

Прямая и обратная пропорциональность

Две зависимости, которые часто встречаются в задачах и жизни.



Зачем разбираться в пропорциональност и

Эти зависимости помогают решать задачи на стоимость, скорость, время и работу. Если понять их признаки, можно быстро выбирать формулу, строить таблицы и находить неизвестные значения без лишних вычислений.



Величины и их зависимость



Что называют величиной

Величина — это измеряемое свойство: длина, масса, время, стоимость, скорость или количество предметов. Такие данные можно сравнивать, измерять и записывать числами в задачах.



Как возникает зависимость

Зависимость появляется, когда изменение одной величины влияет на другую. Например, чем больше купили одинаковых тетрадей, тем больше заплатили, а чем быстрее движение, тем меньше времени потребуется.



Способы записи

Одну и ту же зависимость удобно описывать таблицей значений, формулой и графиком. Каждый способ показывает связь между величинами с разных сторон и помогает делать выводы.



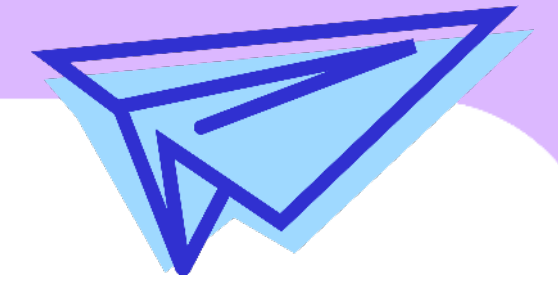
Проверка правила

Если для разных пар чисел действует одно и то же правило, зависимость можно выразить математически. Тогда становится проще находить неизвестные значения и сравнивать случаи.



Практическая польза

Понимание зависимостей особенно полезно в школьных задачах и в быту. Оно помогает быстро оценивать стоимость покупок, время пути, расход материалов и объём выполненной работы.



Прямая пропорциональность: обе величины растут вместе



Общий смысл

При прямой пропорциональности обе величины изменяются в одном направлении: одна увеличивается — другая тоже увеличивается. Если одна уменьшается, то и другая уменьшается.



Формула связи

Такую зависимость записывают формулой $y = kx$. Число k называют коэффициентом пропорциональности: оно показывает, сколько единиц y соответствует одной единице x .



Примеры из жизни

Прямая пропорциональность встречается при покупке одинаковых товаров, расчёте пути при постоянной скорости и других ситуациях, где каждое новое значение связано с одним и тем же множителем.



Как выглядит график

На координатной плоскости такая зависимость изображается прямой линией, которая проходит через начало координат. Это удобно для проверки и сравнения значений.

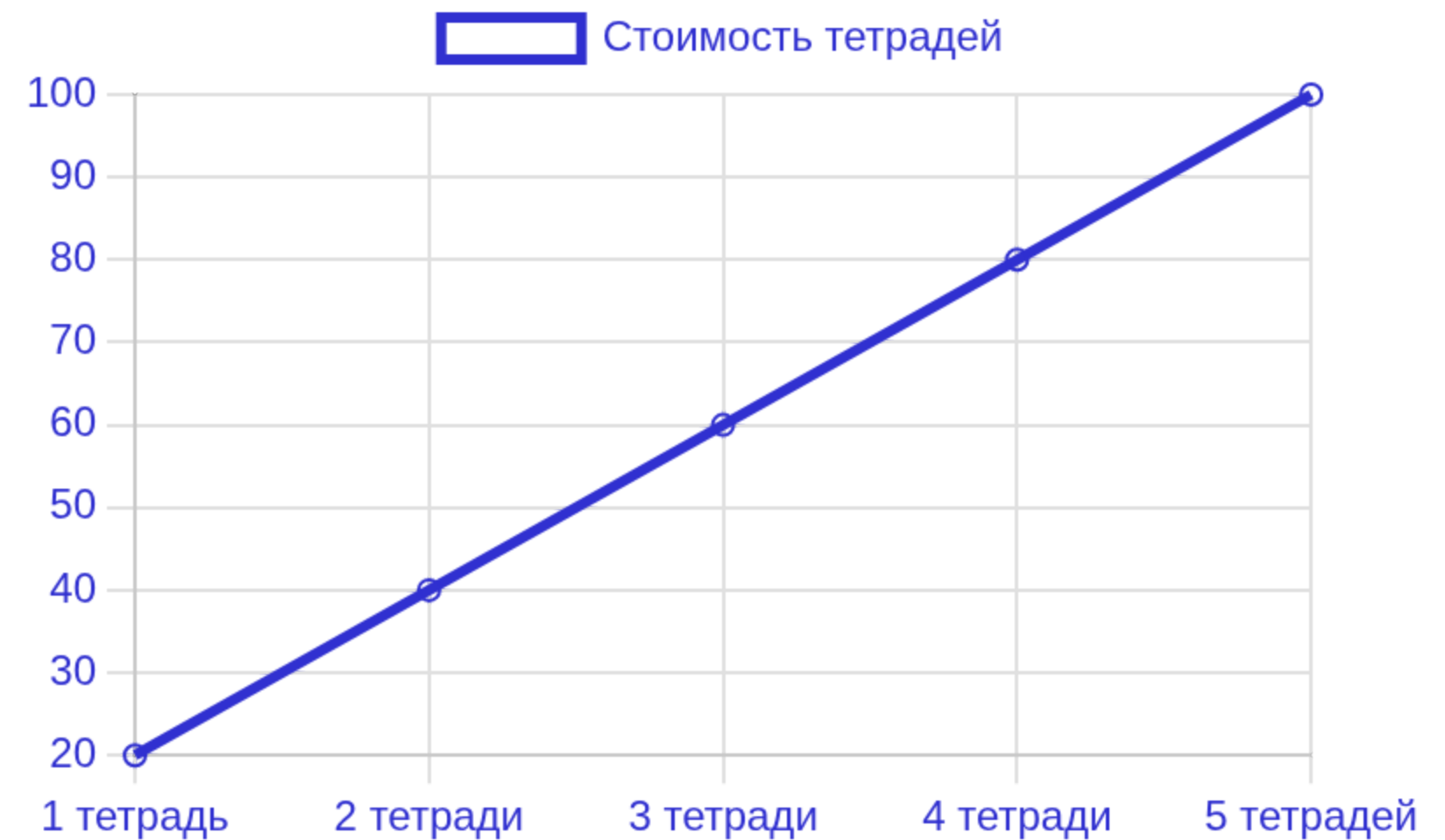


Пример прямой пропорциональности в числах



Если количество тетрадей увеличивается, стоимость меняется по одному и тому же правилу. Это удобно заметить уже по первым двум точкам.

Все значения образуют прямую: отношение стоимости к количеству постоянно и равно 20.



✦ Учебный пример по теме прямой пропорциональности



120

рублей — это цена за 1 килограмм
яблок и постоянный коэффициент k .

Учебный пример: 1 кг яблок стоит 120 рублей

Коэффициент пропорциональности показывает цену
за одну единицу, скорость за один час или другой
постоянный множитель в формуле $y = kx$.



Сравнение значений при прямой пропорции

По таблице легко увидеть, что стоимость растёт вместе с количеством, а отношение y/x не меняется.

Во всех строках стоимость делится на количество одинаково: это признак прямой пропорциональности.

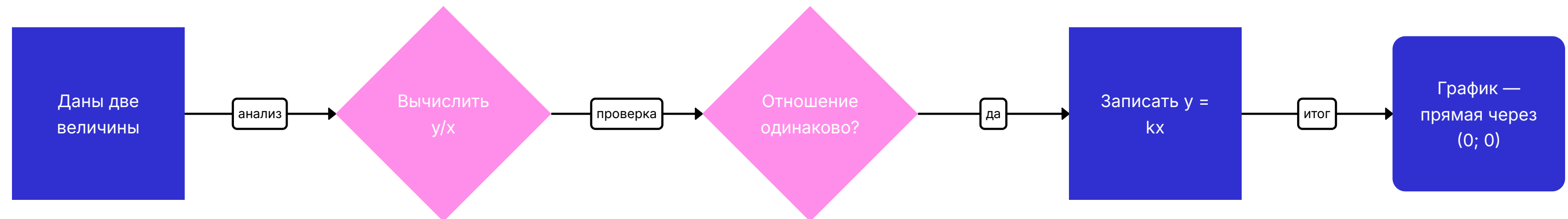
Карандаши	Стоимость
1	15
2	30
3	45
5	75



Учебная модель по формуле $y = 15x$

Как распознать прямую пропорциональность

Схема показывает проверку зависимости по таблице, условию и формуле.



Обратная пропорциональность: одна величина растёт, другая уменьшается



1

Главный признак

При обратной пропорциональности рост одной величины ведёт к уменьшению другой. Это происходит тогда, когда рассматривают один и тот же объём работы, путь или порцию.

2

Формула зависимости

Такую связь записывают формулой $y = k/x$. Здесь значение y зависит от x так, что их произведение остаётся одним и тем же для всех пар.

3

Примеры из задач

Обратная пропорциональность встречается в задачах о числе работников и времени работы, скорости и времени пути, а также о делении порции между разным количеством людей.

4

Что проверяют в таблице

Чтобы распознать такую зависимость, сравнивают произведение $x \cdot y$ для нескольких пар значений. Если оно постоянно, зависимость является обратной пропорциональностью.

Обратная пропорциональность на примере работы



Шесть человек и четыре часа

Если шестеро учеников выполняют одинаковую работу за четыре часа, это означает, что на каждый час приходится определённый общий объём. При неизменной производительности производство числа работников на время остаётся постоянным. Такой вывод удобно показать на схеме с противоположно направленными стрелками.



Почему двенадцать человек справятся быстрее

Когда работников становится вдвое больше, время обычно уменьшается вдвое. Поэтому двенадцать человек могут выполнить ту же работу за два часа, если условия остаются одинаковыми. В таблице это видно сразу: $6 \cdot 4$ и $12 \cdot 2$ дают одно и то же число.



Постоянство производства

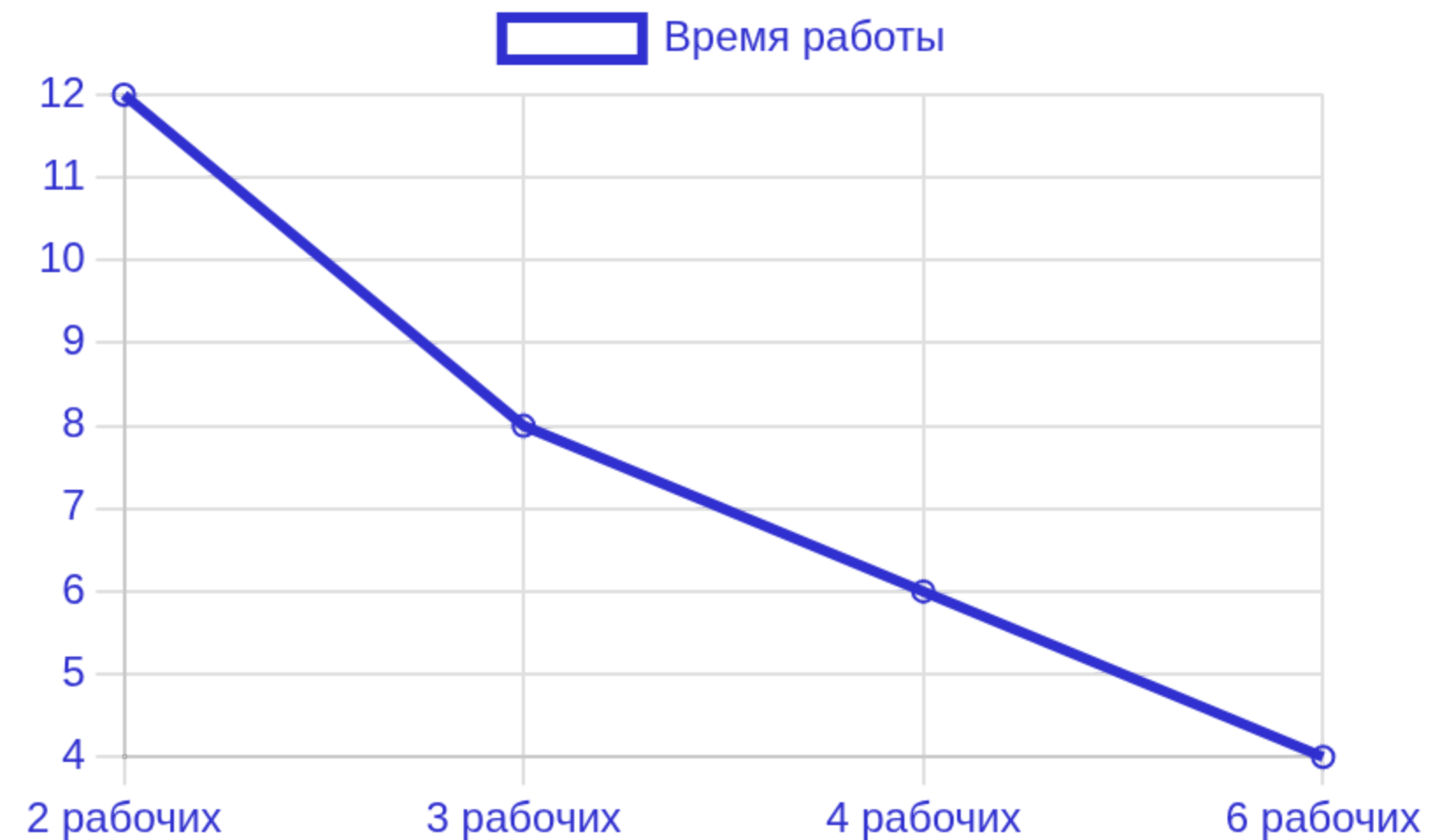
Именно постоянное производство помогает отличить обратную пропорциональность от других зависимостей. Если для разных пар чисел результат меняется, значит, правило другое. В задачах на работу это особенно важно, потому что неверный выбор зависимости ведёт к ошибке в ответе.

График обратной пропорциональности



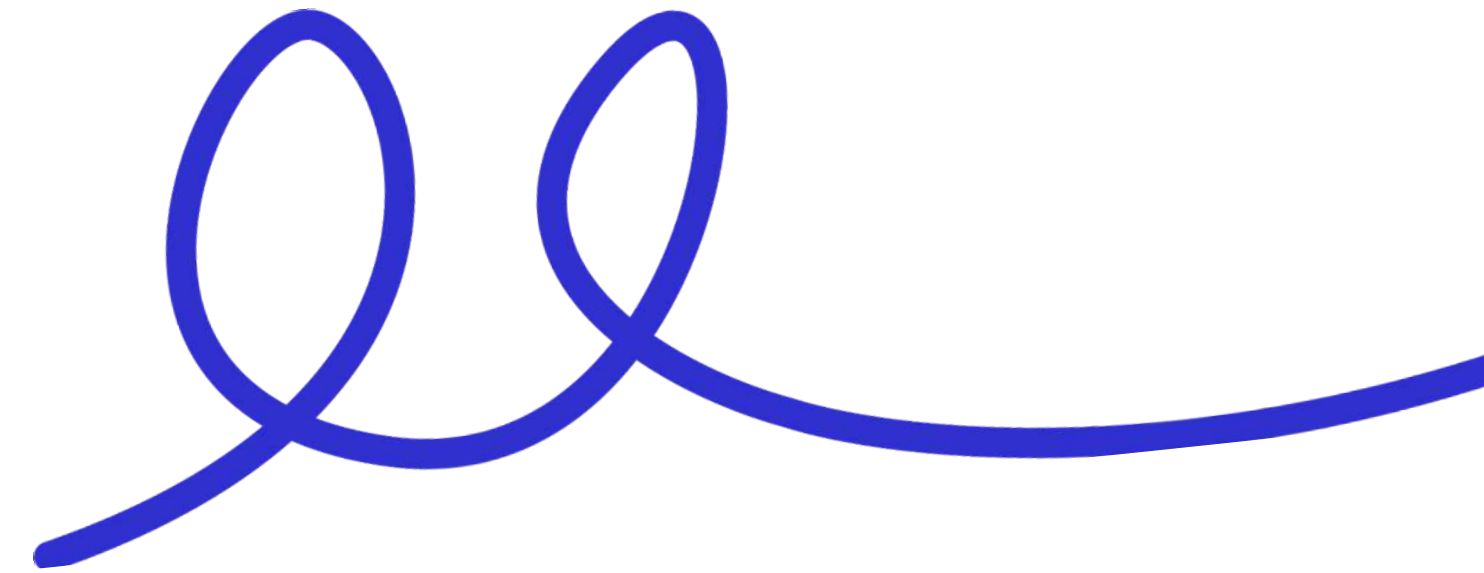
При увеличении числа рабочих каждая точка на графике смещается вниз. Это удобно для сравнения вариантов при одинаковом объёме работы.

Произведение числа рабочих и времени постоянно, значит зависимость обратная. График не является прямой линией.



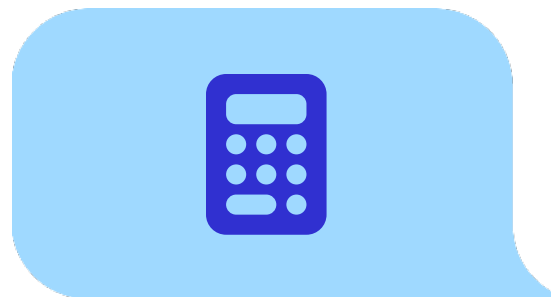
✦ Учебный пример для 7 класса: $2 \times 12 = 3 \times 8 = 4 \times 6 = 6 \times 4 = 24$.

Постоянное произведение в обратной пропорции



Проверка через произведение

Если величины обратно пропорциональны, для каждой пары значений выполняется одно и то же произведение $x \cdot y$. Это главный признак, по которому проверяют зависимость.



Одинаковый результат

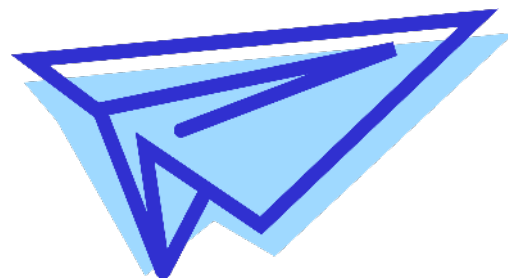
В примерах 2 и 12, 3 и 8, 4 и 6 получаем одно число — 24. Значит, изменение одной величины компенсируется изменением другой.



Когда зависимость не подходит

Если произведения в разных строках получаются разными, это не обратная пропорциональность. В таком случае нужно искать другой способ описать связь между величинами.

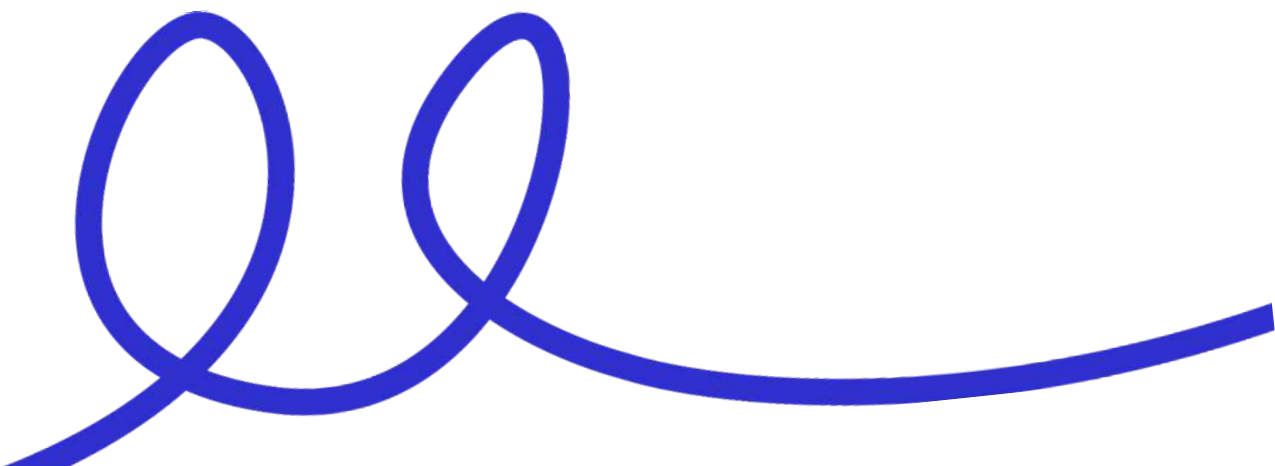
Признаки двух видов зависимости



- Сравнение помогает быстро отличить прямую и обратную пропорциональность по формуле, графику и способу проверки.
- У зависимостей разные признаки: одинаковое отношение у прямой и одинаковое произведение у обратной.

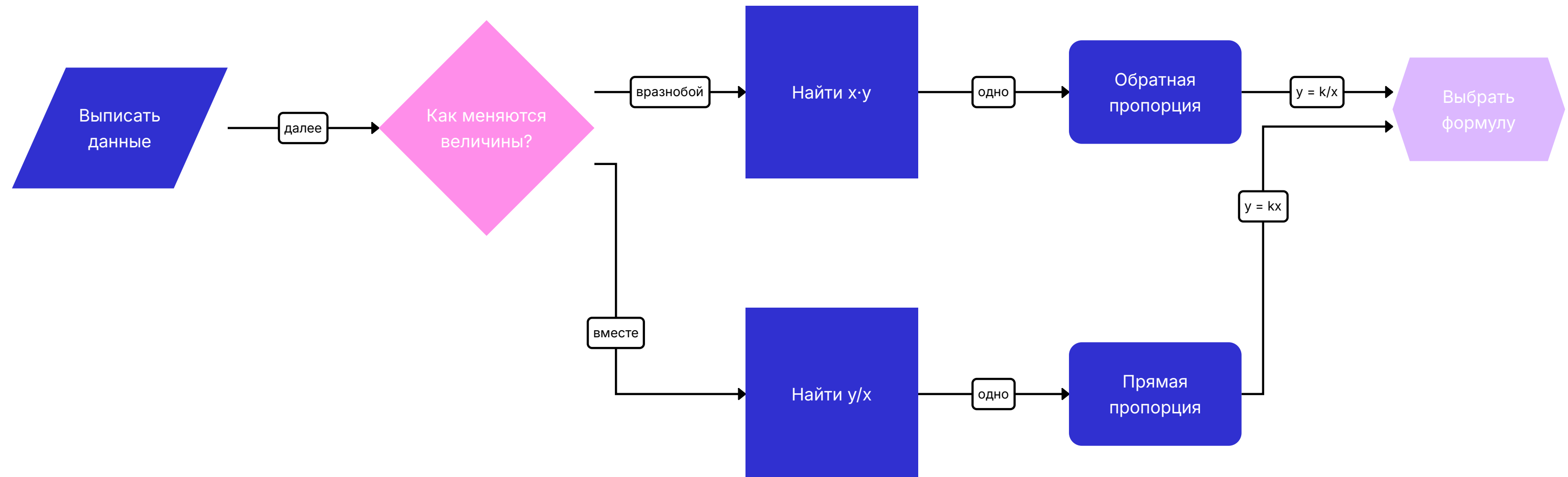
Признак	Прямая	Обратная
Формула	$y = kx$	$y = k/x$
Проверка	y/x	$x \cdot y$
График	Прямая	Кривая

Обобщение правил темы «Прямая и обратная пропорциональность»



Как определить вид зависимости в задаче

Пошаговая проверка по данным условия помогает выбрать правильную формулу и способ решения.

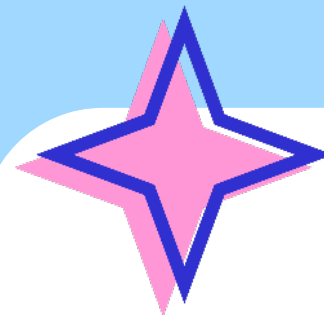


Типичные ошибки при работе с пропорциональностью



Путаница признаков

Самая частая ошибка — перепутать постоянное отношение и постоянное произведение. Из-за этого выбирают неверную формулу и получают неправильный ответ в задаче.



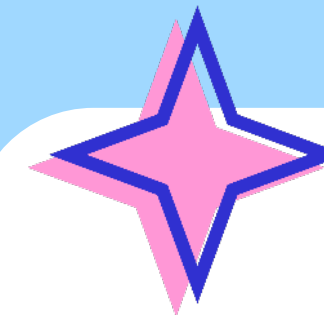
Неверный тип зависимости

Часто считают прямой пропорциональностью ситуацию, где одна величина увеличивается, а другая уменьшается. Для обратной пропорции это нормальное поведение, а не ошибка.



Смешение единиц

Ошибки часто появляются из-за невнимательности к единицам измерения: рублям, штукам, часам, минутам, километрам. Сначала нужно привести данные к одинаковым единицам.



Не та формула

Если данные записаны в разных единицах или неясно, что именно сравнивается, формулу легко выбрать неверно. Поэтому важно сначала понять смысл величин, а затем считать.

Жизненные примеры двух зависимостей



Покупка тетрадей в магазине

Если тетради стоят одинаково, то цена растёт вместе с количеством. Купили больше — заплатили больше. Здесь хорошо работает формула прямой пропорциональности: стоимость зависит от числа товаров.



Работа команды и время

Когда один и тот же объём работы выполняют разные по числу группы, больше работников означает меньше времени. При одинаковой производительности это удобный пример обратной пропорциональности.



Поездка и скорость

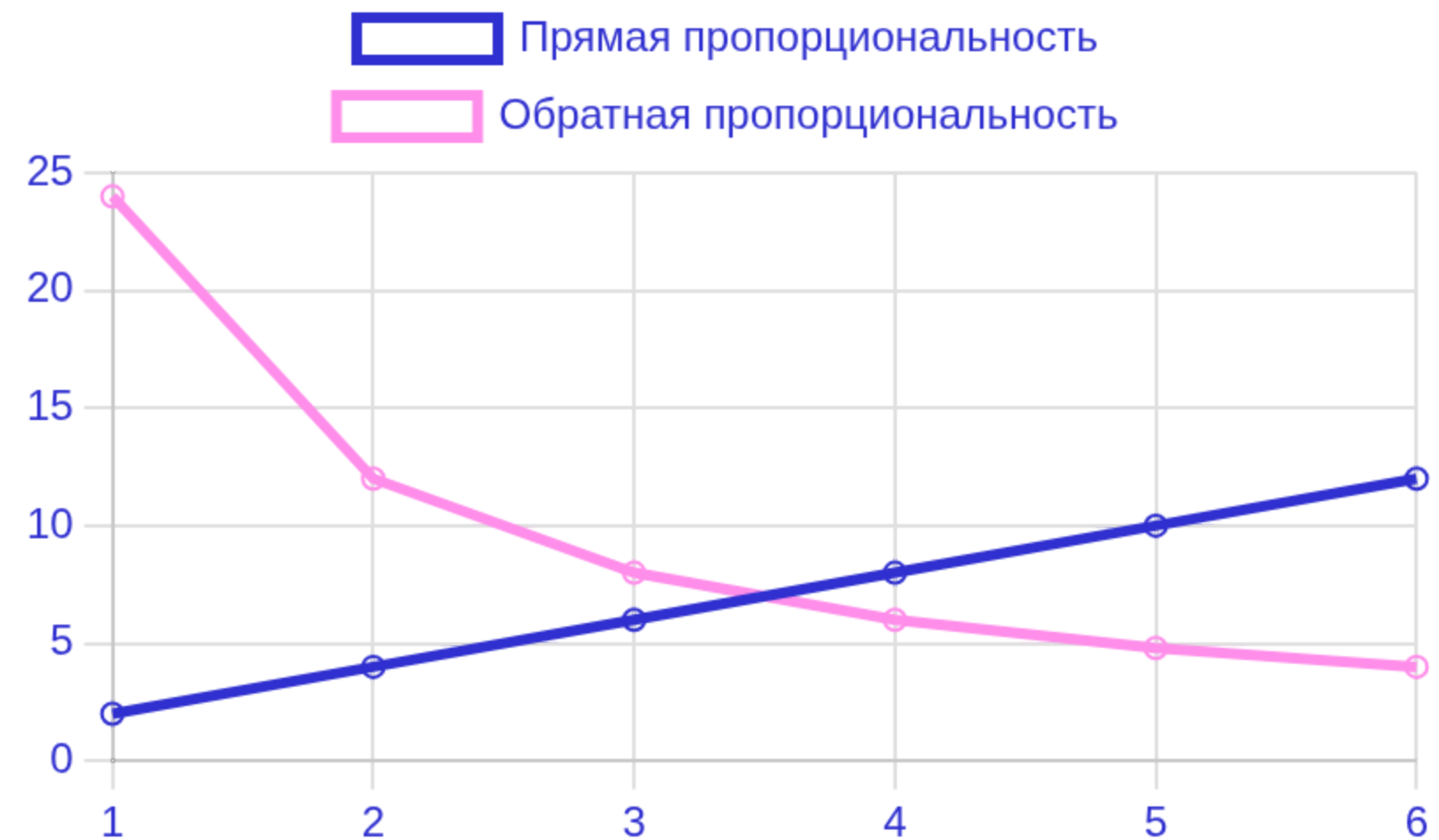
На одном и том же расстоянии быстрее ехать — значит тратить меньше времени. Поэтому скорость и время связаны обратно пропорционально, а их произведение остаётся постоянным для одного пути.

Сравнение графиков на одной координатной плоскости

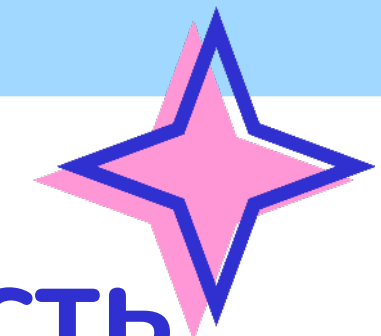


Обе зависимости можно нанести на одну сетку, чтобы увидеть различие не только по формулам, но и по форме линий.

Прямая идёт через начало координат, а обратная образует кривую. По точкам легко определить характер зависимости.



✦ Учебная модель для сравнения графиков: $y=2x$ и $y=24/x$.



Мини-практика: определяем зависимость по таблице

Сравните пары значений и проверьте, сохраняется ли отношение или произведение.

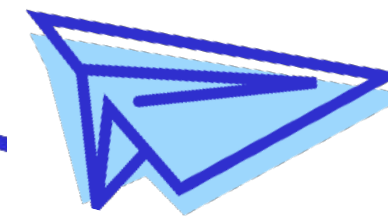
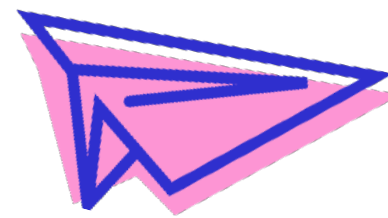
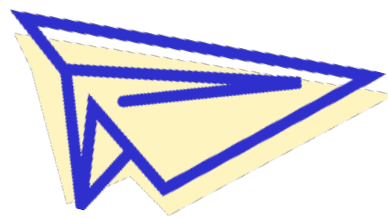
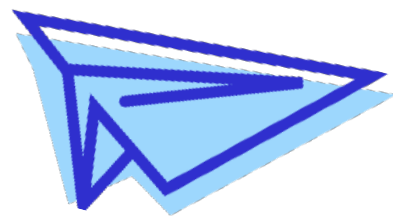
Если сохраняется отношение, зависимость прямая; если сохраняется произведение, зависимость обратная.

Ситуация	Проверка	Вид
Тетради	$18/1=36/2=72/4$	прямая
Краны	$2 \cdot 6=3 \cdot 4=6 \cdot 2$	обратная
Вывод	одно правило	по таблице



Учебные примеры по теме пропорциональности

Алгоритм решения задач на пропорциональность



1. Понять условие

Сначала выделяют две связанные величины и выясняют, что именно меняется: количество, цена, время, скорость или объём работы.

2. Проверить зависимость

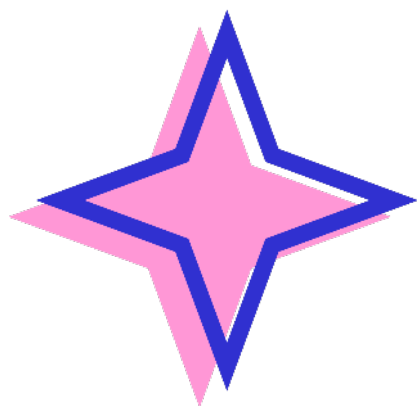
Затем вычисляют отношение y/x или произведение $x \cdot y$ и смотрят, что остаётся постоянным для данных значений.

3. Записать формулу

Если постоянным является отношение, используют $y = kx$. Если постоянным является произведение, записывают $y = k/x$.

4. Найти ответ

После выбора формулы подставляют известные значения и вычисляют неизвестную величину. Такой порядок помогает решать задачи без лишних действий.



Что важно запомнить

Прямая пропорциональность связана с формулой $y = kx$, а обратная — с $y = k/x$. Умение различать их помогает уверенно решать задачи и понимать графики.