



Формулы сложения в тригонометрии

Связывают $\sin$, $\cos$, tg и ctg суммы/разности углов, дают точные значения без калькулятора.

Где эти формулы «живут» в геометрии 11 класса

Формулы сложения — мост между углом, единичной окружностью и тригонометрическими функциями. В 11 классе их применяют для доказательства тождеств, упрощения выражений, решения уравнений и нахождения точных значений нестандартных углов.



Основные формулы для синуса и косинуса

Базовые соотношения связывают синус и косинус суммы или разности углов: $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$. Здесь знак результата повторяет знак внутри скобок, поэтому важно не ошибиться при записи.

Для косинуса действует похожее, но «перевёрнутое» правило: $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$. При переходе от «плюса» к «минусу» меняется знак второго произведения, и именно он чаще всего вызывает путаницу.

Эти две формулы — основа темы: от них выводят преобразования для тангенса и котангенса, используют их для упрощения сложных выражений и для вычисления точных значений углов вне стандартной таблицы.

Полный набор формул сложения

Функция	Сумма	Разность
sin	$\sin(\alpha+\beta)=...$	$\sin(\alpha-\beta)=...$
cos	$\cos(\alpha+\beta)=...$	$\cos(\alpha-\beta)=...$
tg	$(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)/(1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta)$	$(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta)/(1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta)$
ctg	$(\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta-1)/(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta)$	$(\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta+1)/(\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha)$
Условия	$\cos\alpha\neq 0, \cos\beta\neq 0$	знаменатели не равны 0

Собраны формулы для $\sin$, $\cos$, tg и ctg с условиями существования, чтобы преобразования были корректными.

Точность преобразований определяется не только правильной записью, но и проверкой области определения (особенно по знаменателям для tg и ctg).

Школьный курс тригонометрии (стандартные тождества формул сложения).

Вывод формул через единичную окружность

Логика опирается на координатное представление точек на единичной окружности и последовательный поворот.

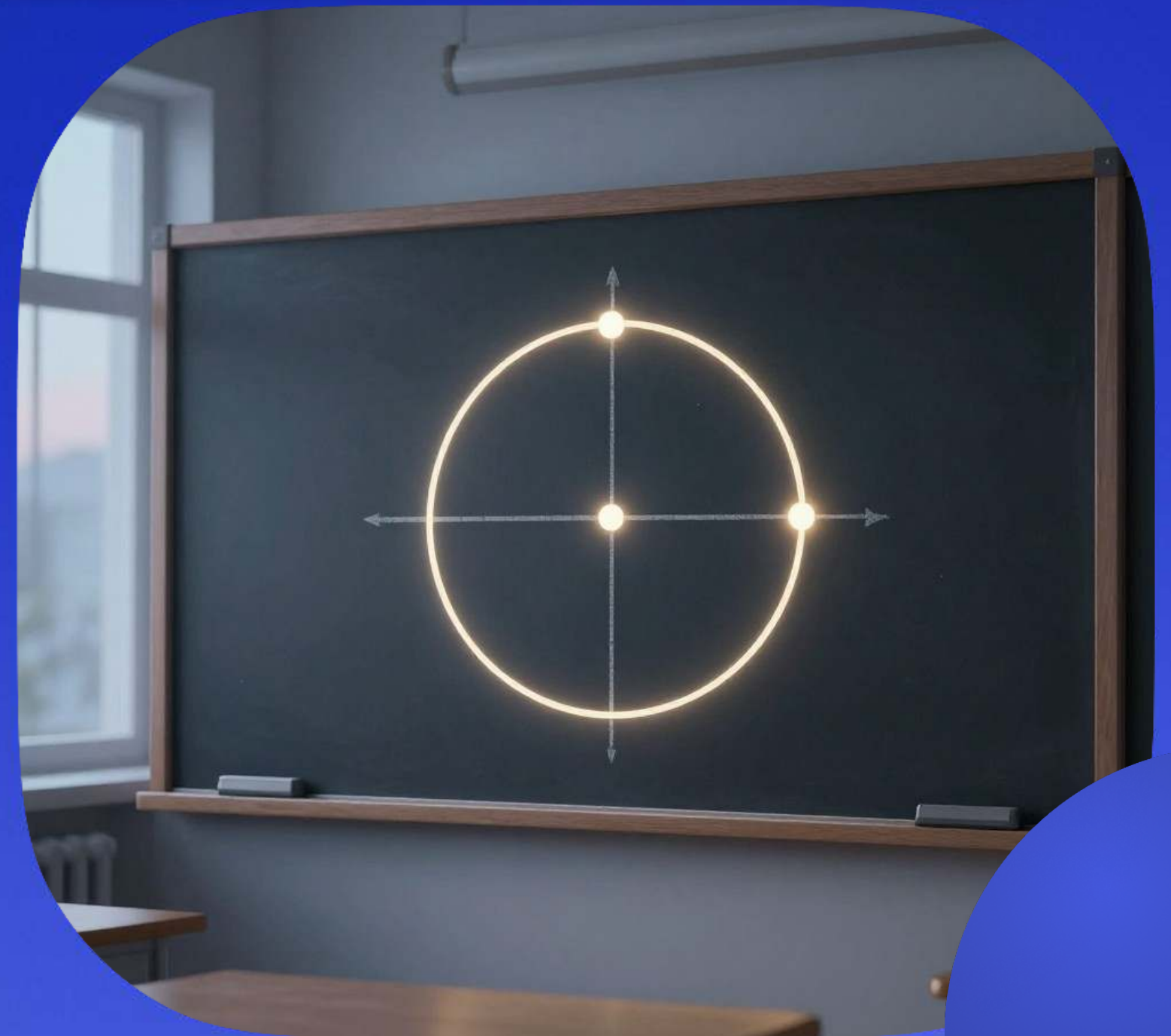
Геометрический смысл на единичной окружности

Координаты угла и «поворотная» интерпретация

На единичной окружности точка, соответствующая углу α , имеет координаты $(\cos\alpha, \sin\alpha)$: абсцисса — это $\cos\alpha$, а ордината — $\sin\alpha$. Сумма углов естественно появляется как результат двух последовательных поворотов вокруг начала координат.

Почему в результате участвуют $\sin$ и $\cos$

После поворота на β меняются координаты точки, и формулы сложения описывают это изменение. Поэтому в ответе одновременно фигурируют $\sin$ и $\cos$ обоих углов: один задаёт горизонтальное смещение, другой — вертикальное. (На слайде показываются углы α , β и $\alpha+\beta$, стрелки поворота и координаты точек.)



Формулы для тангенса и котангенса

Формулы $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)$ и $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta)$ получают из пар «sin–cos»: $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) / (1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta)$, $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) / (1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta)$. Ключ — правильная работа со знаком и знаменателем.

Для котангенса аналогично: $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = (\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1) / (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta)$, $\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = (\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + 1) / (\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha)$. Здесь легко ошибиться в порядке углов, поэтому стоит сверять формулу с конкретным случаем « $\pm$ ».

В этих выражениях особенно важно следить за тем, чтобы знаменатель не обращался в ноль: тогда значение не определено. В школьных задачах отдельно проверяют ситуации, когда $\operatorname{tg} \alpha$ или $\operatorname{tg} \beta$ не существует, а также когда $\operatorname{ctg} \alpha$ или $\operatorname{ctg} \beta$ не определён.

Типичные ошибки при применении формул сложения



Путаница знаков

Для синуса знак результата совпадает со знаком внутри скобок, а для косинуса меняется на противоположный. При первых вычислениях полезно проговаривать правило вслух.



Ошибки в знаменателях tg и ctg

В формулах $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)$ и $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta)$ именно знаменатель задаёт область определения. Часто перепутывают «плюс/минус» в знаменателе или местами меняют слагаемые.



Подстановка без проверки области определения

Нельзя использовать формулу вслепую: например, при $\cos \alpha = 0$ тангенс не определён. Если знаменатель равен нулю, выражение теряет смысл, и ответ получается недопустимым.



Потеря множителей при раскрытии

При преобразованиях легко забыть члены вида $\sin \alpha \cdot \cos \beta$ и $\cos \alpha \cdot \sin \beta$ или перепутать коэффициенты. Перед упрощением полезно восстановить структуру выражения по формуле.

Точные значения через формулы сложения

Формулы сложения расширяют таблицу: с их помощью находят точные значения углов, которые не указаны в стандартных значениях. Обычно это делается через представление нужного угла как суммы или разности известных: 45° и 30° .

В 11 классе особенно часто встречаются пары: $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ)$ и $\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ)$, а также $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ)$ и $\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ)$. Здесь вычисления идут строго по тождествам.

Дополнительно рассматриваются углы вида $105^\circ = 60^\circ + 45^\circ$ и $165^\circ = 120^\circ + 45^\circ$. Суммы берутся так, чтобы входили табличные значения $\sin$ и $\cos$, а затем результат приводится к выражению с корнями.

Главная ценность — ответ в точной форме, без десятичных приближений. Поэтому формулы сложения особенно важны в задачах, где требуется обосновать тождество или получить точный вид дробно-радикального выражения.

Точные значения для углов 15° , 75° , 105° и 165°

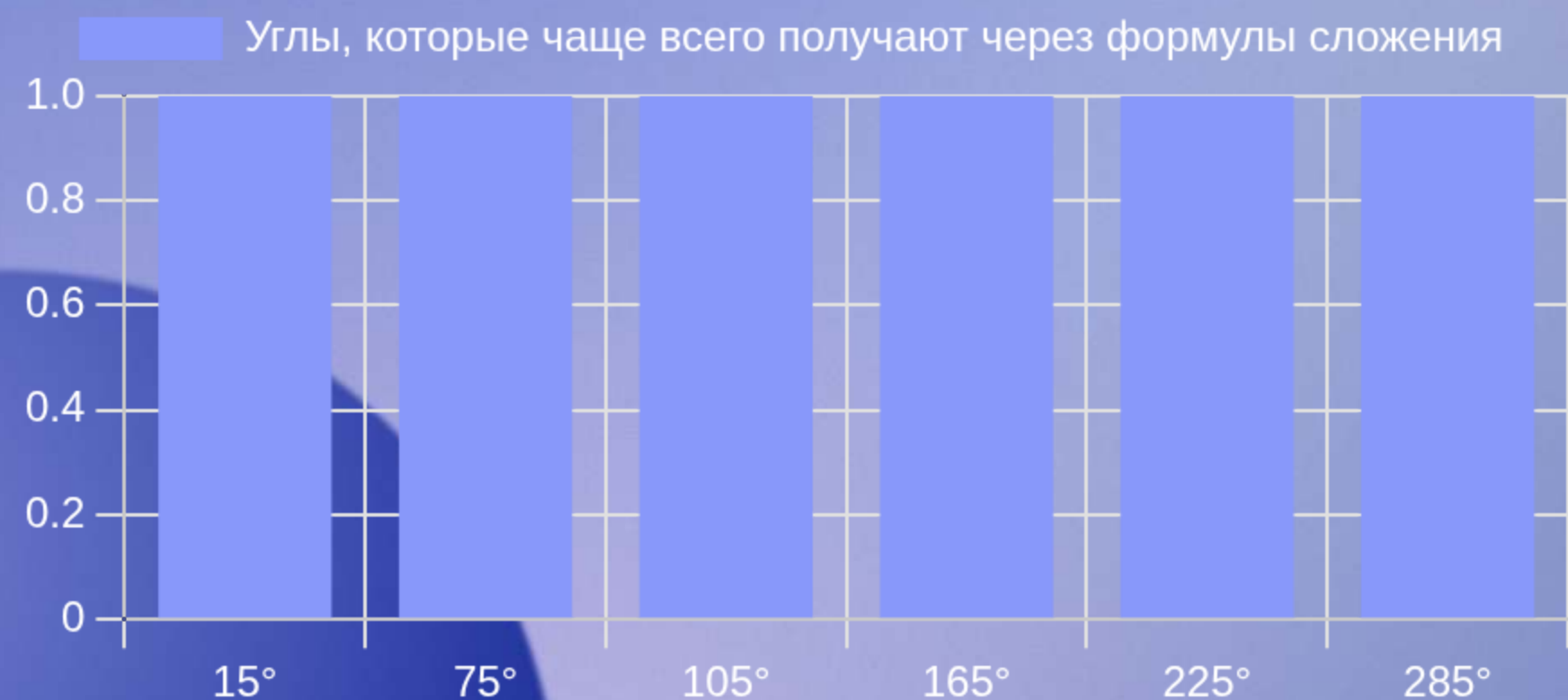
Угол	$\sin$	$\cos$
15°	$(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4$	$(\sqrt{6}+\sqrt{2})/4$
75°	$(\sqrt{6}+\sqrt{2})/4$	$(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4$
105°	$(\sqrt{6}+\sqrt{2})/4$	$(\sqrt{2}-\sqrt{6})/4$
165°	$(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4$	$-(\sqrt{6}+\sqrt{2})/4$

Вывод через формулы сложения с опорными углами 30° , 45° , 60° и правилами знаков по четвертям.

Таблица фиксирует пары «угол $\rightarrow$ $\sin$ и $\cos$ » для ключевых нестандартных значений.

Для дополнительных углов прослеживается симметрия значений, а знак $\sin$ и $\cos$ меняется при переходе в другие четверти.

Какие углы чаще всего получаются через формулы сложения



Сводка по типовым школьным заданиям по теме формул сложения (без единого статистического набора, дата: 12.05.2026).

Чаще всего в школьных решениях работают пары $45^\circ \pm 30^\circ$ и $60^\circ \pm 45^\circ$, поэтому именно производные от 30° , 45° и 60° углы появляются наиболее регулярно.

Доминируют углы, выражаемые через стандартные опорные величины, а дополнительные четверти требуют внимательного отслеживания знаков $\sin$ и $\cos$.

Формулы сложения и преобразование выражений

Формулы сложения помогают переводить громоздкие суммы тригонометрических функций в более компактные формы, удобные для вычислений и доказательств. Особенно полезны они при выражениях с произведениями $\sin$ и $\cos$.

Через формулы суммы заменяют комбинации $\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ и $\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ одной функцией суммы или разности углов.

В школьных задачах это снижает число шагов: можно сразу привести выражение к виду, где затем применяются стандартные значения или тождественные преобразования.

Алгоритм вычисления по формуле сложения

Логика построена на последовательности: разложение угла → выбор формулы → подстановка → знаки → проверка четверти.

Пример вычисления $\sin 75^\circ$ и $\cos 75^\circ$

1. Представим 75° как $45^\circ + 30^\circ$. Для синуса используем формулу $\sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ$. Для косинуса — $\cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ$.
2. После подстановки табличных значений получаем точные результаты: $\sin 75^\circ = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) / 4$ и $\cos 75^\circ = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) / 4$. На записи по шагам удобно выделять $\sin 30^\circ$, $\cos 30^\circ$, $\sin 45^\circ$, $\cos 45^\circ$.



$$2 \pm \sqrt{3}$$

Эти выражения удобно
использовать как быструю
проверку правильности знаков и
вычислений в соответствующих
четвертях.

Углы 75° и 15° получаются из $45^\circ + 30^\circ$ и $45^\circ - 30^\circ$, а затем значения находятся по формуле $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)$, используя точные табличные $\sin$ и $\cos$.

Учебные материалы по тригонометрии для 11 класса; вывод по формулам сложения (дата: 12.05.2026).

Формулы двойного угла как частный случай



Подстановка $\alpha = \beta$

Формулы двойного угла возникают при равенстве углов в формуле суммы: берём α и α и используем $\sin(\alpha+\alpha)$ и $\cos(\alpha+\alpha)$.



Связь с умножением

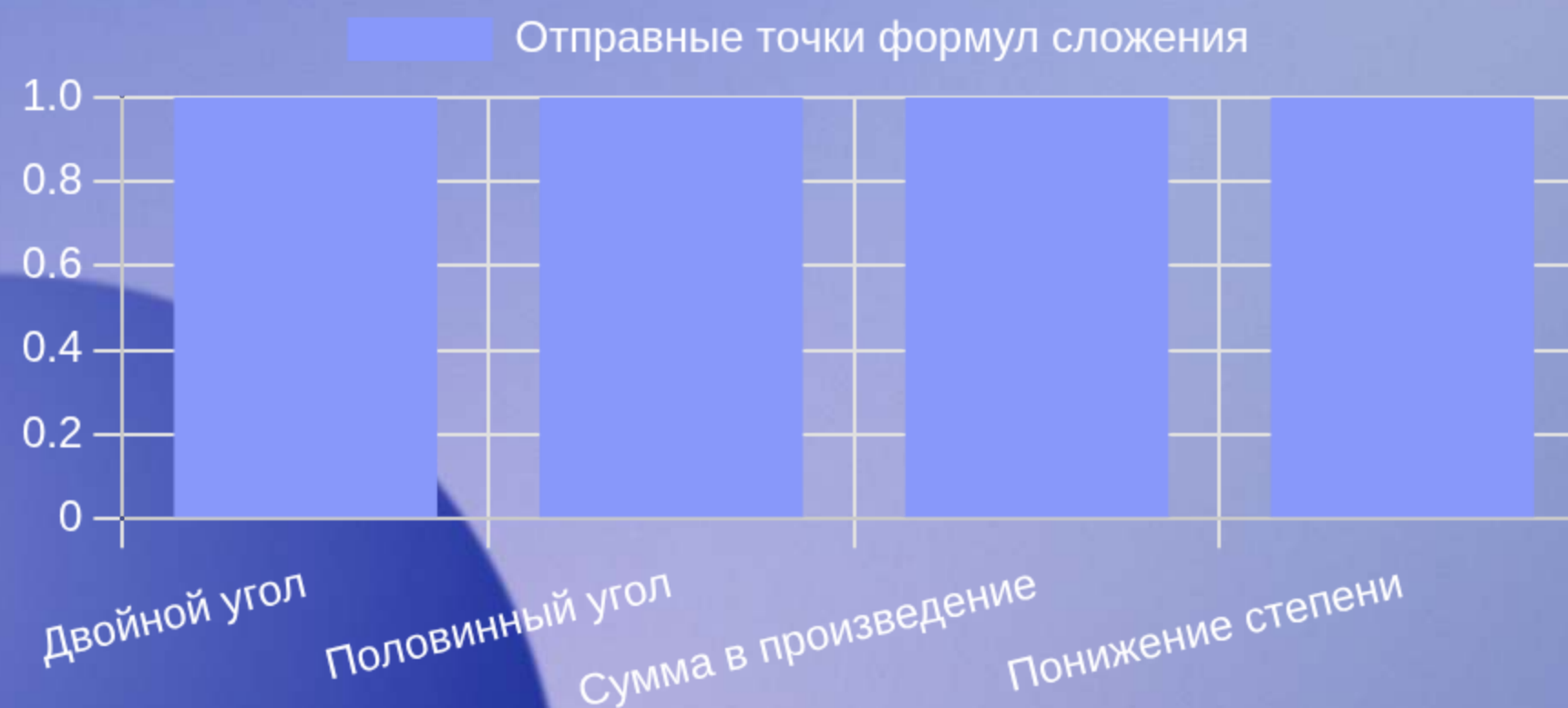
Для синуса получается $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$, а для косинуса — $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$. Это объясняет, почему везде участвуют $\sin$ и $\cos \alpha$.



Тангенс и критические знаменатели

Для $\operatorname{tg} 2\alpha$ применяется рациональная форма $\operatorname{tg} 2\alpha = 2 \operatorname{tg} \alpha / (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)$; она имеет смысл только при ненулевом знаменателе.

Связь формул сложения с другими тригонометрическими формулами



Структурная схема из школьного курса тригонометрии (без внешней выборки, дата: 12.05.2026).

Многие техники преобразований в тригонометрии 11 класса строятся как последовательности: сначала разложение через сумму/разность, затем алгебраические упрощения.

Чем чаще вы используете формулы суммы как «точку входа», тем легче выводить новые тождества и приводить выражения к удобному виду.

Практическая ценность формул сложения в задачах ЕГЭ и школьных контрольных

Формулы сложения встречаются там, где нужно находить точные значения, упрощать выражения и доказывать тождества. Они позволяют уйти от громоздких вычислений по частям.

В контрольных работах особенно часто используют углы 15° , 75° , 105° и 165° , потому что их удобно выразить через 30° и 45° или через 45° и 60° .

В заданиях повышенного уровня формулы сложения помогают получить ответ в точном виде: выражения с корнями остаются математически «чистыми», без десятичных округлений.

При аккуратной записи знак и область определения становятся ключевыми: для $\sin$ и $\cos$ важна четверть, а для tg и ctg — отсутствие нулевых знаменателей.

Проверочная таблица: что нужно помнить по теме

Формула	Вид записи	Условия применимости	Типичная ошибка
$\sin(\alpha \pm \beta), \cos(\alpha \pm \beta)$	$\sin(\alpha \pm \beta), \cos(\alpha \pm \beta)$	$\cos \alpha \cdot \cos \beta$? не зануляется (через $\sin/\cos$)	Перепутать знак: для $\sin$ он повторяет скобку, для $\cos$ меняется
$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta), \operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta)$	$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta), \operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta)$	Нужен ненулевой знаменатель	Перепутать порядок/знаки в знаменателе
—	—	$\cos \alpha \neq 0, \cos \beta \neq 0$; отсутствуют нулевые знаменатели	Пропустить проверку области определения
—	—	—	Забывтая скобка; неправильная четверть угла

Таблица с основными формулами сложения, условиями применимости и типичными ошибками помогает быстро проверить ход решения перед финальным ответом.

Главный вывод: формулы работают только при точной записи со знаками и при обязательной проверке области определения, особенно для tg и ctg .

Сводка по материалам школьного курса тригонометрии (дата: 12.05.2026).

Итоги темы «Формулы сложения»

Формулы сложения связывают вычисление $\sin$, $\cos$, tg и ctg с геометрическим поворотом на единичной окружности. Они дают точные значения нестандартных углов, помогают выводить двойной угол и решать задачи без приближений.