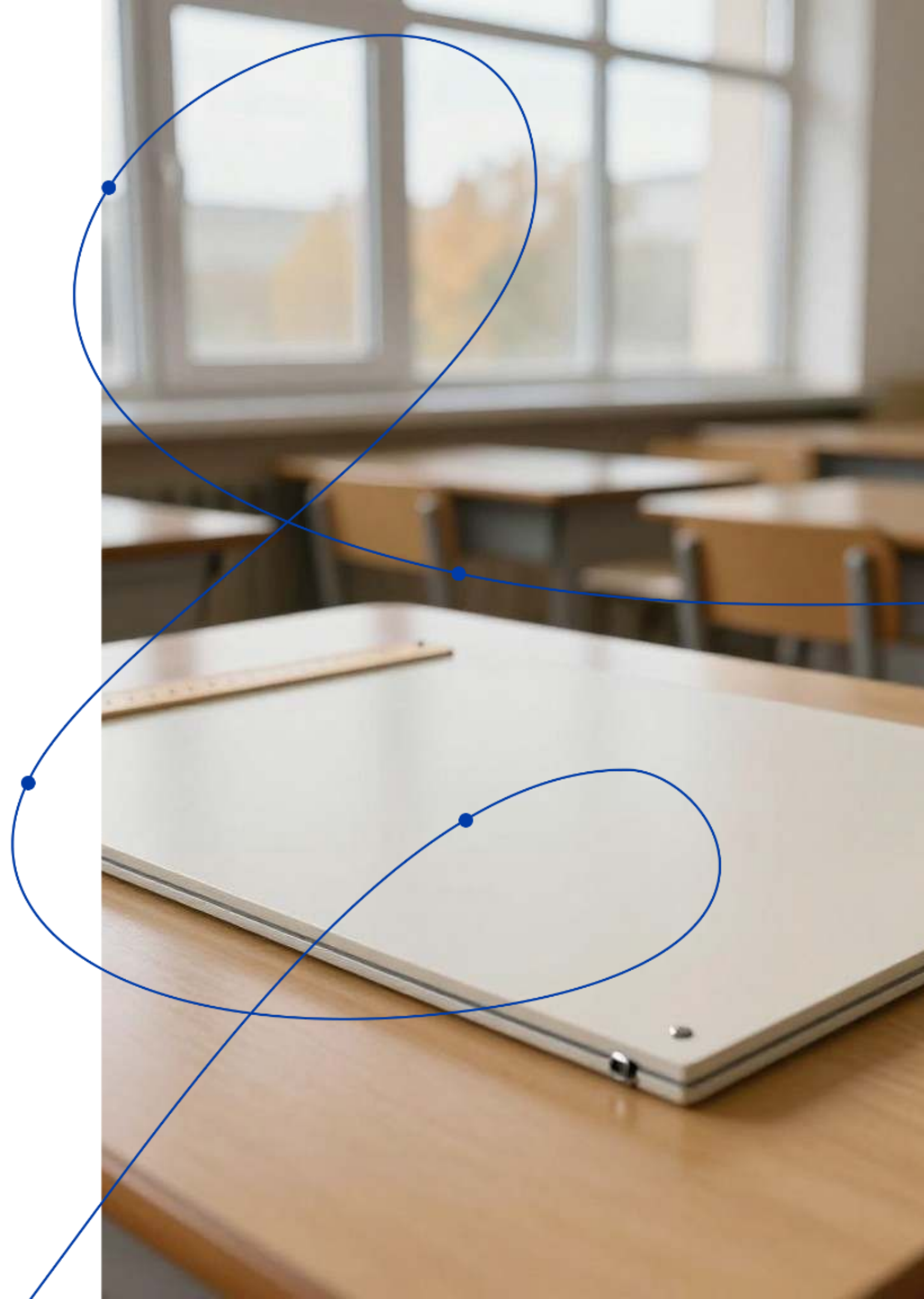


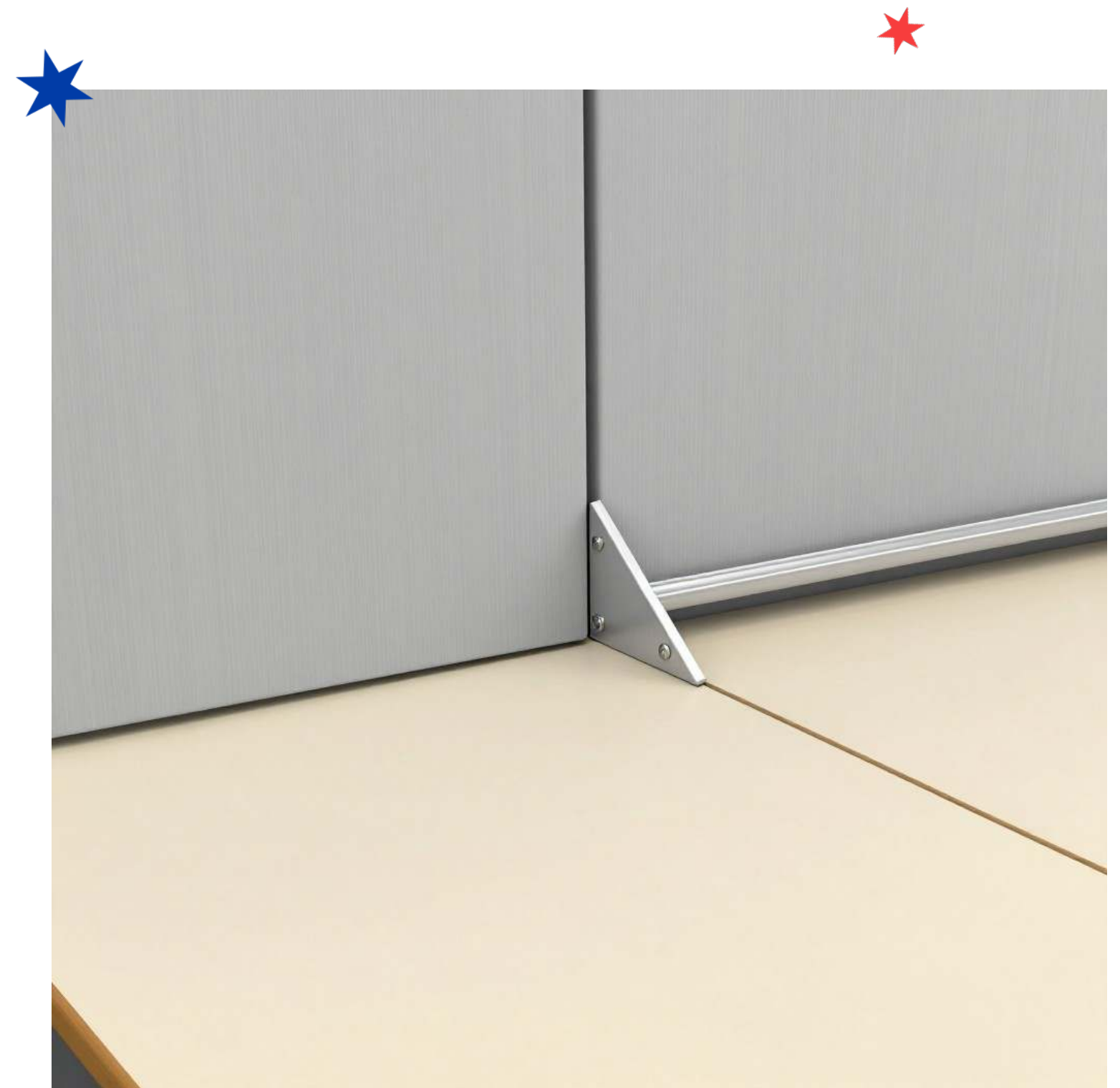
Признак перпендикулярности двух плоскостей

Решаем, когда две плоскости образуют прямой двугранный угол, проверяя одну прямую.



Где возникает этот признак в школьной стереометрии

Признак работает в задачах о призмах, пирамидах, прямоугольном параллелепипеде, кубе и сечениях. Он заменяет громоздкую проверку положения плоскостей на понятную проверку перпендикулярной прямой к линии их пересечения. В основе — определения и свойства перпендикулярности.



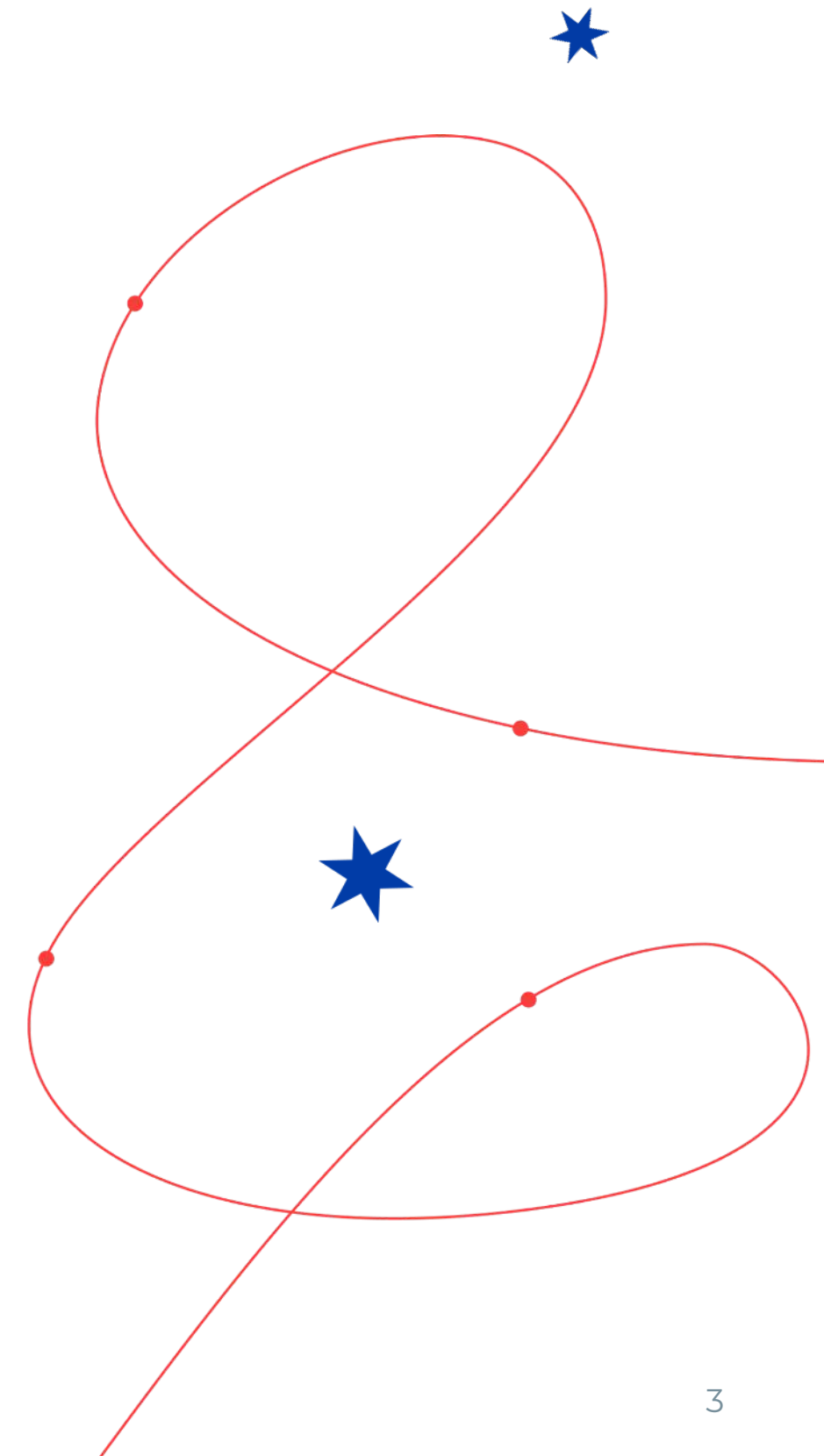
Определение перпендикулярных плоскостей

Две плоскости называют перпендикулярными, если двугранный угол между ними равен 90° . Их общая прямая служит ребром двугранного угла и задаёт линию пересечения плоскостей.

Перпендикулярность плоскостей проявляется в сечениях, проходящих через линию пересечения. Там, где вы «смотрите» на соответствующие линии двух плоскостей, появляется прямой угол.

Если в пространстве построен двугранный угол, то перпендикулярные плоскости дают ситуацию, когда этот угол — прямой. Это делает связь между плоскостями измеримой через прямой угол.

В стереометрии такое определение — базовый инструмент: через него строятся доказательства и обосновываются прямые углы между гранями многогранников и их плоскостями.

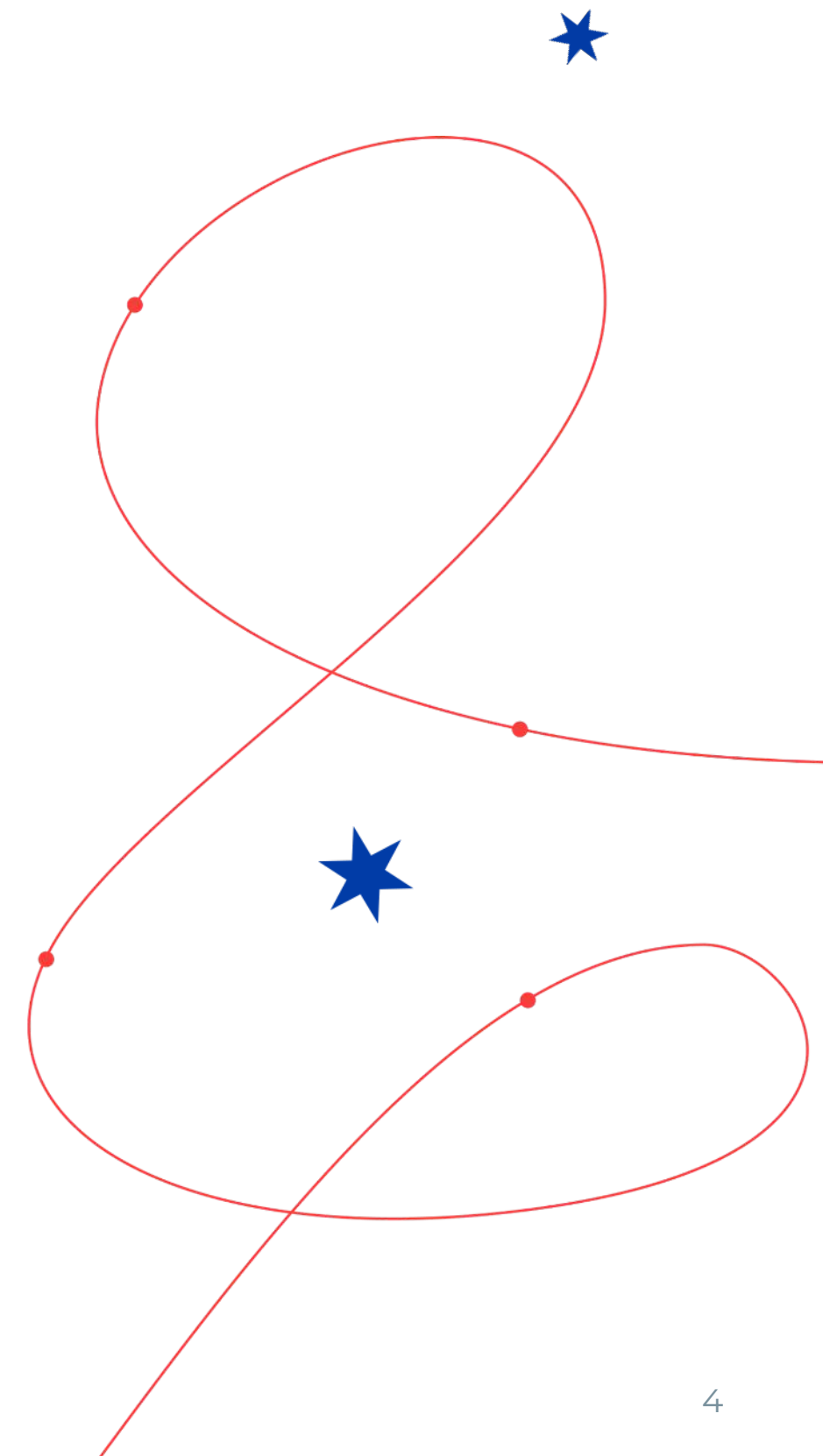


Формулировка признака перпендикулярности двух плоскостей

Если две пересекающиеся плоскости имеют общую линию пересечения, и в одной из них найдётся прямая, перпендикулярная этой линии, то плоскости перпендикулярны.

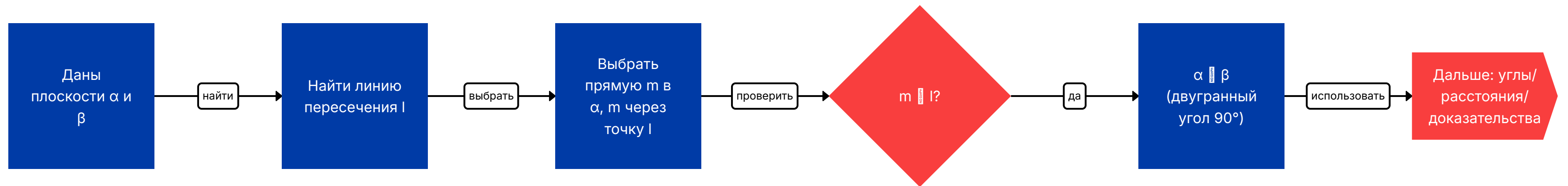
Условие достаточно: для вывода не нужно проверять перпендикулярность каждой прямой в выбранной плоскости. Достаточно точного «одного» линейного факта.

Ключевые элементы признака — общая линия пересечения и перпендикулярность к ней одной специально выбранной прямой. Именно поэтому признак сокращает рассуждения в задачах.



Применяем признак по шагам

От заданных плоскостей к выводу о прямом двугранном угле через одну проверку перпендикулярности



Теоретическая основа признака

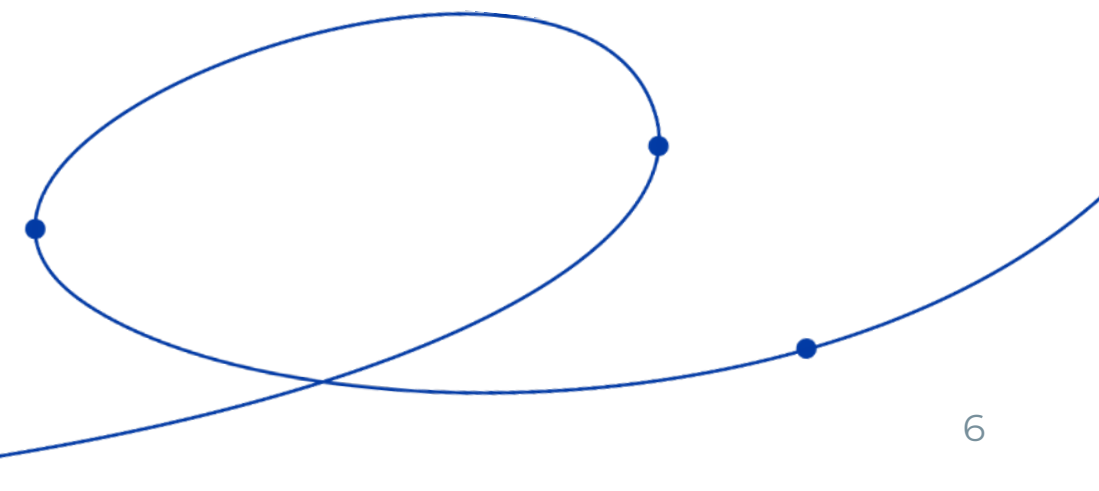


Утверждение опирается на связь «прямая $\perp$ плоскости». Если прямая перпендикулярна плоскости, то она перпендикулярна любой прямой этой плоскости, проведённой через точку касания.

Для признака используется обратная идея: достаточно задать в первой плоскости прямую, перпендикулярную линии пересечения плоскостей. Тогда прямой угол «появляется» между плоскостями как двугранный.



Так объединяются свойства прямых, плоскостей и двугранных углов: мы переводим задачу о плоскостях к проверке перпендикулярности в одной линейной связи.



Что сравнивается в задачах на перпендикулярность



Таблица фиксирует роли ключевых объектов: плоскости, линия пересечения, выбираемая прямая и ожидаемый результат про двугранный угол.

Смысл признака: перпендикулярность двух плоскостей доказывают через более простое линейное условие — перпендикулярность одной прямой к линии их пересечения.

Объект	Роль в признаке	Что доказать	Вывод
Плоскости α и β	задаются, пересекаются	перпендикулярность плоскостей	двугранный угол 90°
Линия пересечения l	служит ребром двугранного угла	перпендикулярная связь с прямой	достаточное условие выполнено
Прямая m	выбирается в одной плоскости	$m \perp l$	$\alpha \perp \beta$



Модель на кубе: боковая грань и основание

Вертикальное ребро как «опора»

Рассмотрим куб: вертикальное ребро удобно воспринимать как прямую, перпендикулярную плоскости основания. Тогда боковая грань, содержащая это ребро, оказывается под прямым углом к основанию. Модель помогает не терять ориентиры на чертеже.



Линия пересечения — это ребро куба

Грань и основание пересекаются по общему ребру. Именно оно становится линией пересечения плоскостей. Когда вы отмечаете прямую внутри боковой грани, перпендикулярную этому ребру, вывод о перпендикулярности плоскостей становится почти визуальным.



Смежные углы поддерживают идею прямого угла

Смежные ребра на кубе показывают, как прямые углы ведут себя в пространстве: если ребро задаёт перпендикулярность плоскости, то соответствующие линии в сечениях дают прямые углы. Поэтому куб часто используют как базовый, «учебный» пример.



Как строится доказательство признака



Берут две пересекающиеся плоскости, затем выделяют их линию пересечения и в одной из плоскостей выбирают две прямые, пересекающиеся в точке на этой линии.



Далее выбирают прямую m так, чтобы она была перпендикулярна линии пересечения. Тогда в соответствующем сечении получают прямой угол между m и прямыми другой плоскости, проходящими через ту же точку.

Из наличия прямого угла в сечении следует, что двугранный угол между плоскостями равен 90° . В школьной записи это оформляют последовательными ссылками на определения перпендикулярности.



Типичные ошибки при применении признака



- Путают линию пересечения с любой общей прямой
- Не доказывают принадлежность прямой нужной плоскости
- Опираются на рисунок без обоснования
- Пропускают условие пересечения плоскостей
- Используют не тот теоретический факт



Перечень типовых ошибок в школьной практике; количественные доли не привязаны к реальной статистике.



Чаще всего ошибка возникает не в «формуле», а в чтении чертежа: нужно строго зафиксировать линию пересечения и выбранную прямую.

Все пункты сводятся к одному: недостаточно корректно построить геометрическую опору доказательства и подтвердить каждый переход.



Связь с параллельностью и углами в пространстве



Положение важнее размеров

Перпендикулярность плоскостей задаётся только их взаимной ориентацией: неважно, каковы длины рёбер или «масштаб» фигуры. Поэтому один и тот же угол между плоскостями возникает при изменении размеров.



Параллельный перенос рассуждений

Удобно переносить доказательство: если конфигурацию передвинуть параллельно, то прямые останутся параллельными, а углы — равными. Так можно уйти от сложного чертежа к более наглядной вспомогательной схеме.



Замена на параллельные прямые

В решениях часто заменяют выбранную прямую на параллельную ей, не меняя нужный угол с линией пересечения. Это помогает аккуратно восстановить условия признака, не меняя геометрического смысла задачи.



Где признак чаще всего встречается в задачах 11 класса



Подбор примеров связан с тем, что признак удобно применять, когда в фигуре легко выделить линию пересечения плоскостей и прямую, перпендикулярную этой линии.

Признак применяют чаще всего, когда уже «видны» прямые углы и прямые ребра: проще выбрать нужную перпендикулярную прямую к линии пересечения.



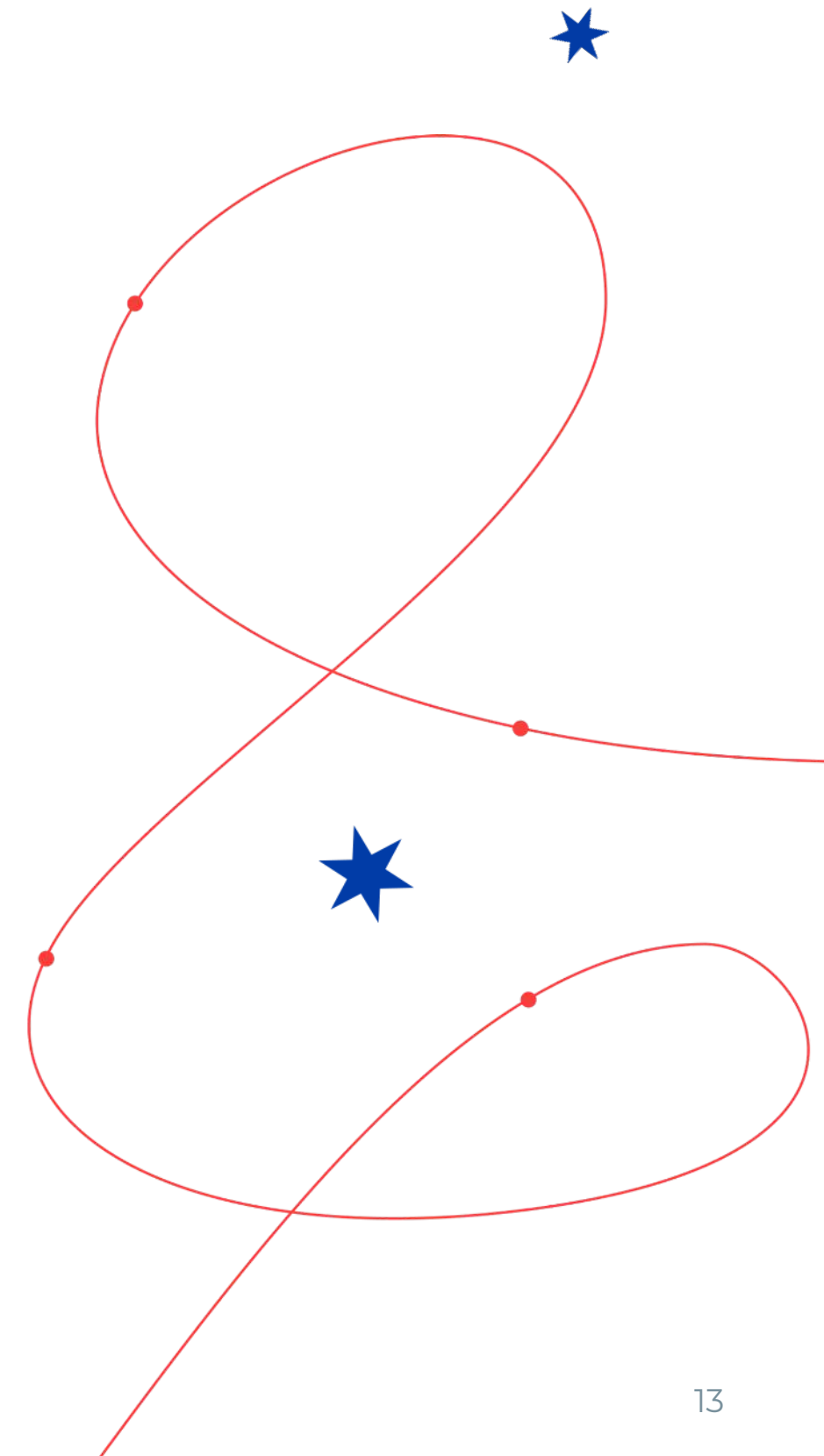
Случай	Какие плоскости	Какая прямая	Что доказываем
Призма	боковая грань и основание	ребро/линия грани	перпендикулярность плоскостей
Пирамида	боковая грань и плоскость основания	высота или апофема	угол 90° между плоскостями
Прямоугольный параллелепипед	смежные грани	ребро, перпендикулярное основанию	перпендикулярность
Куб	любая грань и основание	вертикальное ребро	двугранный угол 90°
Сечение многогранника	плоскость сечения и грань	перпендикуляр к линии пересечения	перпендикулярность

Пример с прямоугольным параллелепипедом

Рассмотрим прямоугольный параллелепипед: основание лежит в одной плоскости, а боковое ребро перпендикулярно основанию. Тогда боковая грань наследует перпендикулярность к плоскости основания.

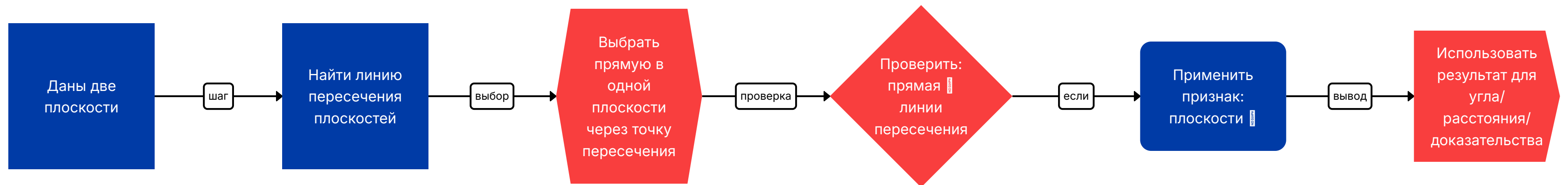
Линия пересечения плоскостей боковой грани и основания совпадает с ребром основания. Именно это ребро удобно брать как общую линию, относительно которой формулируется перпендикулярность прямой.

Боковое ребро служит прямой, перпендикулярной линии пересечения плоскостей. По признаку перпендикулярности плоскостей делаем вывод о прямом двугранном угле между боковой гранью и основанием.



Алгоритм решения задач на перпендикулярность плоскостей

Последовательность шагов для применения признака в школьной стереометрии



Перпендикулярность в пирамиде

Высота как «мост» к перпендикулярности

В правильной пирамиде высота проходит через вершину и центр основания. По определению она перпендикулярна плоскости основания, поэтому её можно использовать как ориентир при поиске прямых углов в сечениях и доказательствах.

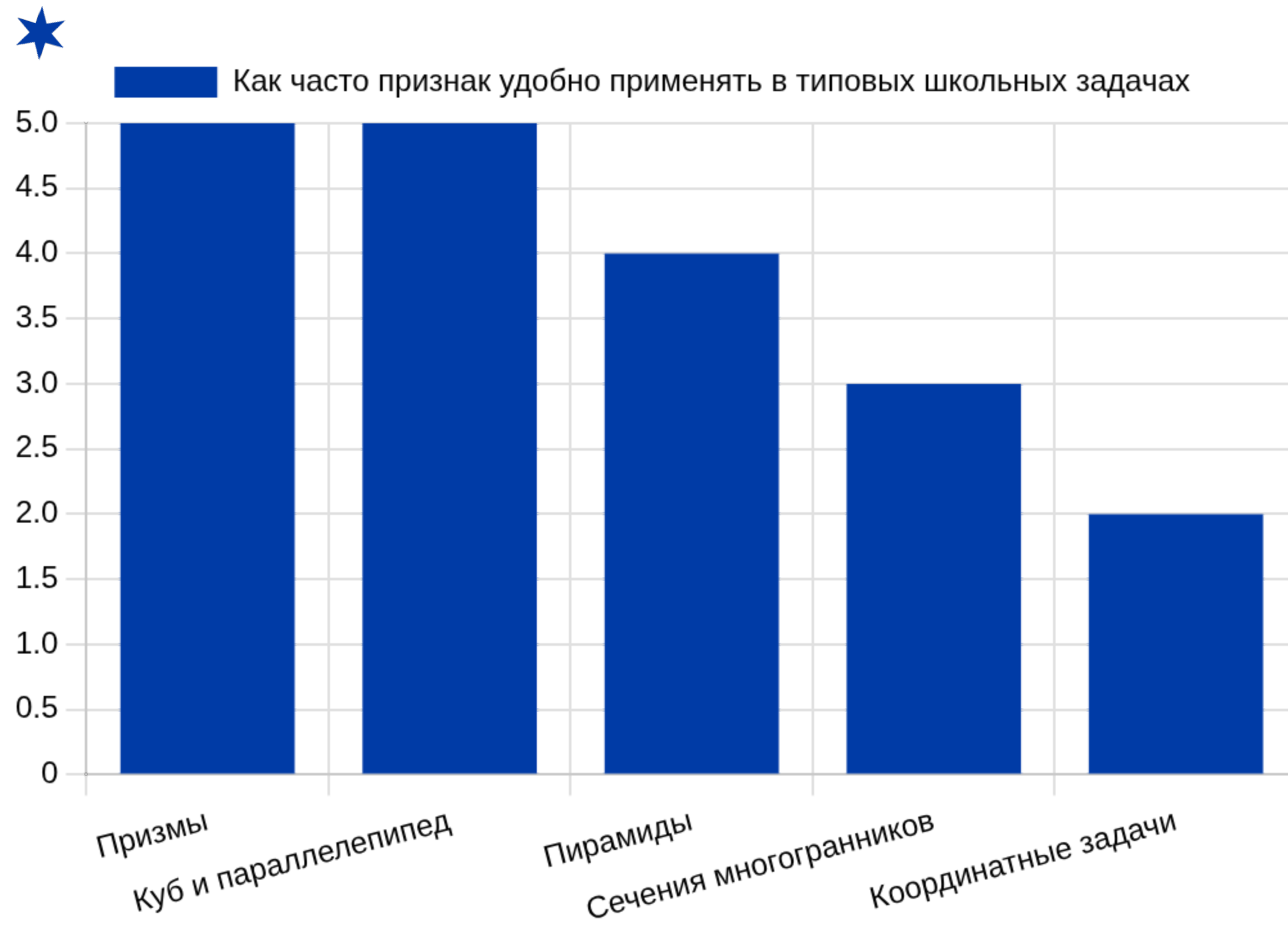


Связь боковой грани и основания через двугранные углы

Боковые грани образуют с основанием двугранные углы. Чтобы анализировать их, удобно опираться на высоту и на линии, лежащие в основании: так рассуждение становится наглядным и более контролируемым при поиске угла между плоскостями.



В каких типах фигур признак применяется чаще



★

Наибольшая практичность признака возникает там, где легко выделить линию пересечения плоскостей и одну «перпендикулярную» прямую по чертежу.

По совокупности школьных тем признак чаще всего работает в задачах с многогранниками с прямыми ребрами и заметными прямыми углами; в пирамиде и сечениях требуется более внимательный выбор вспомогательной прямой.

Типовые задания школьной стереометрии (11 класс), оценка практической применимости признака

★

0

**Если скалярное
произведение нормалей
равно нулю, плоскости
перпендикулярны.**

В координатном подходе признак получает строгую проверку: условие на нормали полностью воспроизводит геометрический результат. Это удобно для самопроверки и для задач смешанного типа.

Что должно быть доказано в строгом решении



Чтобы доказательство было полноценным, нужно строго зафиксировать геометрические связи и обосновать каждый переход используемым фактом.

Без указания линии пересечения и принадлежности прямой вывод о перпендикулярности считается необоснованным, даже если на рисунке «кажется верным».



Что проверить	Почему важно	Как сформулировать
Прямая принадлежит нужной плоскости	иначе признак неприменим	указать принадлежность выбранной прямой
Есть линия пересечения плоскостей	без неё нельзя говорить о двугранном угле	найти общую прямую двух плоскостей
Перпендикулярность прямой линии пересечения	это ключевое условие признака	доказать: прямая $\perp$ линии пересечения
Вывод по признаку	получаем двугранный угол 90°	сформулировать перпендикулярность плоскостей
Обоснование каждого шага	снимает пробелы в логике	ссылаться на определения/теоремы



Практическая ценность признака в школьных задачах

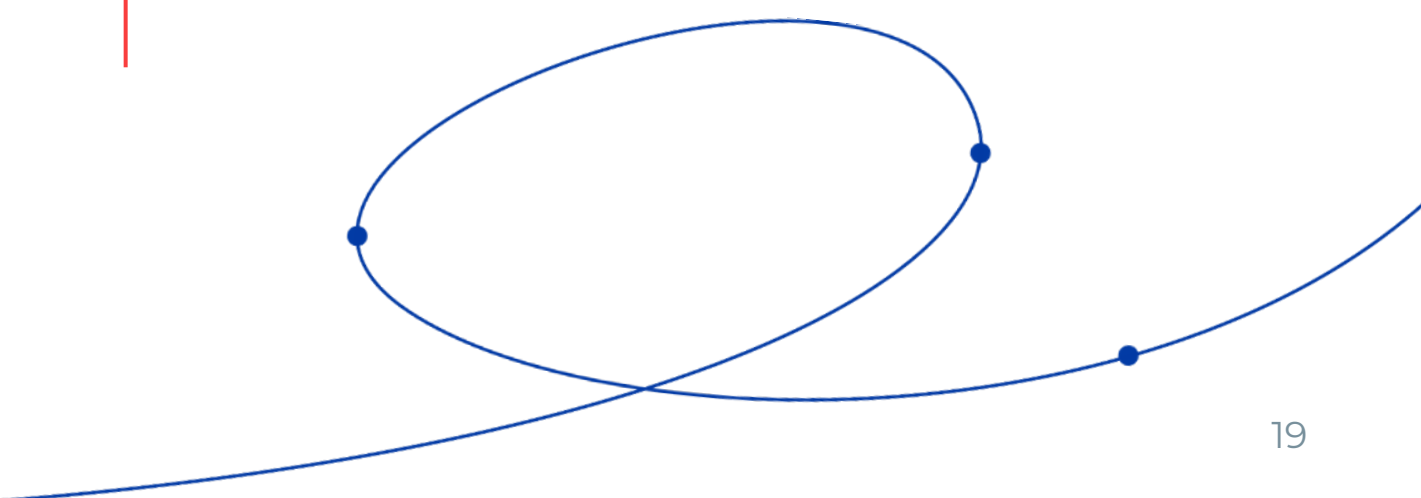


Признак сокращает громоздкие рассуждения: вместо анализа многих пространственных углов достаточно установить перпендикулярность одной прямой к линии пересечения плоскостей.

Он помогает находить углы между гранями и строить сечения, потому что в чертеже часто уже есть рёбра, параллельные граням, и естественные общие точки для выбора прямой.



Когда конфигурация выглядит сложной, признак переводит задачу в контролируемую «операцию»: выделить пересечение плоскостей и проверить один точный прямой угол через выбранную прямую.



Итоги темы: главный вывод для 11 класса

Признак перпендикулярности двух плоскостей сводит проверку отношения в пространстве к задаче про одну прямую и линию пересечения плоскостей. Он опирается на определения двугранного угла и перпендикулярности прямой и плоскости, и применяется в задачах о многогранниках и их сечениях.

