

Произведение синусов и косинусов

Преобразуем тригонометрические
произведения в более удобные суммы.



Где используются формулы произведения

Эти формулы помогают упрощать выражения, решать уравнения и преобразовывать записи. В 9 классе особенно важны три случая: $\sin a \cdot \cos b$, $\cos a \cdot \cos b$ и $\sin a \cdot \sin b$.



2

**угла входят в правую
часть формулы: сумма
и разность.**

Преобразование заменяет одно произведение двумя синусами и делает запись удобнее для дальнейших действий.

Формула произведения двух косинусов

1. Запись формулы

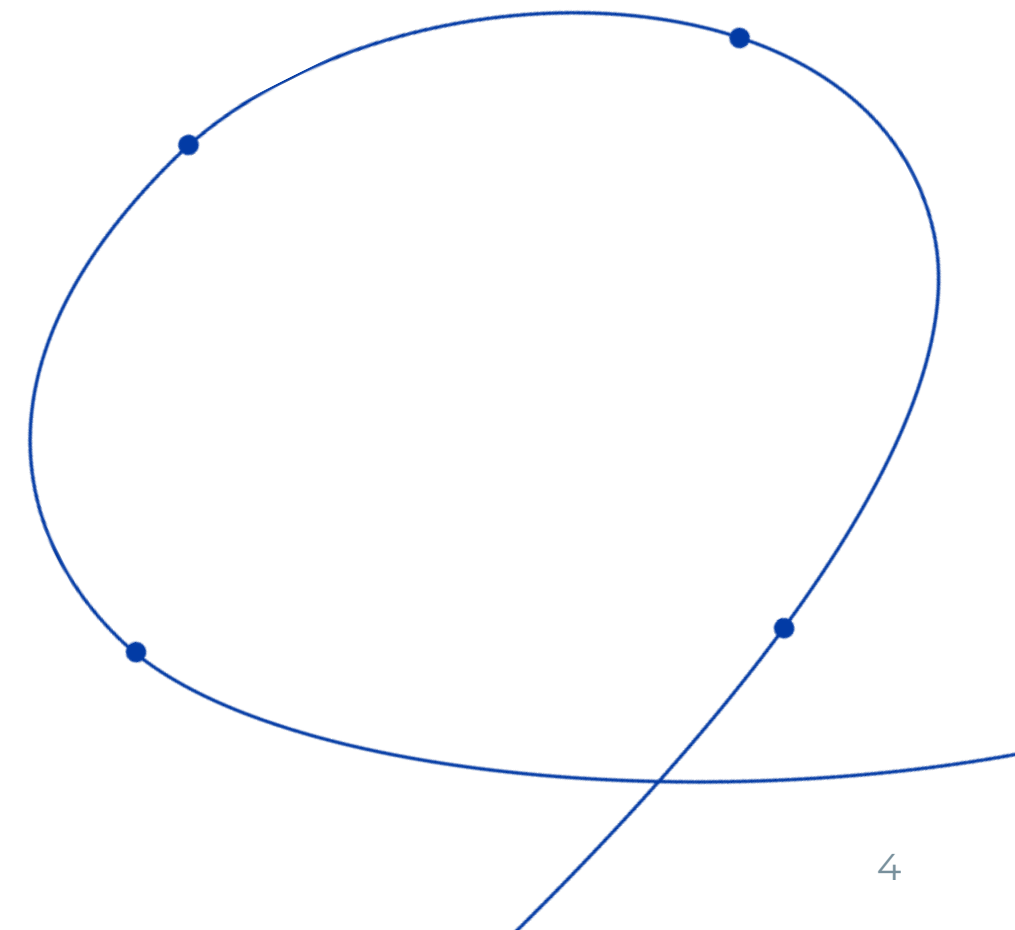
Произведение $\cos a$ и $\cos b$ заменяется половиной суммы двух косинусов: с углами $a+b$ и $a-b$.

2. Что меняется

Вместо умножения появляются две похожие тригонометрические функции, которые легче сравнивать, складывать и сокращать в следующих преобразованиях.

3. Когда полезна

Формула особенно удобна, если в примере нужно убрать произведение и оставить только выражения с косинусами одного типа.



Формула произведения двух синусов

Главная запись

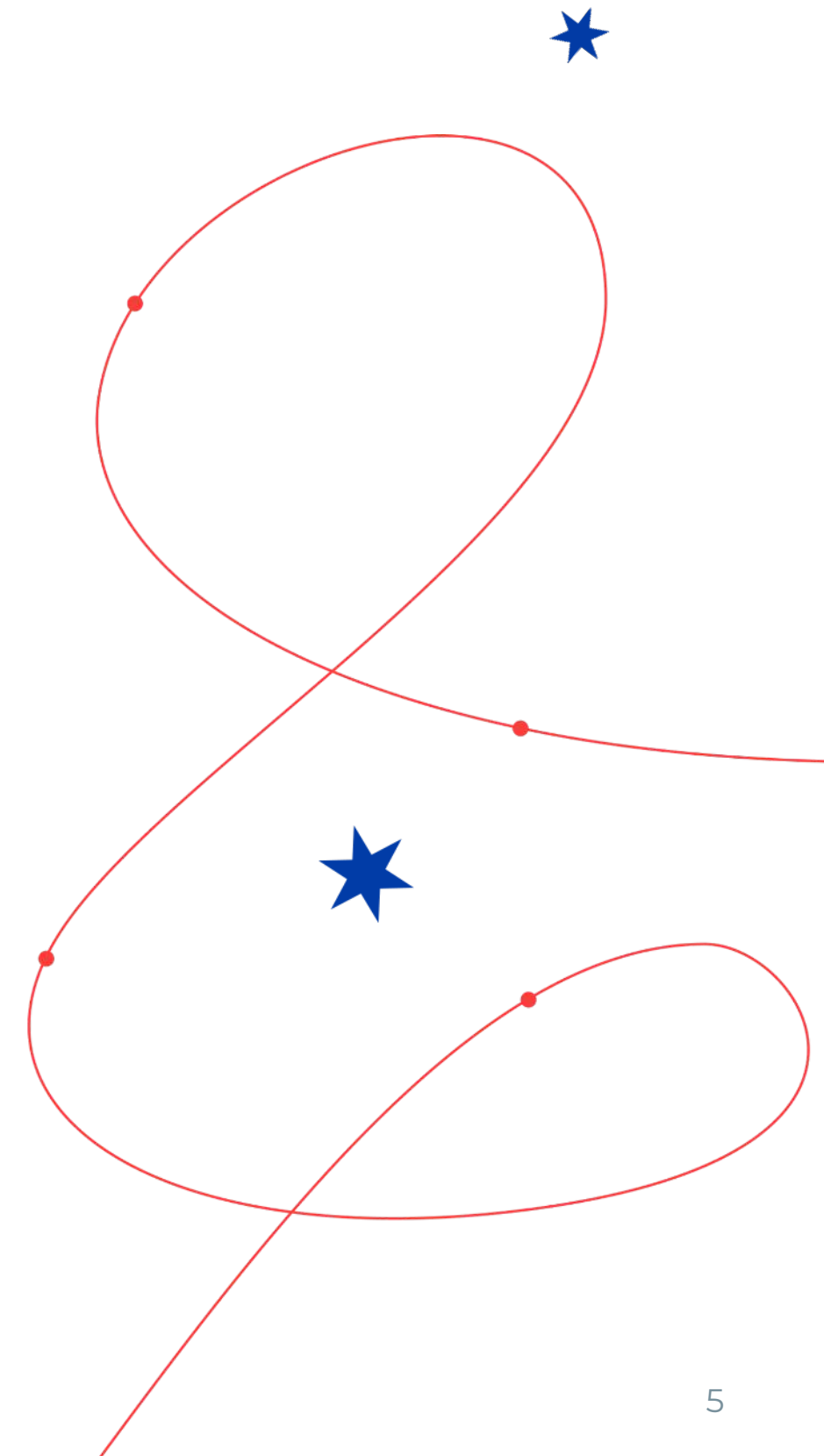
Произведение $\sin a$ и $\sin b$ переходит в разность косинусов с аргументами $a-b$ и $a+b$.

Важный знак

Здесь особенно важно не перепутать порядок слагаемых: сначала стоит $\cos(a-b)$, а затем $\cos(a+b)$.

Практический смысл

После замены выражение часто становится короче и удобнее для последующих вычислений или приведения подобных слагаемых.



Три основные формулы преобразования



Все три записи строятся на одних и тех же углах суммы и разности.

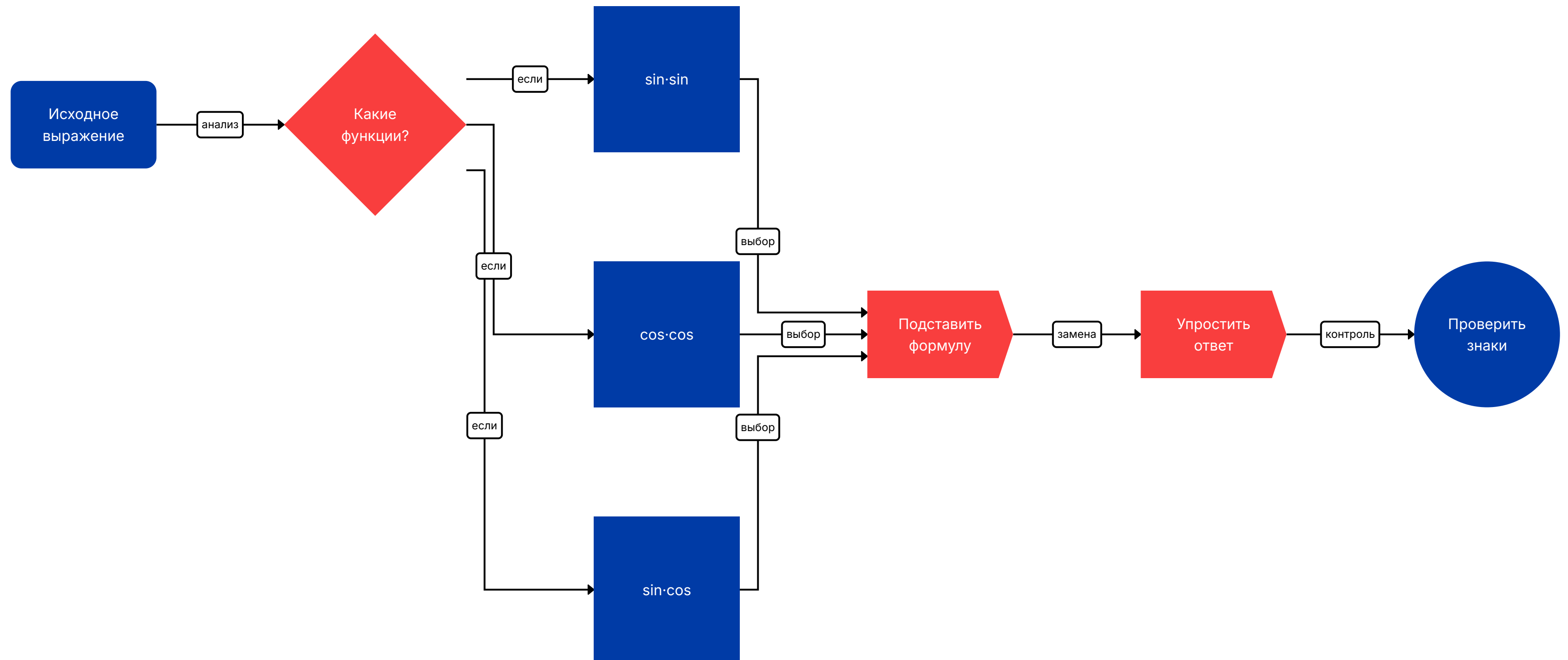
Для выбора формулы нужно сначала определить, какие функции перемножаются. Во всех случаях используются углы $a+b$ и $a-b$.

Вид произведения	Формула	Результат
$\sin a \cdot \cos b$	$\frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$	сумма синусов
$\cos a \cdot \cos b$	$\frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$	сумма косинусов
$\sin a \cdot \sin b$	$\frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$	разность косинусов



Как выбрать нужную формулу

Схема показывает последовательность действий при преобразовании тригонометрического произведения.



Какие преобразования встречаются чаще всего

★  $\sin \cdot \cos$ $\cos \cdot \cos$ $\sin \cdot \sin$ Смешанные выражения



Условная схема типовых заданий по теме, 9 класс



Диаграмма показывает типы школьных заданий по теме. На практике часто встречаются выражения, где нужно не только заменить произведение, но и продолжить упрощение.

Чаще всего требуется работать со смешанными примерами и упрощением выражений, а не только с одной формулой.



Связь с формулами суммы и разности

Общий источник

Формулы произведения получаются из формул синуса и косинуса суммы, поэтому в них появляются одни и те же углы $a+b$ и $a-b$.

Два направления

Из формул суммы можно получить формулы произведения, а в обратную сторону — снова перейти к более привычной записи с суммой или разностью.

Почему это важно

Такая связь помогает видеть, что тригонометрические формулы не существуют отдельно, а образуют единую систему преобразований.



Пример вычисления по формуле



1.

Подставляем значения

Берём $a = 30^\circ$ и $b = 60^\circ$. Тогда $\sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ$ заменяем по формуле $\sin a \cdot \cos b$.

2.

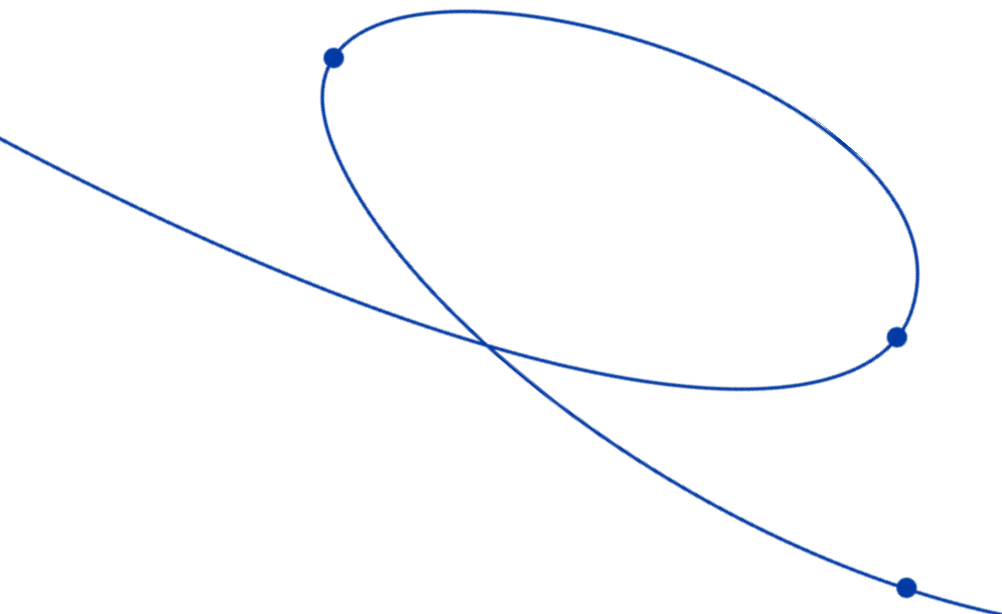
Считаем углы

Получаем $\frac{1}{2}[\sin 90^\circ + \sin(-30^\circ)]$.
Из таблицы значений знаем, что $\sin 90^\circ = 1$, а $\sin(-30^\circ) = -\frac{1}{2}$.

3.

Находим ответ

После подстановки выходит $\frac{1}{2}[1 - \frac{1}{2}] = \frac{1}{4}$. Преобразование позволяет быстро получить точный результат без лишних вычислений.

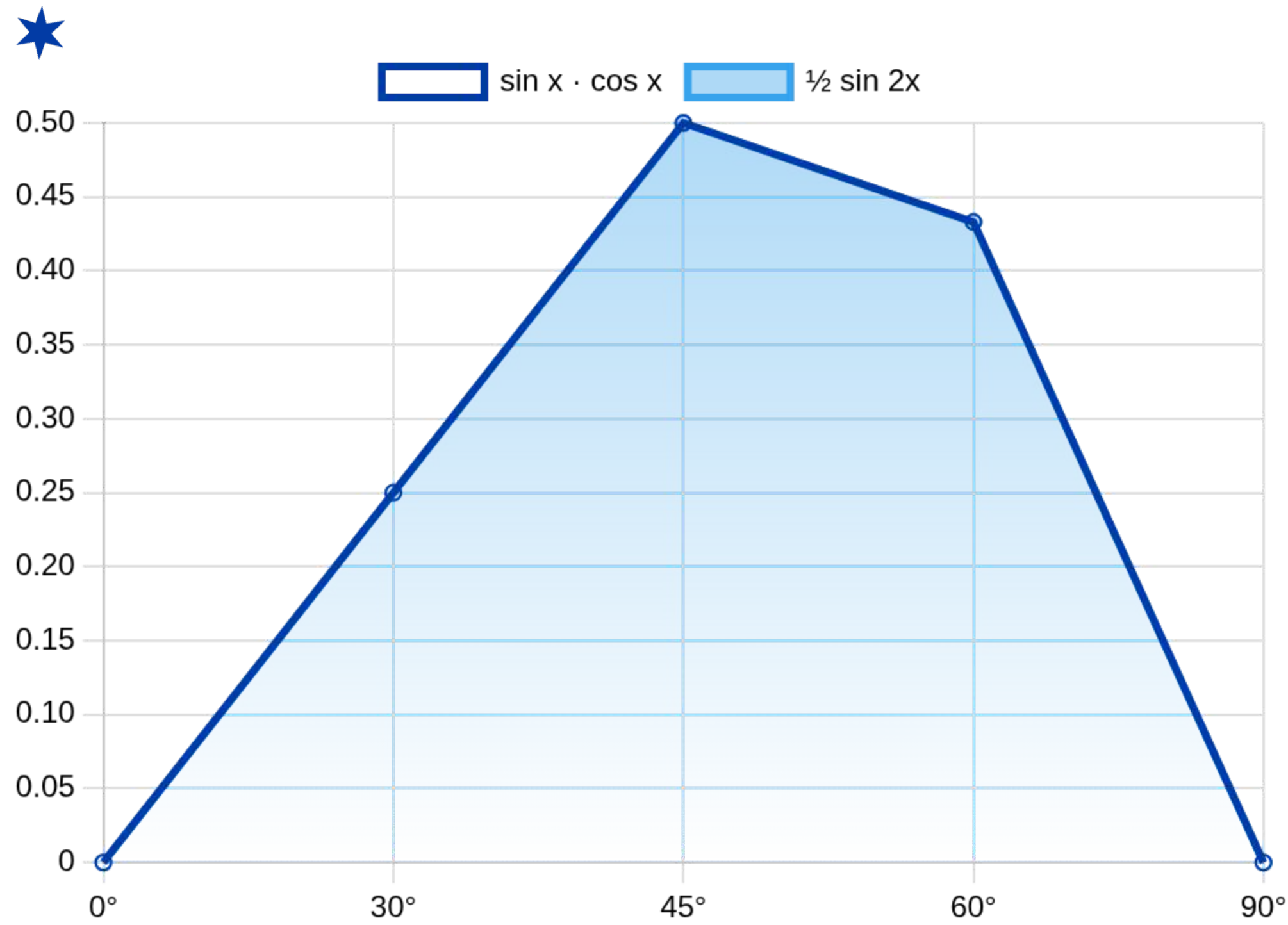


2

**В формуле появятся
два косинуса с разными
аргументами вместо
одного произведения.**

После замены выражение легче сравнивать
с другими слагаемыми и приводить к общему
виду.

Связь $\sin x \cdot \cos x$ и $\frac{1}{2} \sin 2x$



Школьная формула: $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$.

Эта запись особенно полезна, когда в задаче встречается один и тот же угол и требуется быстро перейти к форме с удвоенным аргументом.

Графики совпадают, значит формула верна для всех значений x и напрямую связывает произведение с формулой двойного угла.

Что делает преобразование удобным



Меньше лишних действий

После замены произведения на сумму или разность исчезает умножение между тригонометрическими функциями. Это делает выражение короче и уменьшает риск ошибок при дальнейших преобразованиях.



Одинаковые типы функций

В правой части часто появляются только синусы или только косинусы. Их легче складывать, вычитать и сравнивать, особенно если в выражении есть несколько похожих частей.



Проще использовать дальше

Преобразованная запись удобна для подстановки, приведения подобных слагаемых и решения уравнений. Ученику легче увидеть общий вид выражения и выбрать следующий шаг.



Табличные значения, которые часто нужны

Значения для стандартных углов помогают быстро применять формулы без лишних вычислений.

Для стандартных углов произведение можно найти сразу, если помнить табличные значения синуса и косинуса.

Угол	$\sin / \cos$	Пример произведения
0°	0 и 1	0
30° и 60°	$\frac{1}{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$
45° и 90°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ и 1 или 0	$\frac{1}{2}$ или 0

Как не допустить ошибок

1. Проверяйте знак

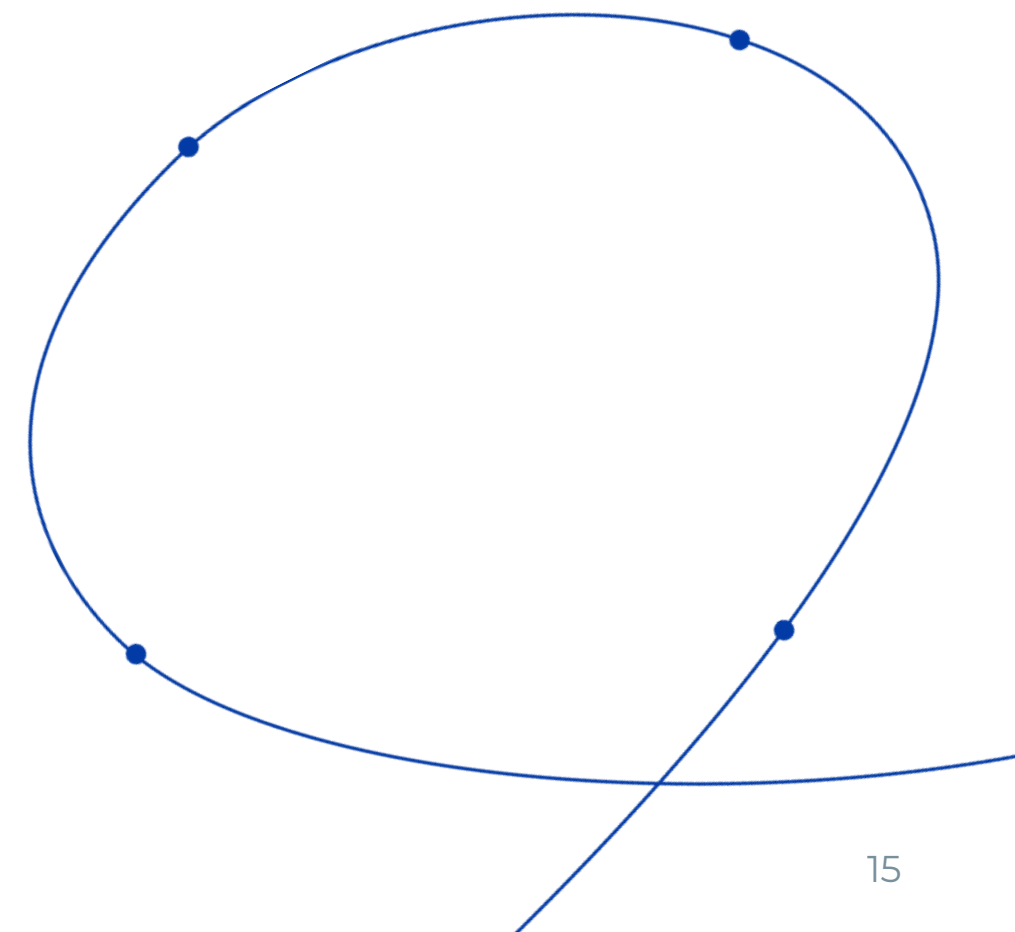
В формуле для $\sin a \cdot \sin b$ справа стоит разность косинусов, поэтому нельзя автоматически ставить плюс. Ошибка со знаком меняет весь результат и делает преобразование неверным.

2. Не теряйте два аргумента

В формулах обязательно присутствуют $a+b$ и $a-b$. Если оставить только один аргумент, часть информации исчезнет, и выражение уже не будет равносильно исходному произведению.

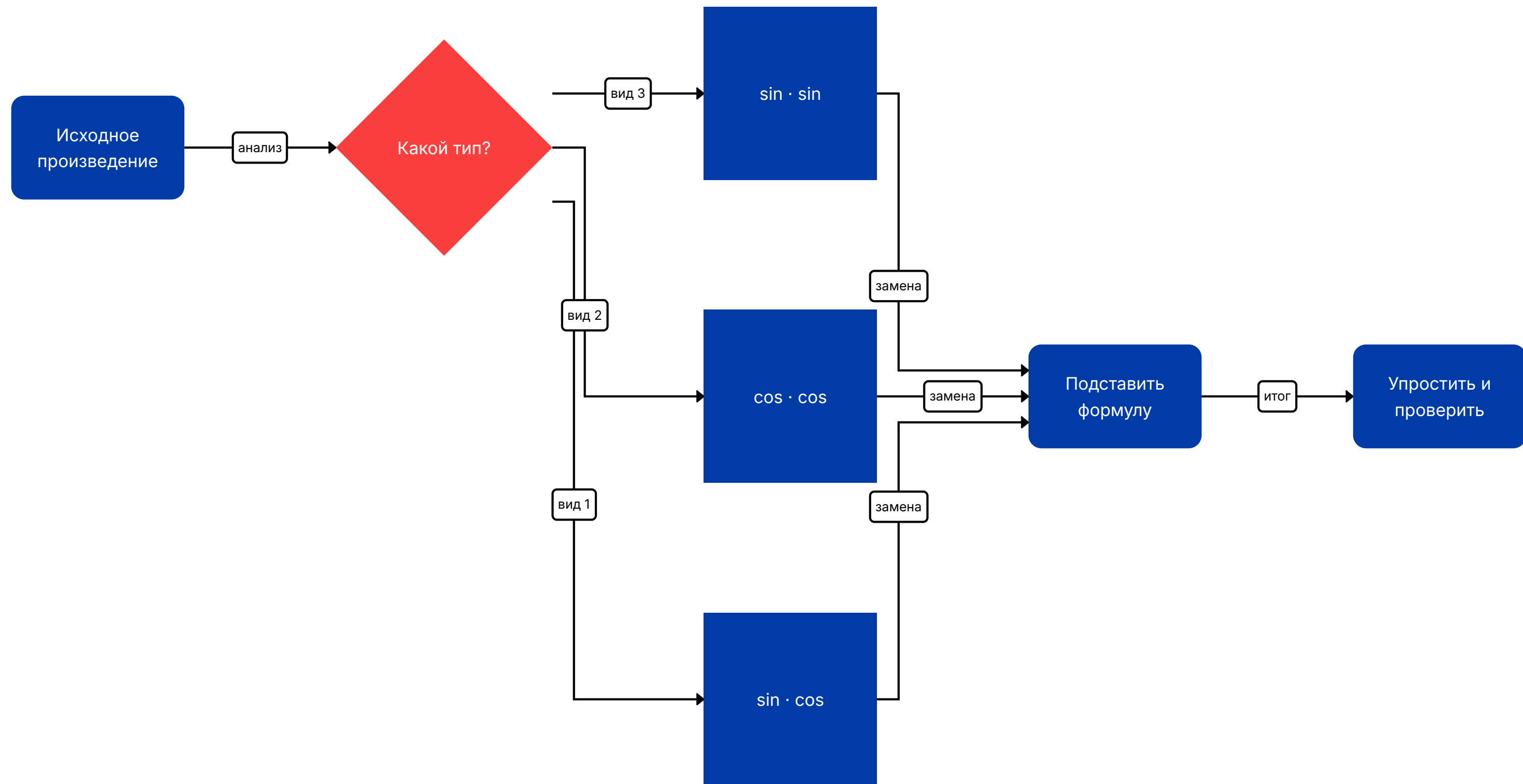
3. Не путайте виды формул

Формулы произведения похожи на формулы суммы и разности углов, но решают разные задачи. Сначала нужно понять, что именно дано: произведение функций или выражение с углами.



Пошаговый способ преобразования

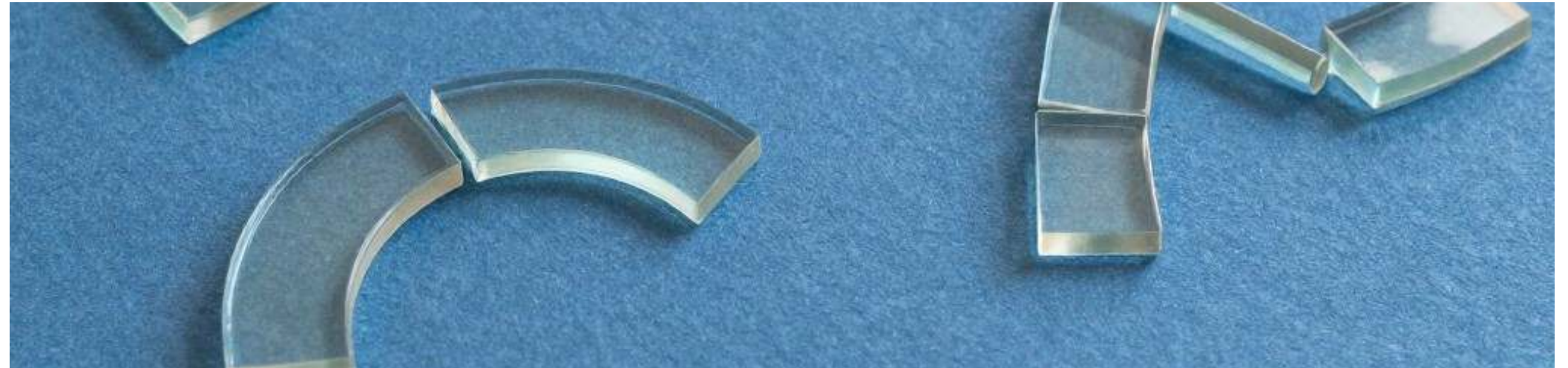
Алгоритм основан на выборе нужной тригонометрической формулы по виду произведения.



Где встречаются такие преобразования

Задачи на упрощение выражений

В учебных примерах произведения синусов и косинусов часто мешают увидеть общий вид выражения. После преобразования появляются суммы и разности, с которыми удобнее работать дальше. Поэтому такие формулы помогают быстрее довести решение до конца.



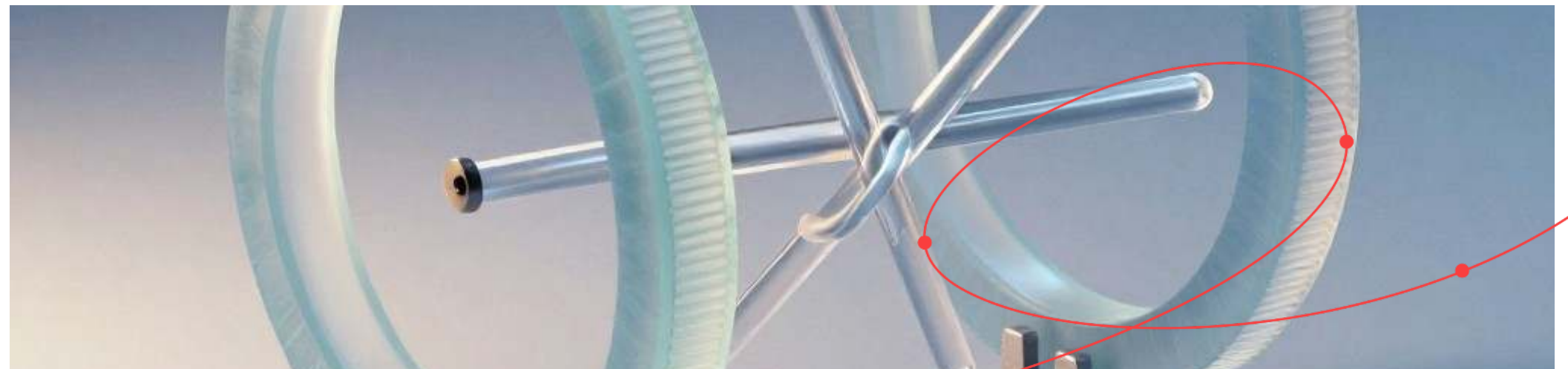
Тригонометрия и колебания

Синусоиды описывают повторяющиеся процессы: движение маятника, изменение звука, колебания пружины. Когда в задаче встречаются произведения функций, их удобно переводить в более наглядную форму. Тогда связь с графиком становится понятнее.

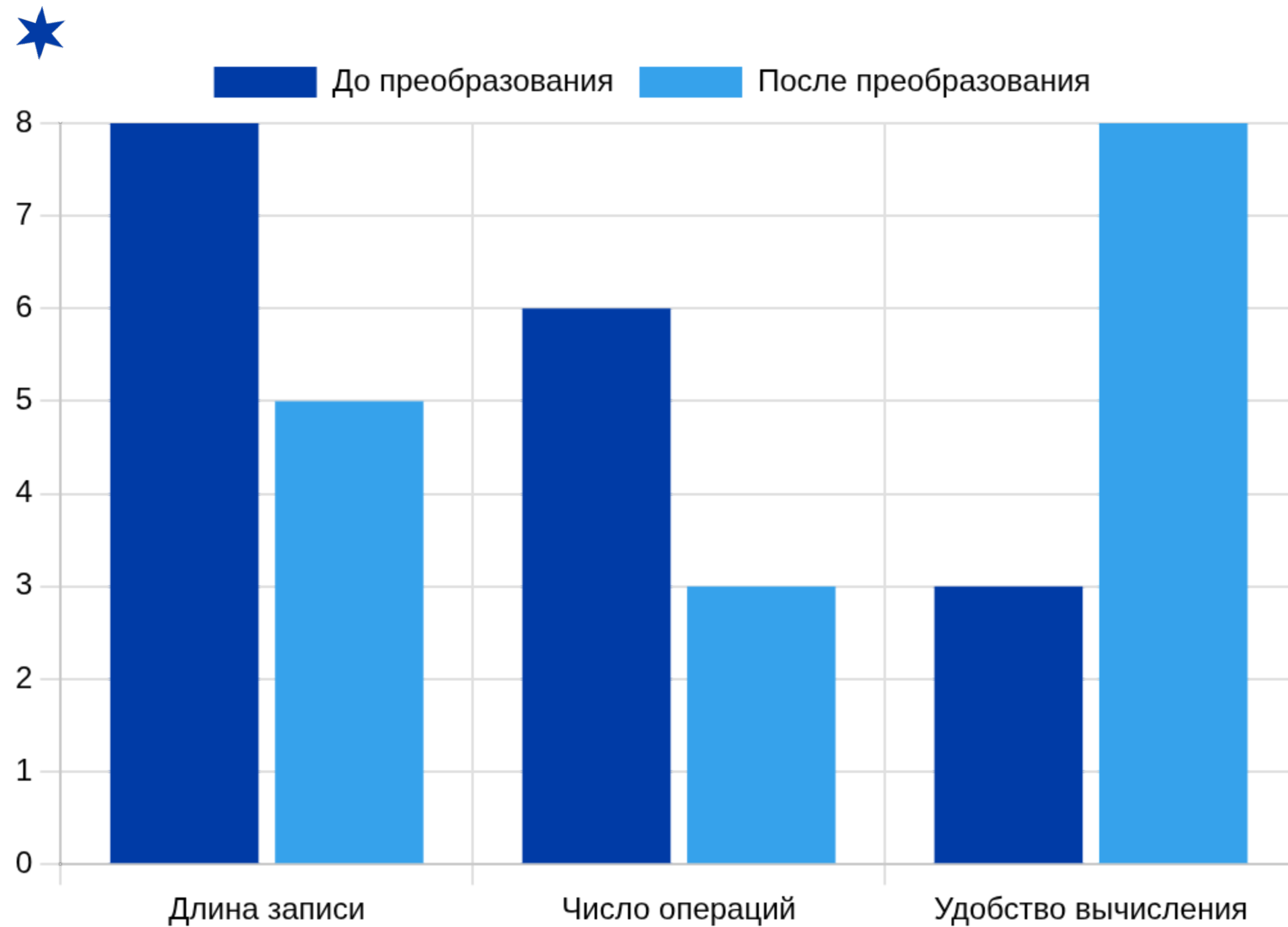


Подготовка к уравнениям

При решении тригонометрических уравнений важно уметь раскрывать сложные записи и приводить похожие части к одному виду. Формулы произведения помогают убрать лишнее умножение и увидеть, какие значения углов нужно сравнивать.



Сравнение выражения до и после преобразования



Сравнение основано на свойствах формул преобразования произведений синусов и косинусов.

На практике особенно заметно, что исчезает лишнее умножение, а структура записи становится более прозрачной для последующих шагов.

После применения формул выражение короче и проще для вычислений, поэтому преобразование экономит время и снижает риск ошибки.

Краткое повторение основных формул

Синус и косинус

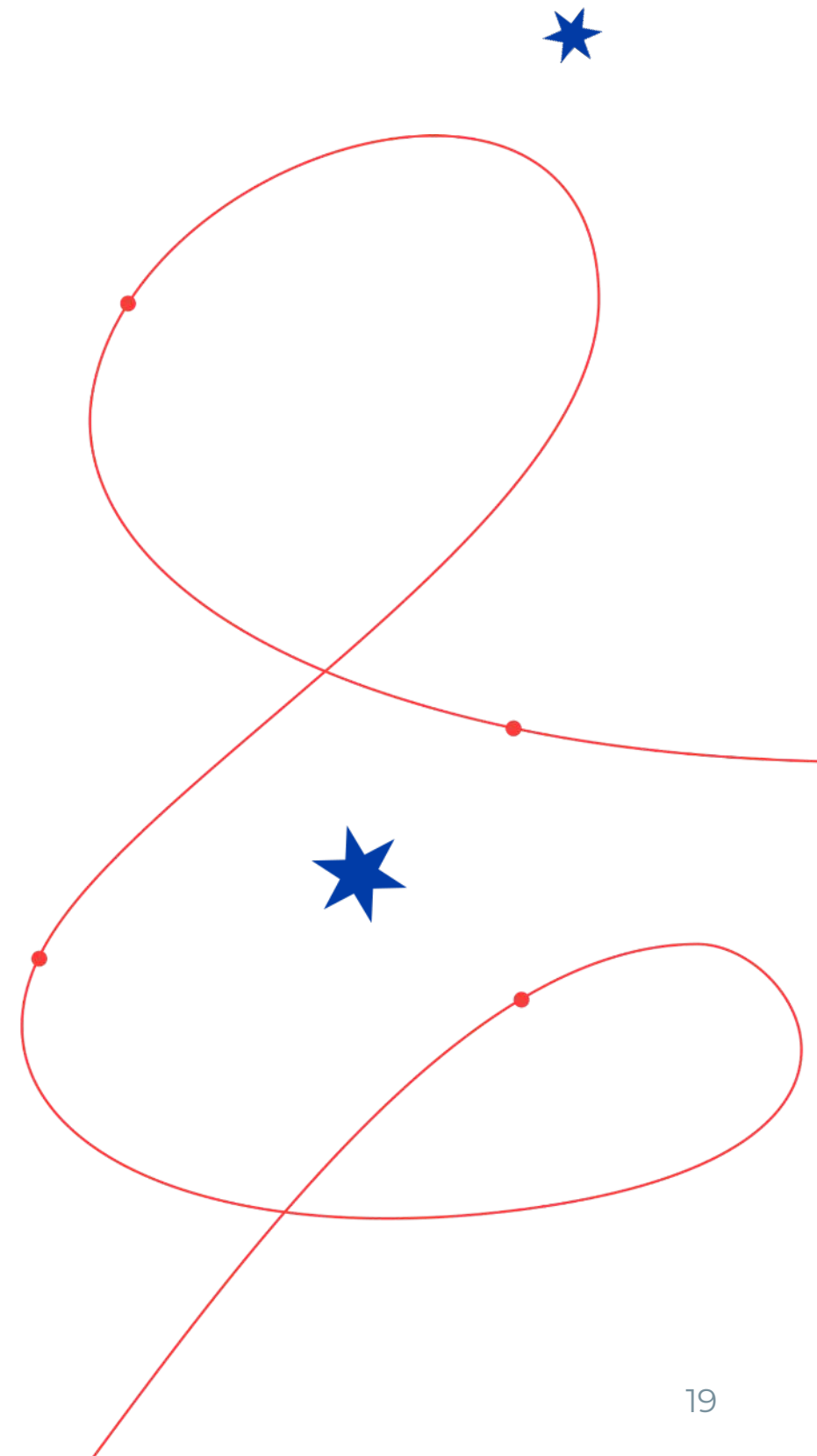
Произведение $\sin a \cdot \cos b$ удобно заменять суммой двух синусов. В результате появляются аргументы $a+b$ и $a-b$, что помогает быстрее упростить выражение.

Два косинуса

Для $\cos a \cdot \cos b$ получается сумма двух косинусов. Эта запись полезна, когда нужно убрать произведение и оставить функции одного типа с разными аргументами.

Два синуса

Формула $\sin a \cdot \sin b$ превращает произведение в разность косинусов. Здесь особенно важно точно соблюдать порядок слагаемых, чтобы не изменить знак ответа.



Что важно запомнить

Формулы произведения переводят синусы и косинусы в сумму или разность, делая выражения короче и понятнее. Это помогает в вычислениях, уравнениях и при изучении двойного угла.

