наглядными. Тогда нужные неравенства часто получаются почти сразу.

Мини-разминка: стандартные неравенства

1

Первое правило

Сначала вспоминаем базовый факт: в любом треугольнике сумма длин двух сторон больше длины третьей. Это обязательное условие существования треугольника.

2

Три записи

Для сторон a , b , c записывают три неравенства: $a+b>c$, $a+c>b$, $b+c>a$. Они равноправны и означают одно и то же свойство.

3

Зачем они нужны

Если хотя бы одно из них нарушается, треугольник построить нельзя. Поэтому эти неравенства служат проверкой правильности данных в задаче.

Инструмент 1: равные касательные

Главный факт

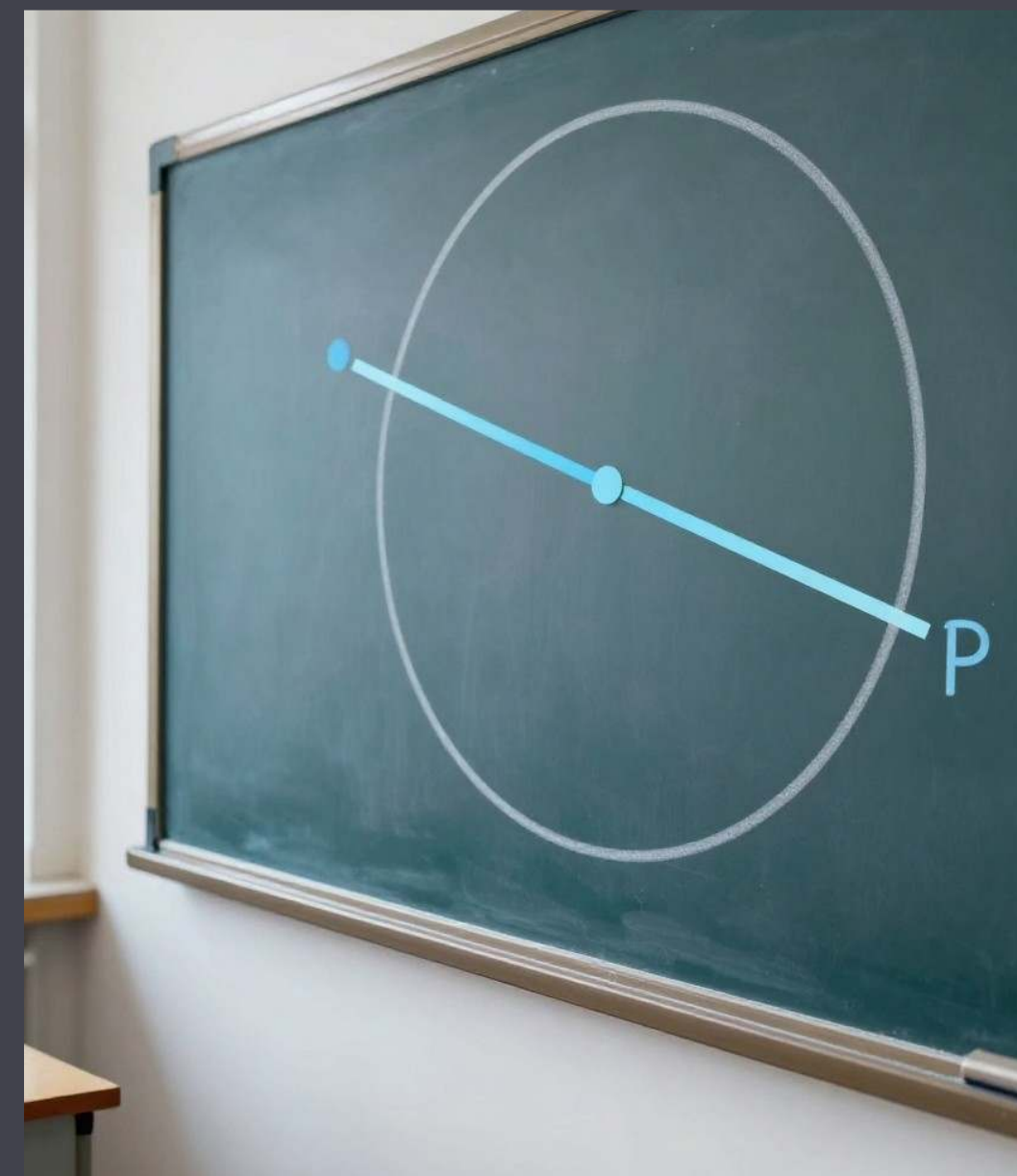
Из одной точки вне окружности можно провести две касательные. Их участки от этой точки до точек касания оказываются равными, и это очень удобно в задачах.

Почему это верно

Пусть точка P касается окружности в A и B . Тогда $PA=PB$, потому что радиусы OA и OB равны, а треугольники OAP и OBP прямоугольные.

Польза для задач

Равные касательные превращают неизвестные отрезки в одинаковые величины. Поэтому геометрический рисунок сразу даёт готовое сравнение длин без длинных вычислений.



Инструмент 2: касание окружностей

1

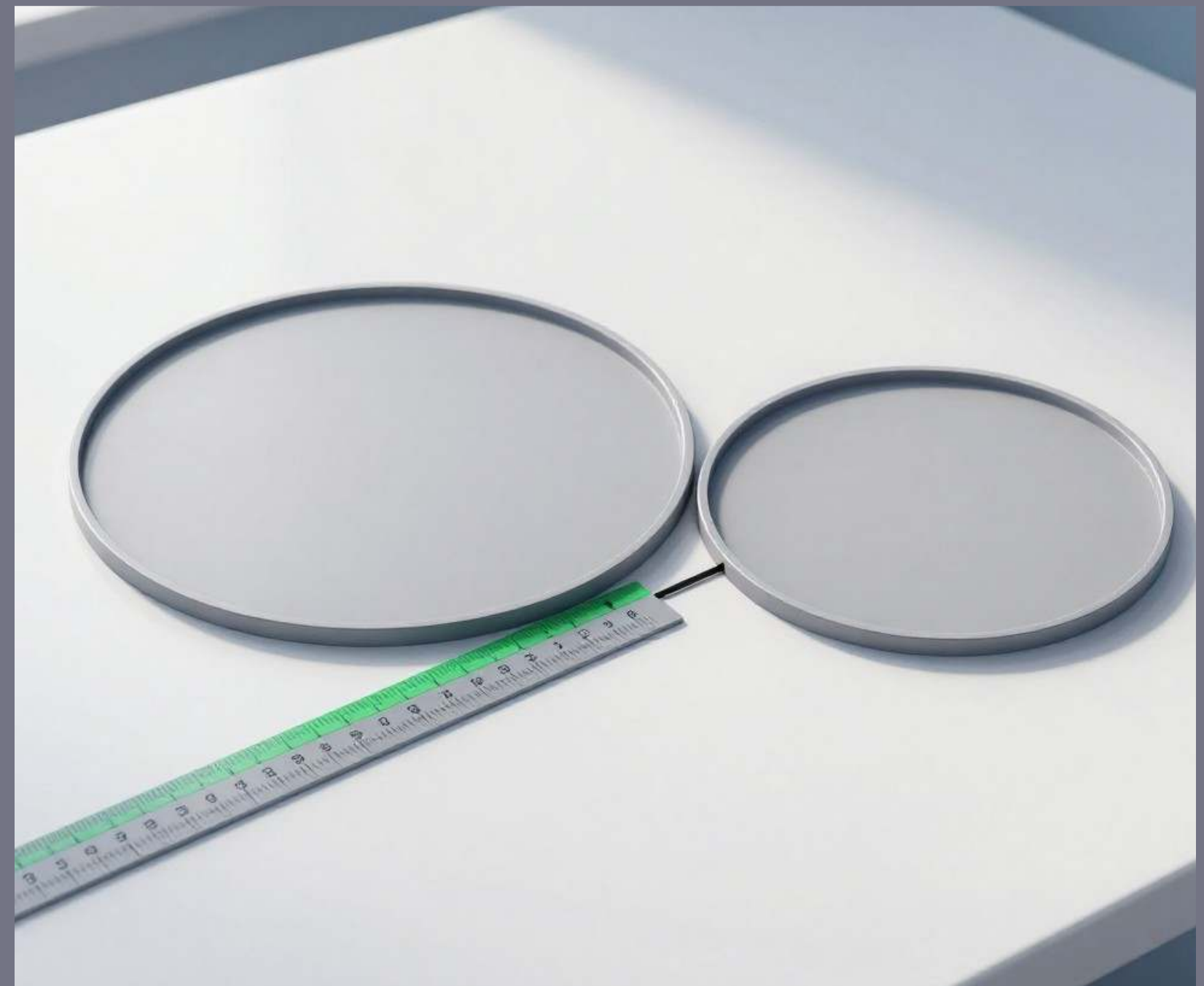
Внешнее касание

Если две окружности касаются внешним образом, расстояние между их центрами равно сумме радиусов. Окружности как будто стоят рядом и «складывают» свои размеры.

2

Внутреннее касание

При внутреннем касании расстояние между центрами равно разности радиусов. Меньшая окружность находится внутри большей, поэтому между центрами работает именно вычитание.



Вписанная окружность и точки касания

Одинаковое расстояние

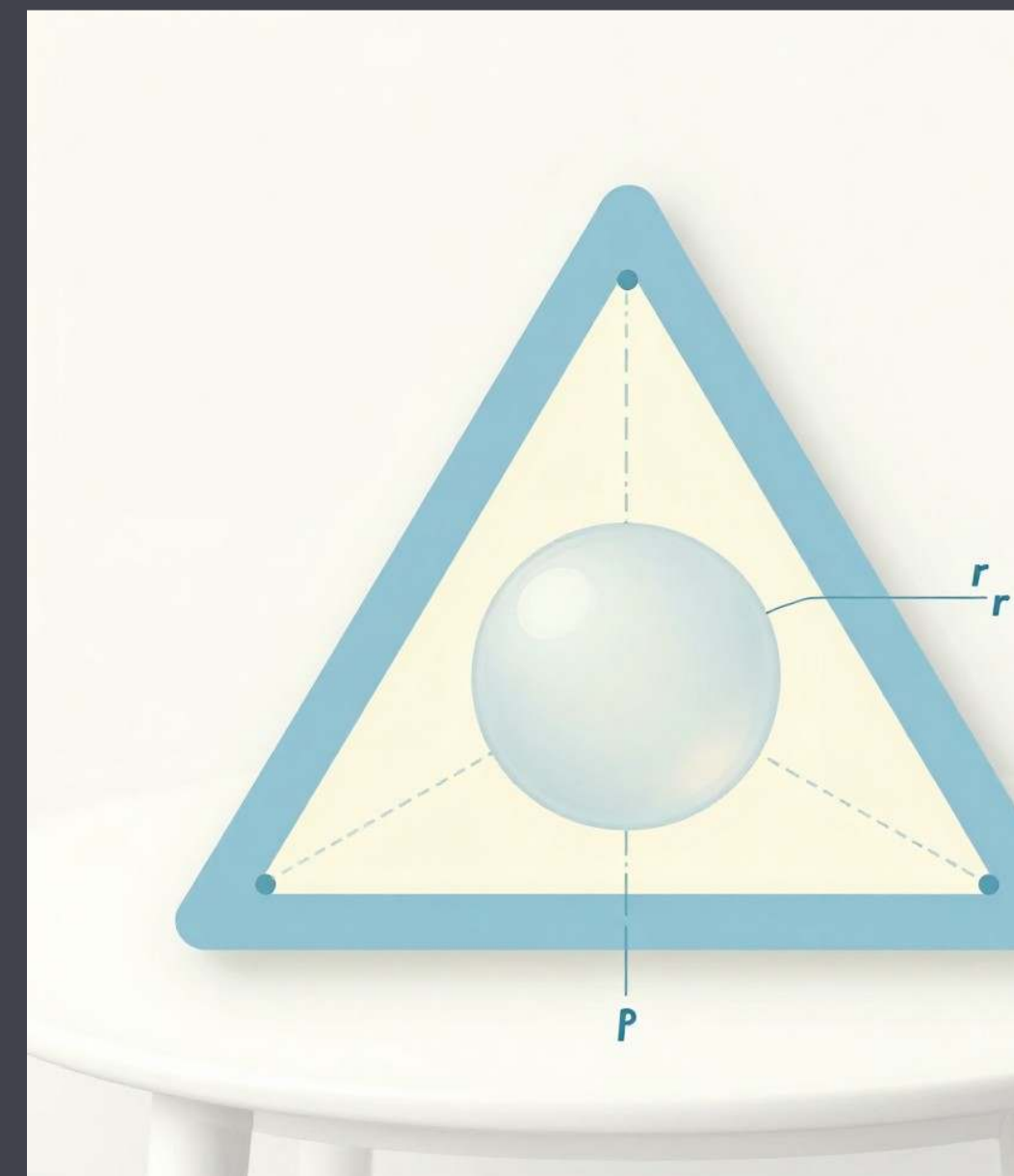
Вписанная окружность касается всех трёх сторон треугольника. Это означает, что от центра окружности до каждой стороны проведён один и тот же перпендикуляр, равный r .

Где находится центр

Центр вписанной окружности лежит на биссектрисах углов треугольника. Поэтому его положение определяется не сторонами по отдельности, а углами фигуры.

Зачем нужны точки касания

Точки касания делят стороны на удобные части, которые потом можно обозначать буквами и складывать. Именно так касание помогает получать формулы для сторон и площади.



Точки касания и отрезки x, y, z

1

Как вводят обозначения

Обозначим отрезки от вершин до точек касания через x, y и z . Тогда на каждой стороне появляются два таких отрезка, которые вместе дают всю сторону.

2

Связь с полупериметром

Из свойств касательных получаем равенства $x=s-a, y=s-b, z=s-c$, где s — полупериметр. Это связывает точки касания с длинами сторон.

3

Почему они положительны

Так как каждая сторона треугольника меньше суммы двух других, все три выражения положительны. Значит, $x>0, y>0$ и $z>0$.

Главное неравенство через x, y, z

1

Разложение сторон

Сторона a состоит из двух частей: $y+z$. Аналогично, $b=z+x$, а $c=x+y$. Это уже показывает, что каждая сторона собрана из положительных отрезков.

2

Получаем неравенства

Если x, y, z положительны, то $y+z$ меньше суммы двух остальных сторон, а значит $a < b+c$. Точно так же получаем $b < a+c$ и $c < a+b$.

3

Идея метода

Так касание окружности даёт стандартные неравенства треугольника почти без алгебры. Достаточно увидеть, как стороны складываются из отрезков касания.

2

положительных отрезка образуют каждую сторону треугольника в этой модели.

Разбиение стороны на положительные отрезки сразу даёт сравнения длин без сложных вычислений.

Из равенств $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$ при $x, y, z > 0$.

Что показывает формула площади

Треугольник, разбитый на три части

Вписанная окружность делит треугольник на три части с одинаковой высотой — это радиус r . Поэтому площади маленьких треугольников складываются особенно удобно, а вся фигура читается как аккуратная сумма отрезков и высот.



Одна высота для трёх площадей

Если из центра провести радиусы к сторонам, каждый из них перпендикулярен стороне в точке касания. На схеме сразу видно, что у всех трёх маленьких треугольников одна и та же высота.



Короткая формула площади

Полупериметр s собирает половины сторон, а формула $\Delta = r \cdot s$ соединяет площадь с касанием. В ней геометрия превращается в короткую числовую запись, которую легко использовать в задачах.

a short area formula



Оценка радиуса через высоты

1

Сравниваем с высотой

Высота опускается перпендикулярно к стороне и всегда длиннее расстояния от центра вписанной окружности до этой стороны. Поэтому радиус r не может превосходить ни одну из высот треугольника.

2

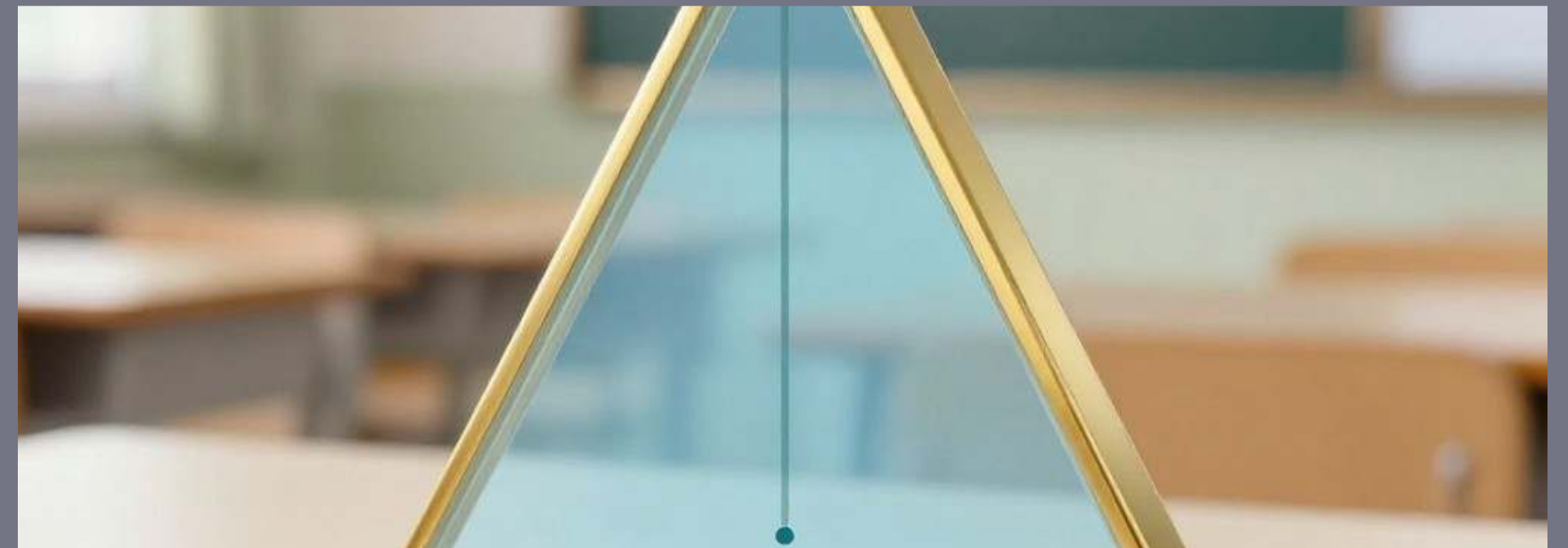
Оценка через одну сторону

Если известны площадь Δ и сторона a , то высота к этой стороне равна $h_a = 2\Delta/a$. Значит, радиус можно быстро оценить сверху через ту же сторону.

3

Три одинаковые проверки

Та же идея работает и для остальных сторон: $r \leq h_b$ и $r \leq h_c$. Так задача сводится к простому сравнению длин без лишних преобразований и громоздких вычислений.



2

даёт оценку радиуса через сторону и площадь.

Формула даёт быстрый верхний предел радиуса через площадь, сторону и полупериметр. Она особенно удобна, когда нужно проверить ответ без длинных вычислений.

Формулы $\Delta = r \cdot s$ и $\Delta \leq ab/2$

Внешняя окружность и её радиус

Окружность снаружи

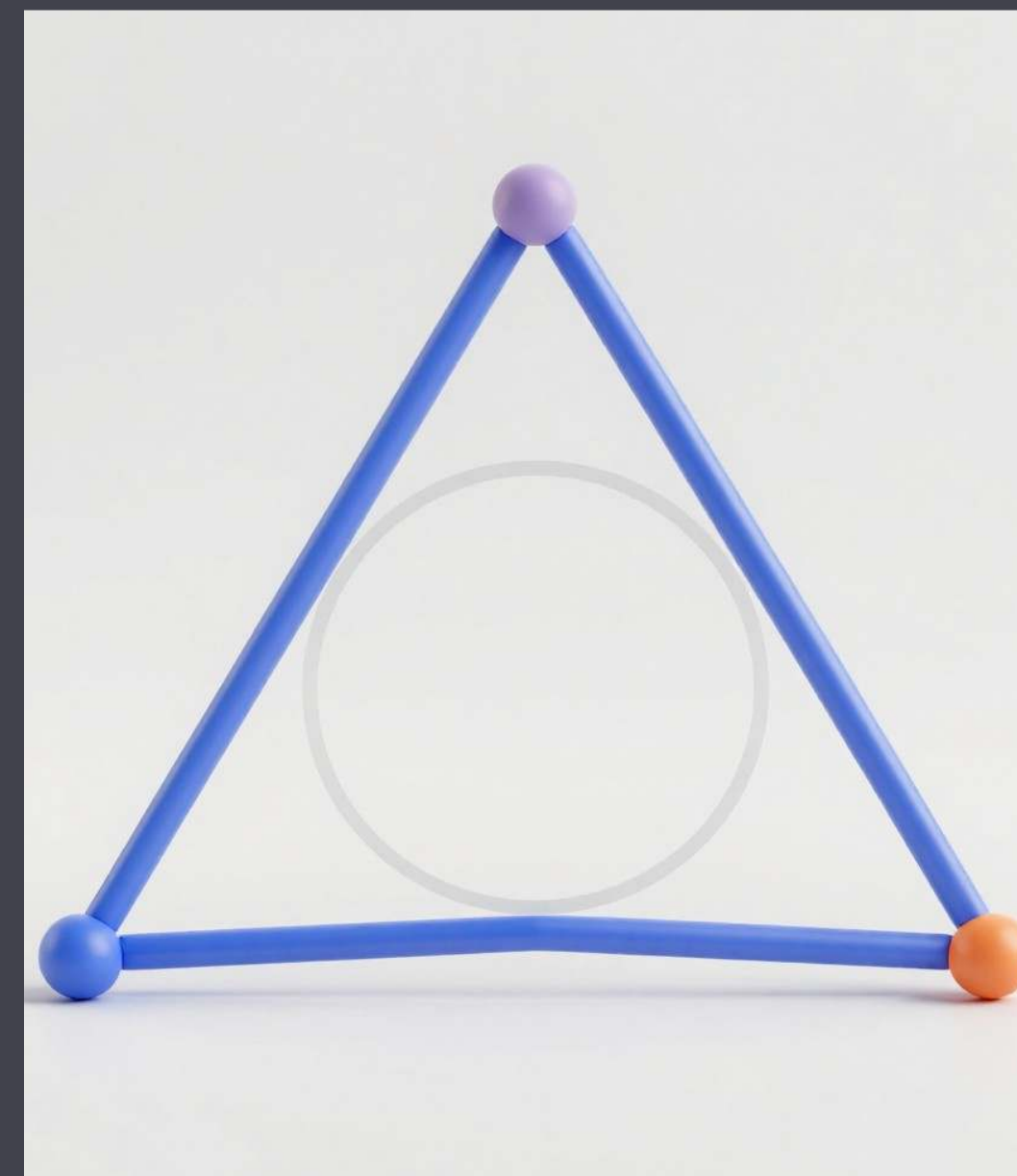
Внешняя касательная окружность касается продолжений сторон, а не самих сторон треугольника. Из-за этого её центр оказывается вне фигуры, но связь с площадью сохраняется.

Формула для каждого случая

Для окружности напротив стороны a радиус выражается формулой $r_a = \Delta / (s - a)$. Аналогично строятся r_b и r_c , если выбрать другую сторону напротив касания.

Почему радиус больше

Чем меньше выражение в знаменателе, тем больше радиус. Поэтому внешняя окружность обычно заметно крупнее вписанной и по-другому показывает связь сторон с площадью.



Сравнение радиусов r , r_a , r_b , r_c

1

Сравнение знаменателей

У вписанной окружности радиус равен $r = \Delta/s$, а у внешней — $r_a = \Delta/(s-a)$. Так как $s-a$ меньше s , знаменатель становится меньше, а радиус — больше.

2

Три внешних радиуса

Точно так же получают $r_b = \Delta/(s-b)$ и $r_c = \Delta/(s-c)$. Все три внешних радиуса не меньше r , потому что в каждом случае деление идёт на более короткий отрезок.

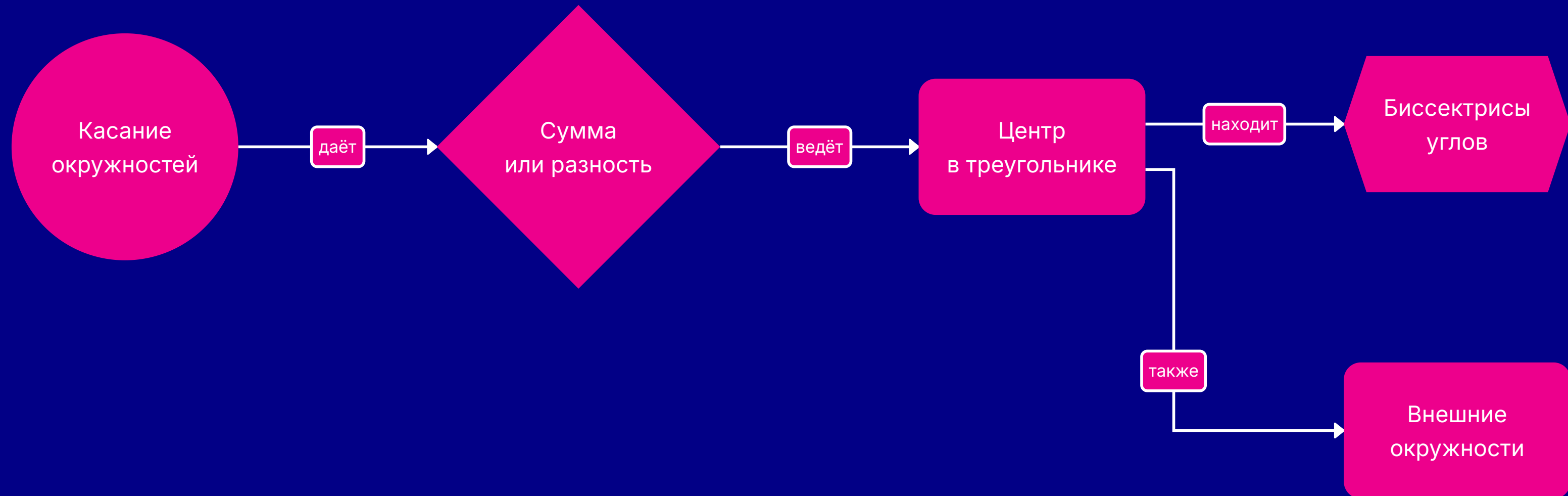
3

Что это значит на практике

Эта разница важна в задачах: одна и та же площадь может соответствовать разным окружностям, но внешние почти всегда дают более крупные численные значения.

Центры, радиусы и биссектрисы

От касания к положениям центров и линиям, которые их задают



Пример 1: найти x, y, z

1

Находим отрезки

Сначала найдём отрезки до точек касания по формуле $x = s - a$, $y = s - b$, $z = s - c$. При $s=12$ получаем $x=5$, $y=4$, $z=3$.

2

Проверяем разложение

Теперь проверим стороны через сумму двух отрезков: $a = y + z = 7$, $b = z + x = 8$, $c = x + y = 9$. Всё совпадает точно.

3

Почему это работает

Поскольку x, y и z положительны, каждая сторона больше любой из своих частей. Поэтому неравенства треугольника выполняются автоматически и становятся очень наглядными.



Пример 2: площадь и радиус

Сразу получаем площадь

Если $r=3$ и $s=10$, то площадь треугольника сразу равна $\Delta = r \cdot s = 30$.
Здесь формула работает без дополнительных построений и длинных выкладок.

Проверяем ограничение

Для стороны $a=8$ верхняя оценка равна $2\Delta/a = 60/8 = 7,5$. Значит, радиус точно не больше этого числа, и проверка проходит быстро.

Ищем согласованность данных

Такие вычисления помогают сверять данные в задаче: если значение радиуса выходит слишком большим, значит, условие противоречит геометрии треугольника.

Мини-практика: верно или неверно

Вопрос	Ответ
Касательные из одной точки	Верно
$x = s - a$ может быть отрицательным	Неверно
При внешнем касании расстояние центров равно разности радиусов	Верно

Ответы показывают, какие факты можно использовать сразу, а какие требуют проверки через формулы. Здесь важно увидеть, как касание превращает геометрию в простые верные утверждения.

Все три пункта опираются на базовые свойства касания и неравенств треугольника.

Свойства касательных и формулы для вписанной и внешней окружностей

Касание превращает рисунок в формулы

Касание делает неравенства в треугольнике понятнее: одинаковые касательные, суммы и разности радиусов, а также отрезки x , y , z сразу связывают рисунок с числами. Именно поэтому геометрия здесь становится очень наглядной.

