

Умножение и деление степеней: основные правила

Кратко о степенях, их умножении, делении
и важных частных случаях.





Зачем в 7 классе изучают степени

Степени делают записи короче, а вычисления – быстрее. В алгебре они помогают работать с формулами, уравнениями, буквенными выражениями и научной записью чисел, где одинаковые множители встречаются очень часто.



Что такое степень числа

Определение степени

Степень a^n — это произведение n одинаковых множителей a . Такая запись показывает, сколько раз одно и то же число или буква участвует в умножении.

Пример записи

Запись 3^4 означает $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, поэтому значение степени равно 81. Здесь основание — 3, а показатель — 4, потому что число умножается само на себя четыре раза.

Основание и показатель

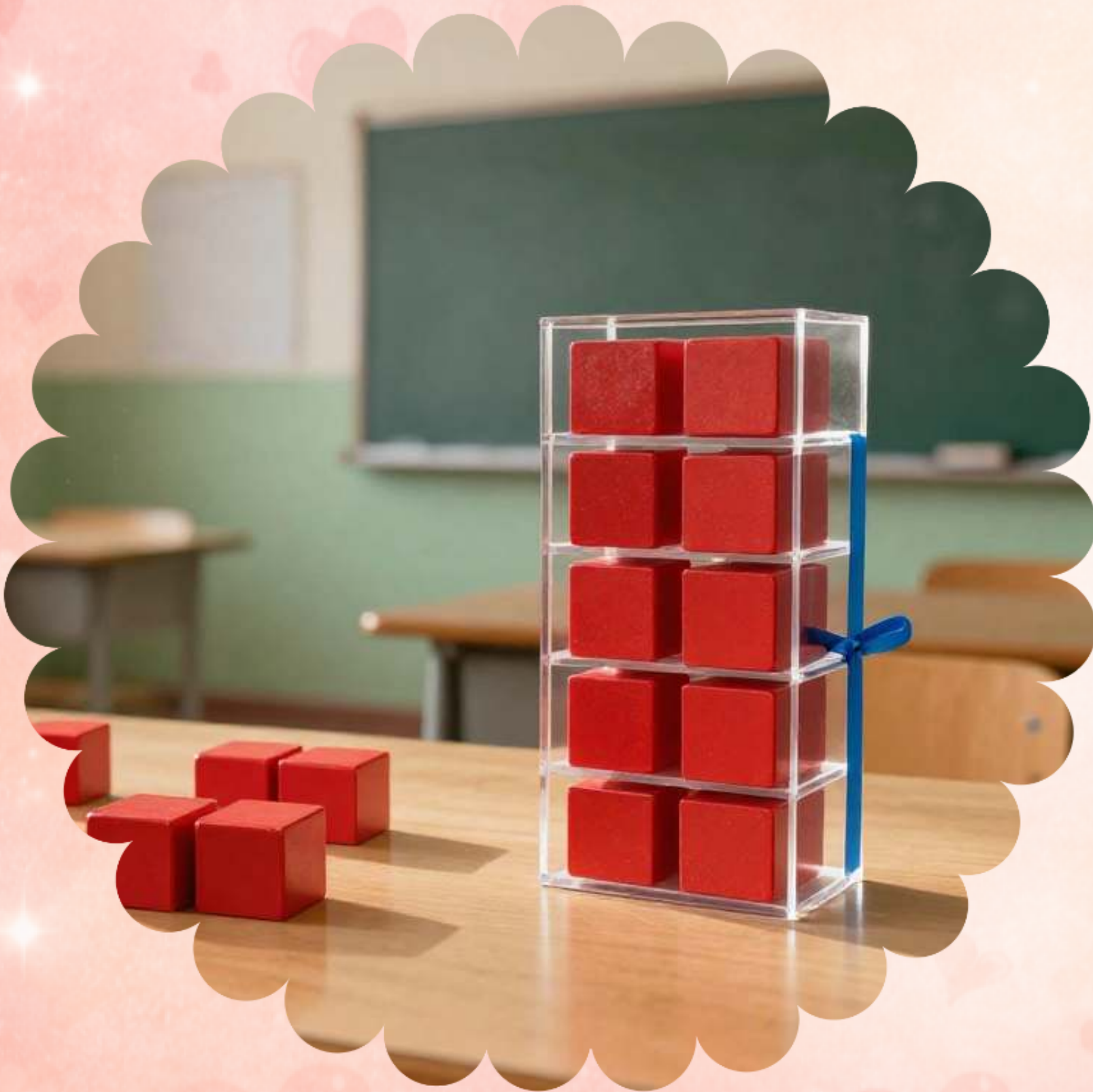
Основание степени — это число или буква, которая повторяется в произведении. Показатель степени показывает, сколько раз основание берётся множителем, и стоит сверху справа.

Особые случаи

Если показатель равен 1, то $a^1 = a$. Для любого ненулевого числа при нулевом показателе выполняется $a^0 = 1$, потому что число делится само на себя.



Степень как краткая запись произведения



Меньше записи

Степень помогает заменить длинную цепочку одинаковых множителей одной короткой записью. Например, вместо $5 \cdot 5 \cdot 5$ удобно писать 5^3 , и выражение сразу становится компактнее.



Не путать с обычным умножением

Запись 2^6 означает шесть множителей, равных 2, а не действие $2 \cdot 6$. Степень показывает повторение, а не умножение числа на показатель.



Удобно для чтения

Краткая форма особенно полезна в формулах и выражениях, где много чисел и букв. Она экономит место и делает запись понятнее для школьника и учителя.



Переход к правилу

Когда одинаковые множители записаны через степени, проще заметить общие закономерности. Именно так появляется правило умножения степеней с одинаковым основанием.

Как умножают степени с одинаковым основанием

Преобразование выражения $a^m \cdot a^n$ через повторяющиеся множители

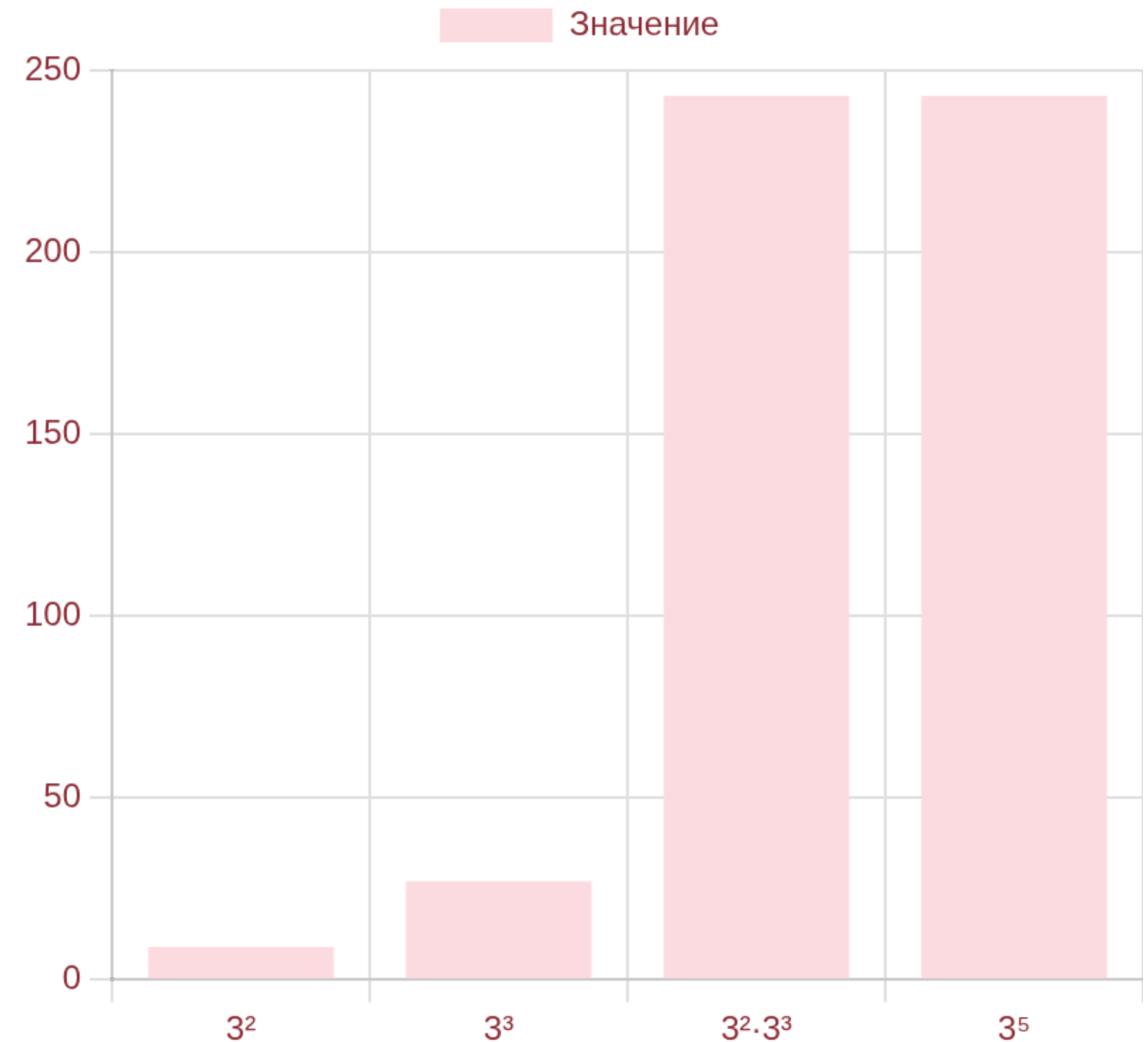


Как меняется число множителей при умножении степеней

На диаграмме видно, что одинаковое основание сохраняется, а рост результата зависит от суммы показателей.

$3^2 \cdot 3^3$ равно 3^5 , поэтому значения совпадают; при умножении степеней показатели складываются.

Учебный пример, рассчитанный по правилам степеней



Правило умножения степеней с одинаковым основанием

1

Сначала смотрим на основание

Правило работает только тогда, когда основания одинаковые. Если обе степени содержат одно и то же число или одну и ту же букву, их можно объединять.

2

Складываем показатели

При умножении степеней показатели складываются: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. Основание при этом не меняется, потому что повторяется один и тот же множитель.

3

Примеры применения

Такое правило работает и с числами, и с буквами: $x^2 \cdot x^5 = x^7$, $7^1 \cdot 7^3 = 7^4$, $a^3 \cdot a^2 = a^5$. Во всех случаях меняются только показатели.

4

Типичная ошибка

Нельзя складывать сами основания или смешивать основание с показателем. Нужно проверять, что именно повторяется в записи, иначе преобразование получится неверным.



Примеры умножения степеней

Выражение	Преобразование	Ответ
$2^3 \cdot 2^4$	2^7	128
$5^1 \cdot 5^2$	5^3	125
$x^4 \cdot x$	x^5	x^5
$10^2 \cdot 10^3$	10^5	100000
$a^2 \cdot a^3$	a^5	a^5

В таблице показано, как преобразуются выражения с одинаковым основанием и как изменяется результат.

Во всех примерах основание сохраняется, а показатели складываются; это и даёт нужную степень.

Учебные примеры по теме степеней

Когда правило умножения применять нельзя



Разные основания

Правило $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ действует только при одинаковом основании. Если основания разные, например $2^3 \cdot 3^2$, объединить выражение в одну степень нельзя.



Нужно считать отдельно

Когда множители не совпадают, каждую степень вычисляют отдельно или оставляют в виде произведения. Важно не пытаться «смешать» разные основания в одну запись.



Не путать элементы записи

Основание и показатель выполняют разные роли. Основание — это повторяющийся множитель, а показатель показывает его количество; их нельзя заменять друг другом.

Деление степеней с одинаковым основанием



1

Сравниваем основания

При делении степеней сначала проверяют, одинаковое ли основание у числителя и знаменателя. Если основание одно и то же, можно применять правило вычитания показателей.

2

Вычитаем показатели

Запись a^m : a^n преобразуется в a^{m-n} , если $a \neq 0$ и $m > n$. Это означает, что часть одинаковых множителей сокращается.

3

Почему это работает

При делении одинаковые множители в числителе и знаменателе взаимно уничтожаются. Оставшиеся множители образуют новую степень с меньшим показателем.

4

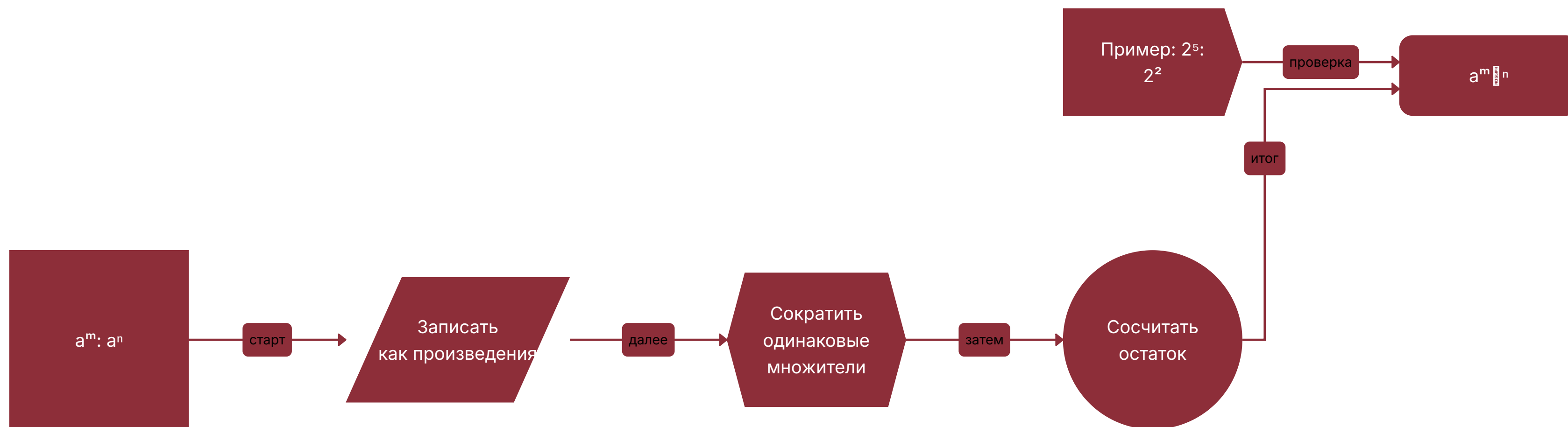
Пример вычисления

$5^6 : 5^2 = 5^4$, потому что из шести множителей 5 в числителе сокращаются два. Остаются четыре множителя, значит, ответ равен 5^4 .



Как делят степени с одинаковым основанием

Преобразование степени через сокращение одинаковых множителей

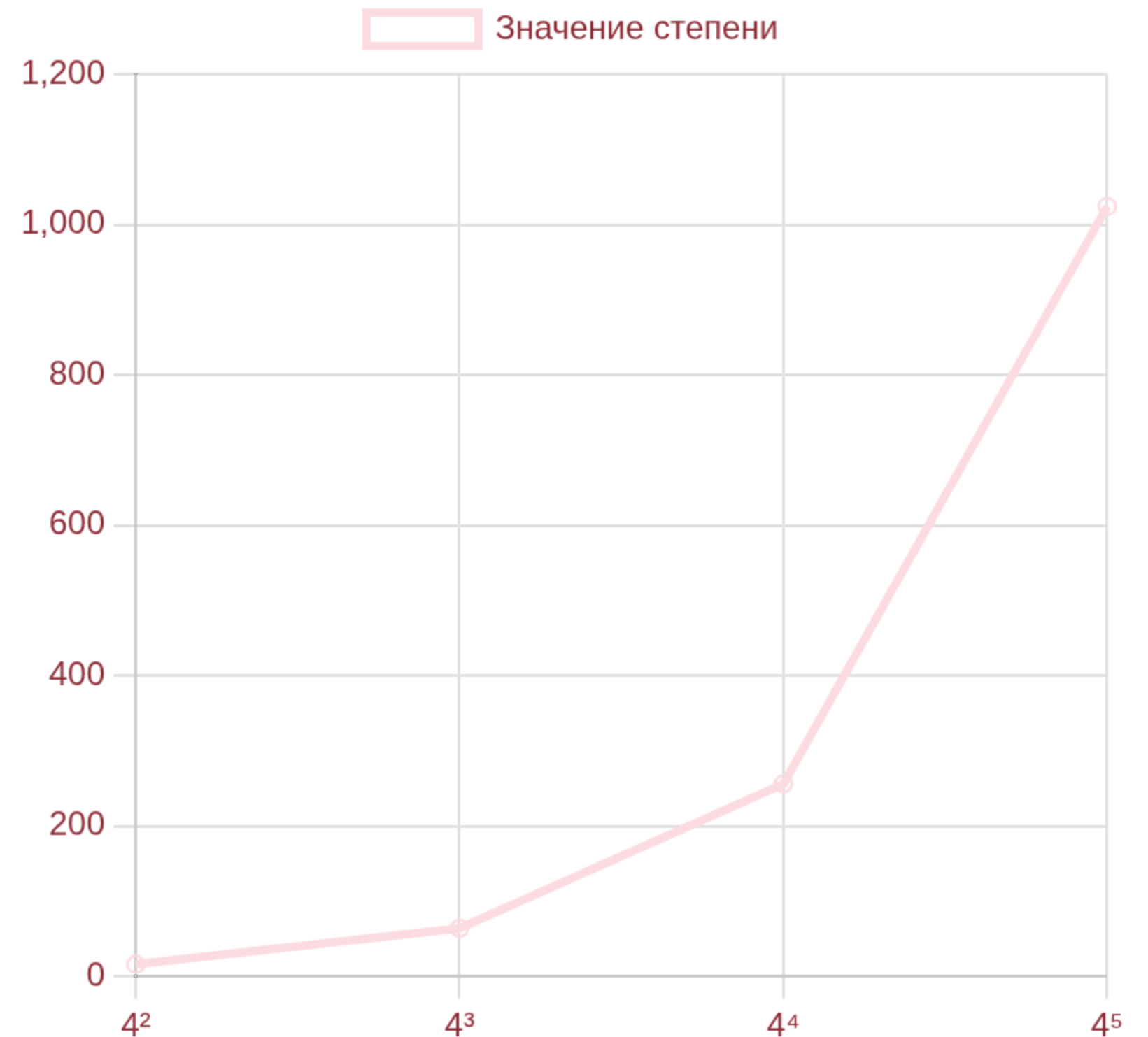


Изменение значения степени при делении

При уменьшении показателя на 1 значение делится на основание. Здесь основание равно 4, поэтому шаги между точками заметны особенно хорошо.

Чем меньше показатель, тем меньше значение степени; деление показателя отражает сокращение числа множителей.

*Учебные вычисления по свойствам степеней;
данные рассчитаны для иллюстрации*





Нулевой показатель возникает из правила деления степеней одинакового основания. Отрицательный показатель переводит степень в обратную дробь.

Свойства степеней, изучаемые в школьном курсе алгебры

1

получается
при возведении любого
ненулевого числа
в нулевую степень

Главные свойства степеней в одной таблице

Свойство	Пример	Результат
$a^m \cdot a^n$	$x^2 \cdot x^3$	x^5
$a^m : a^n$	$8^4 : 8^2$	8^2
a^0	5^0	1
a^{-n}	2^{-2}	$\frac{1}{4}$

Таблица объединяет основные правила умножения, деления, нулевого и отрицательного показателя, а также возведения степени в степень.

Все правила связаны между собой и помогают быстро преобразовывать выражения без длинных вычислений.

Основные свойства степеней из школьного курса алгебры

Пример из геометрии: площадь квадрата

Формула площади

Площадь квадрата удобно записывать через степень: $S = a^2$. Это значит, что сторона умножается сама на себя, поэтому запись короче и нагляднее.

Увеличение стороны

Если сторона равна 3 см, площадь составляет 9 см². При увеличении стороны в 2 раза длина становится 6 см, а площадь — уже 36 см².

Связь со свойствами

Из примера видно, что $(3 \cdot 2)^2$ можно раскрыть как $3^2 \cdot 2^2$. Такое преобразование помогает быстрее считать и понимать, как меняются величины.

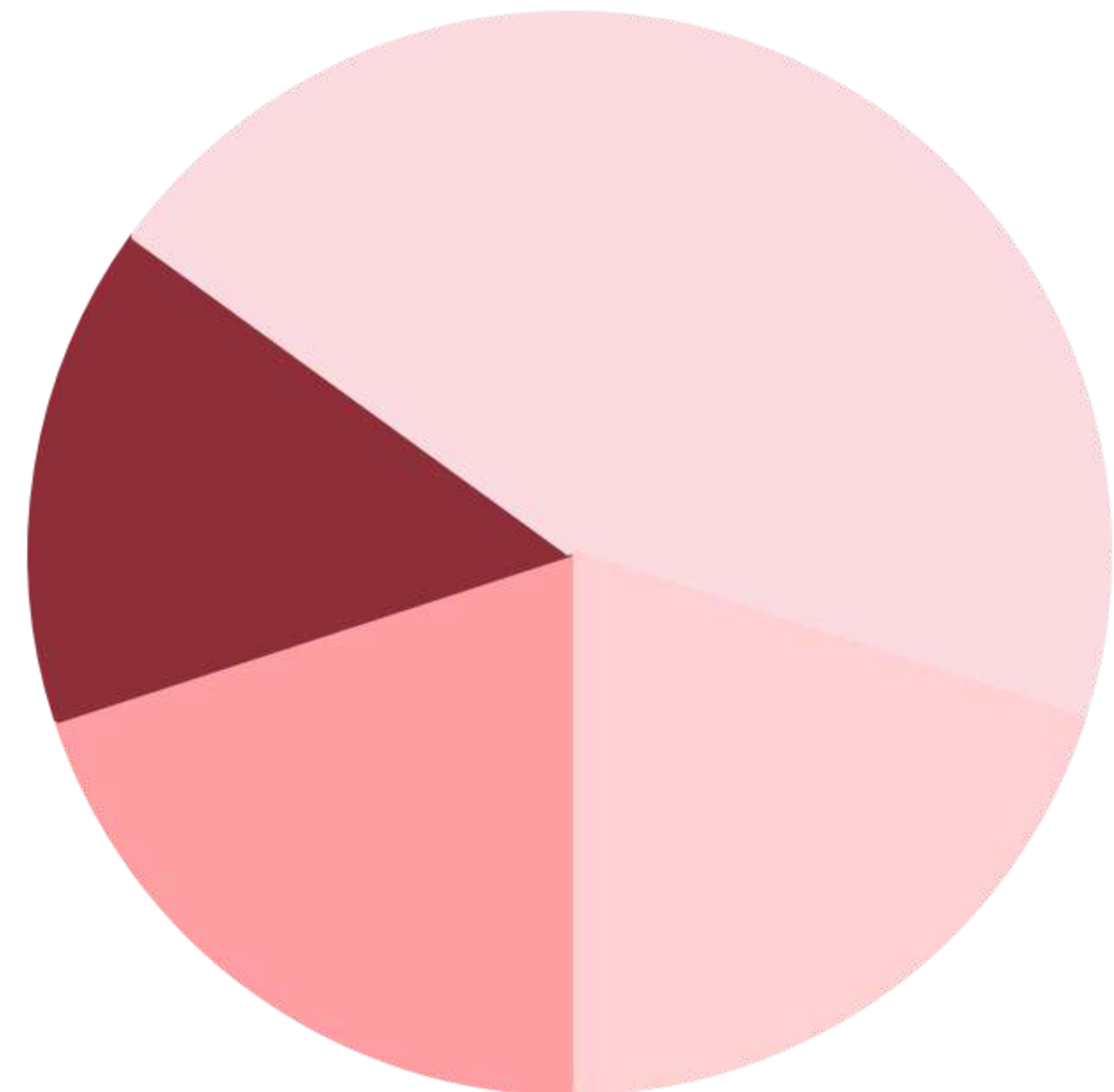
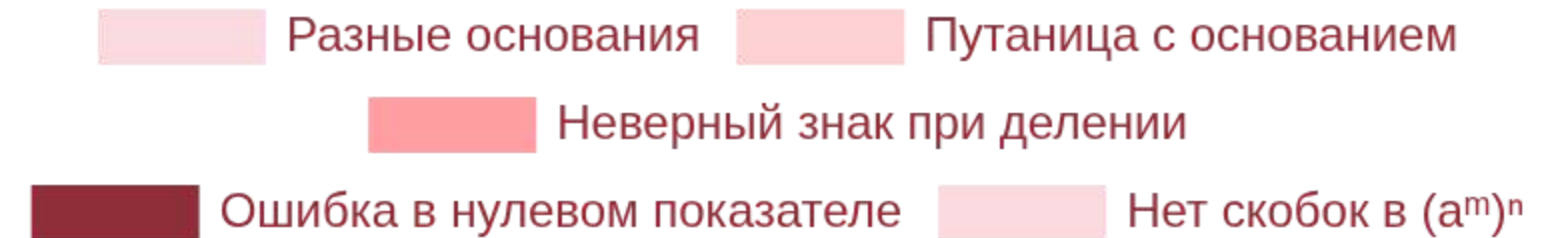


Типичные ошибки при работе со степенями

Чаще всего ошибки появляются, когда правило применяют без проверки основания, знака показателя и наличия скобок в выражении.

Чтобы избежать ошибок, нужно сначала определить вид выражения, а потом выбирать правило преобразования.

Обобщение типичных учебных ошибок при работе со степенями



Как проверять преобразование степеней



Где встречаются степени в жизни и науке

1

Научная запись

Степень 10 помогает коротко записывать большие и маленькие числа. Так удобнее работать с данными в физике, химии и других науках, где важна точность.

2

Информатика

Степени двойки связаны с объёмом памяти и размером информационных единиц. Число $2^{10} = 1024$ часто встречается в компьютерах и цифровых устройствах.

3

Геометрия

Формулы площади и объёма используют степени, потому что они отражают повторяющееся умножение измерений. Это делает расчёты короче и понятнее.

4

Очень большие числа

Степени позволяют записывать результаты без длинных цепочек нулей. Например, $3,2 \cdot 10^4$ и $7,5 \cdot 10^{-3}$ удобно читать и сравнивать между собой.



Практика преобразования выражений



1

Сначала умножение

В выражении $(x^3 \cdot x^4)$: x^2 сначала складывают показатели у одинакового основания, получая x^7 , а затем вычитают показатель при делении.

2

Нулевой показатель

В записи $6^2 \cdot 6^0$ второе слагаемое не меняет результат, потому что $6^0 = 1$. Поэтому итоговое значение остаётся равным 6^2 .

3

Два правила сразу

В выражении $(a^5 : a^3) \cdot a^2$ сначала делят степени, затем умножают. Последовательное применение правил даёт $a^2 \cdot a^2 = a^4$.





Что важно запомнить о степенях

Правила степеней делают вычисления короче и удобнее:
при умножении показатели складываются, при делении —
вычитаются. Нулевой и отрицательный показатели имеют свой
смысл и часто встречаются в задачах.