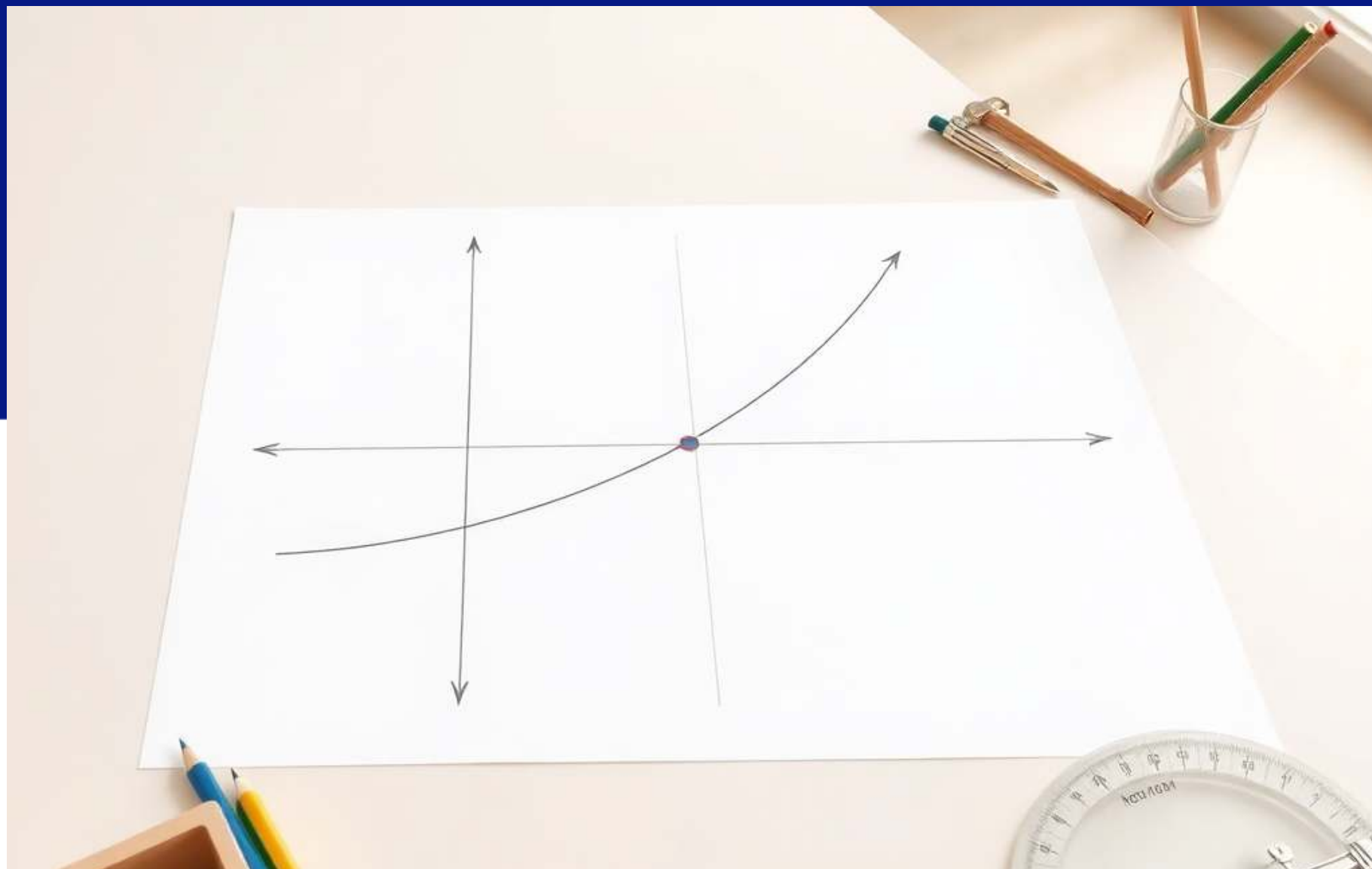


Уравнение $\operatorname{tg} x = a$: смысл, решение и графическая интерпретация



Разберём, как находить все решения и читать их на графике.

Как эта тема связывает формулы и графики

Уравнение $\operatorname{tg} x = a$ помогает увидеть, как свойства функции превращаются в общий ответ, а периодичность и область определения становятся не формальностью, а рабочим инструментом решения задач.



Тангенс, область определения и значение параметра a

Определение тангенса

Тангенс задаётся отношением $\sin x$ к $\cos x$. Поэтому он существует только там, где $\cos x$ не обращается в ноль, иначе дробь не определена.

Где $\tan$ не существует

Точки $x = \pi/2 + \pi n$ исключаются из области определения, потому что в них косинус равен нулю. Именно эти значения нельзя подставлять в ответ.

Почему подходит любое a

Функция $\tan$ принимает все действительные значения, от минус бесконечности до плюс бесконечности. Поэтому уравнение $\tan x = a$ имеет решения при любом действительном a .

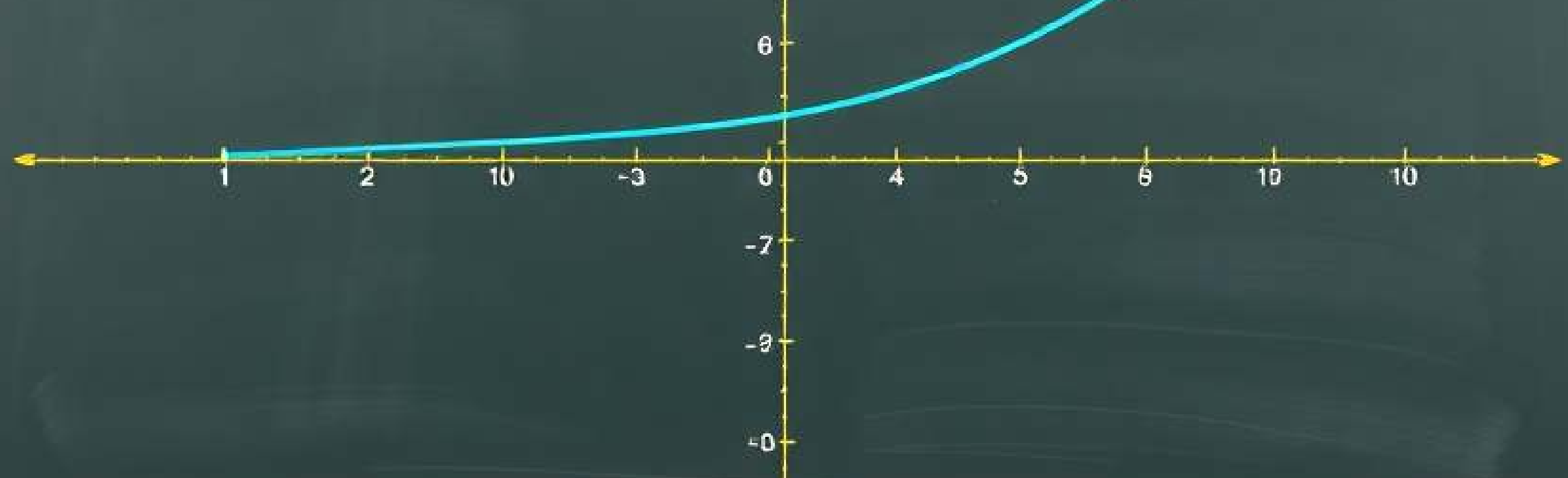


График $y = \operatorname{tg} x$ и прямая $y = a$

Ветви графика

График тангенса состоит из отдельных ветвей, повторяющихся через π . Между ними проходят вертикальные асимптоты, разрывающие линию и подчёркивающие периодичность функции.

Пересечение с $y = a$

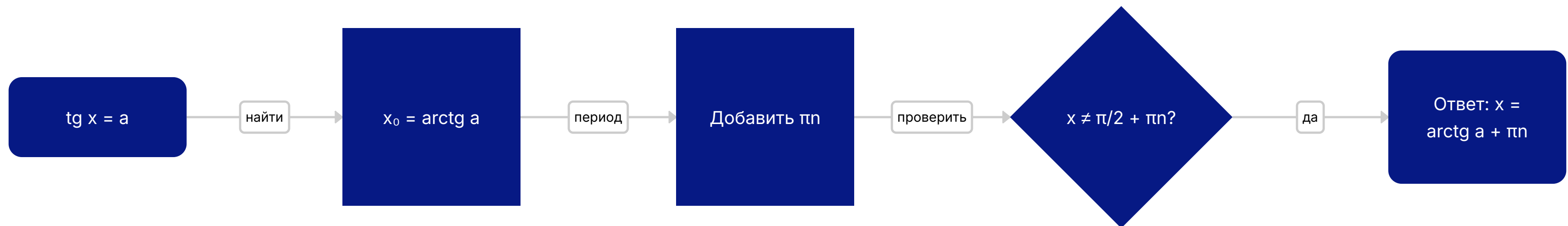
Горизонтальная прямая $y = a$ пересекает каждую ветвь ровно один раз. Это сразу показывает, почему на каждом промежутке длины π есть единственный корень.

Бесконечное число решений

Поскольку ветви повторяются бесконечно много раз, на всей числовой прямой решений тоже бесконечно много. График наглядно связывает это свойство с периодом π .

Алгоритм решения уравнения $\operatorname{tg} x = a$

Последовательность шагов для получения общего решения и проверки допустимости корней



Общее решение уравнения $\operatorname{tg} x = a$

1. Найти главное значение

Сначала определяют основное значение $\operatorname{arctg} a$. Оно выбирается из интервала $(-\pi/2; \pi/2)$, чтобы каждому числу a соответствовал единственный угол без двусмысленности.

2. Учесть период

Затем к найденному углу прибавляют πn , где n — любое целое число. Так описываются все повторяющиеся решения на бесконечной числовой прямой.

3. Записать общий ответ

Итоговая форма записи выглядит так: $x = \operatorname{arctg} a + \pi n$. Это стандартный ответ для уравнений с тангенсом и обязательная часть школьного решения.

Число решений на разных промежутках

Диаграмма сравнивает три ситуации и подчёркивает, что периодичность создаёт повторяемость корней на всей оси.

На каждом рабочем промежутке корень единственный, а в точках разрыва решений нет.



Свойства функции $y = \operatorname{tg} x$ и период π .

Таблица стандартных значений и ответов

а	х
0	πn
1	$\pi/4 + \pi n$
-1	$-\pi/4 + \pi n$
$\sqrt{3}$	$\pi/3 + \pi n$

Табличные значения тангенса для специальных углов.

Связь между табличными значениями тангенса и общим видом решения удобно использовать для быстрой проверки.

Все примеры строятся по одной схеме: главное значение плюс период π .

Частные случаи: $a = 0$ и большие по модулю значения

Когда $a = 0$

Если a равно нулю, уравнение сводится к $\operatorname{tg} x = 0$. Его решения — точки пересечения графика с осью Ox , то есть $x = \pi n$.

Большие положительные a

При очень больших положительных значениях a корень смещается к асимптоте $x = \pi/2 + \pi n$ слева. Значение $\tan x$ там быстро растёт и остаётся конечным только слева.

Большие отрицательные a

При очень больших отрицательных значениях a решение приближается к той же асимптоте справа. Это отражает резкое убывание значений $\tan x$ вблизи разрыва.



Едини́чная окру́жность и знак тангенса

Связь с координатами

На единичной окружности $\tan x$ выражается как отношение y к x для точки, где x не равен нулю. Поэтому знак тангенса зависит от сочетания координат точки.

Где тангенс положителен

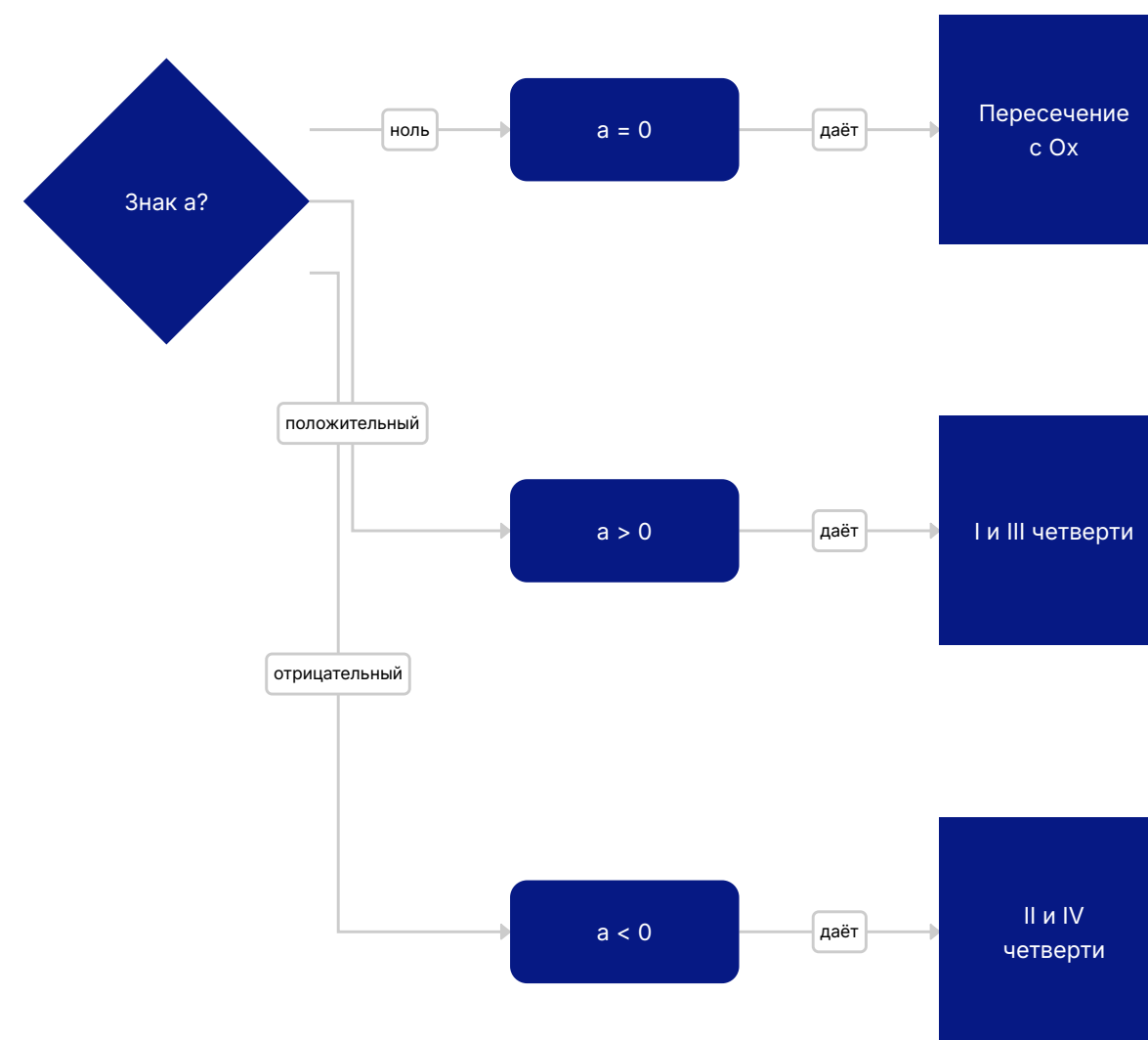
В первой и третьей четвертях координаты x и y имеют одинаковый знак, значит $\tan x$ положителен. Это помогает заранее определить возможный знак решения.

Где тангенс отрицателен

Во второй и четвёртой четвертях координаты имеют разные знаки, поэтому $\tan x$ отрицателен. По знаку a можно быстро выбрать нужную часть окружности.

Выбор промежутка по знаку a

Знак числа a помогает определить, на какой ветви графика $y = \operatorname{tg} x$ расположен корень.



Почему решений бесконечно много

Одно решение

Сначала находят главное значение $x_0 = \arctg a$ на одном промежутке, где тангенс непрерывен и принимает каждое значение ровно один раз.

Период π

Затем учитывают, что график тангенса повторяется через π : к найденному корню можно прибавлять π , 2π , 3π и так далее.

Бесконечное семейство

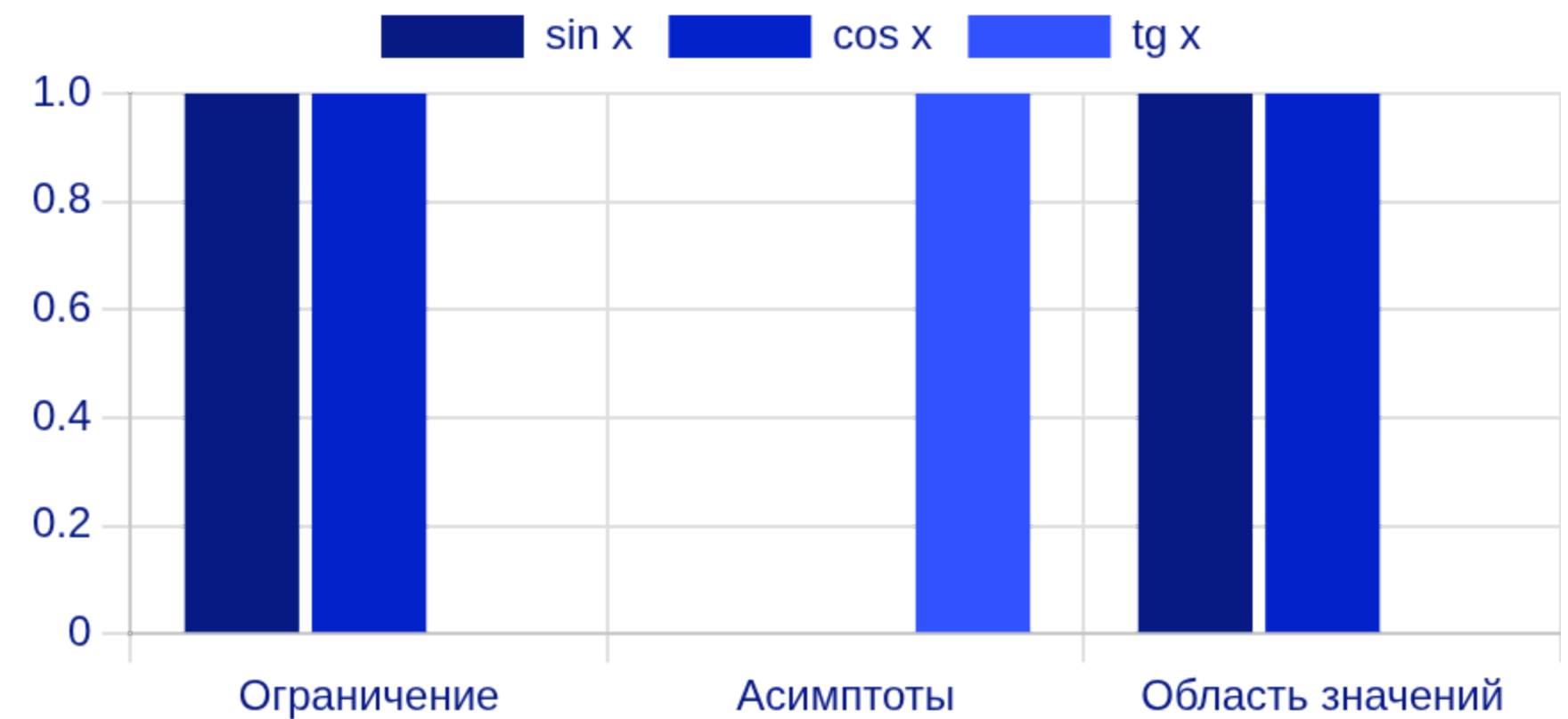
В итоге получаем $x_0 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
Поэтому решений бесконечно много, хотя на каждом промежутке длины π существует только одно.



Сравнение графиков $\sin x$, $\cos x$ и $\operatorname{tg} x$

Синус и косинус колеблются в ограниченном диапазоне, тогда как тангенс не ограничен и разрывается на асимптотах.

Именно неограниченность $\operatorname{tg} x$ позволяет уравнению $\operatorname{tg} x = a$ иметь решение при любом действительном a .



Школьные графики тригонометрических функций; качественное сравнение, без численных измерений

Типичные ошибки при решении уравнения

1. Пропуск периода

Записывают только $x = \operatorname{arctg} a$ и забывают добавить πn . Из-за этого ответ получается неполным: теряется бесконечное семейство решений, возникающее из периодичности тангенса.

2. Лишние значения

Иногда включают точки $x = \pi/2 + \pi n$, хотя в них $\cos x = 0$, а значит $\tan x$ не определён. Такие значения нельзя считать корнями уравнения.

3. Неверное главное значение

Путают число a с $\operatorname{arctg} a$ или выбирают угол вне интервала $(-\pi/2; \pi/2)$. Это приводит к ошибке уже на первом шаге решения.

Таблица тригонометрических значений для проверки ответов

Угол	tg
0	0
$\pi/6$	$1/\sqrt{3}$
$\pi/4$	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}$
$-\pi/4$	-1

Таблица основных значений тригонометрических функций из школьного курса алгебры и геометрии

Основные значения тангенса помогают быстро сверить найденный корень с известными углами и избежать вычислительных ошибок.

Если ответ совпадает с опорными значениями, его легко проверить устно и без лишних преобразований.

Геометрический смысл корней на графике

Точка пересечения

Каждому решению соответствует абсцисса точки, где график $y = \operatorname{tg} x$ пересекает прямую $y = a$. Это наглядно связывает формулу ответа с рисунком на координатной плоскости.

Одна ветвь — один корень

На каждом промежутке длины π ветвь тангенса пересекает горизонтальную прямую только один раз. Поэтому внутри одной ветви не возникает нескольких различных корней.

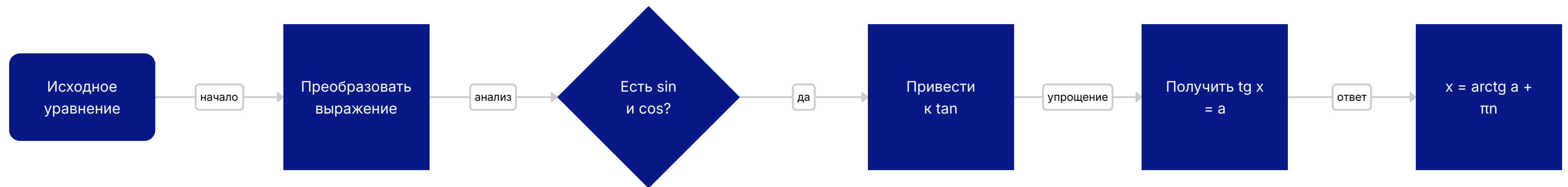
Повторение через π

Далее та же геометрическая ситуация повторяется на следующих ветвях графика. Именно поэтому один найденный корень автоматически порождает бесконечную цепочку решений.



Уравнения, сводящиеся к виду $\operatorname{tg} x = a$

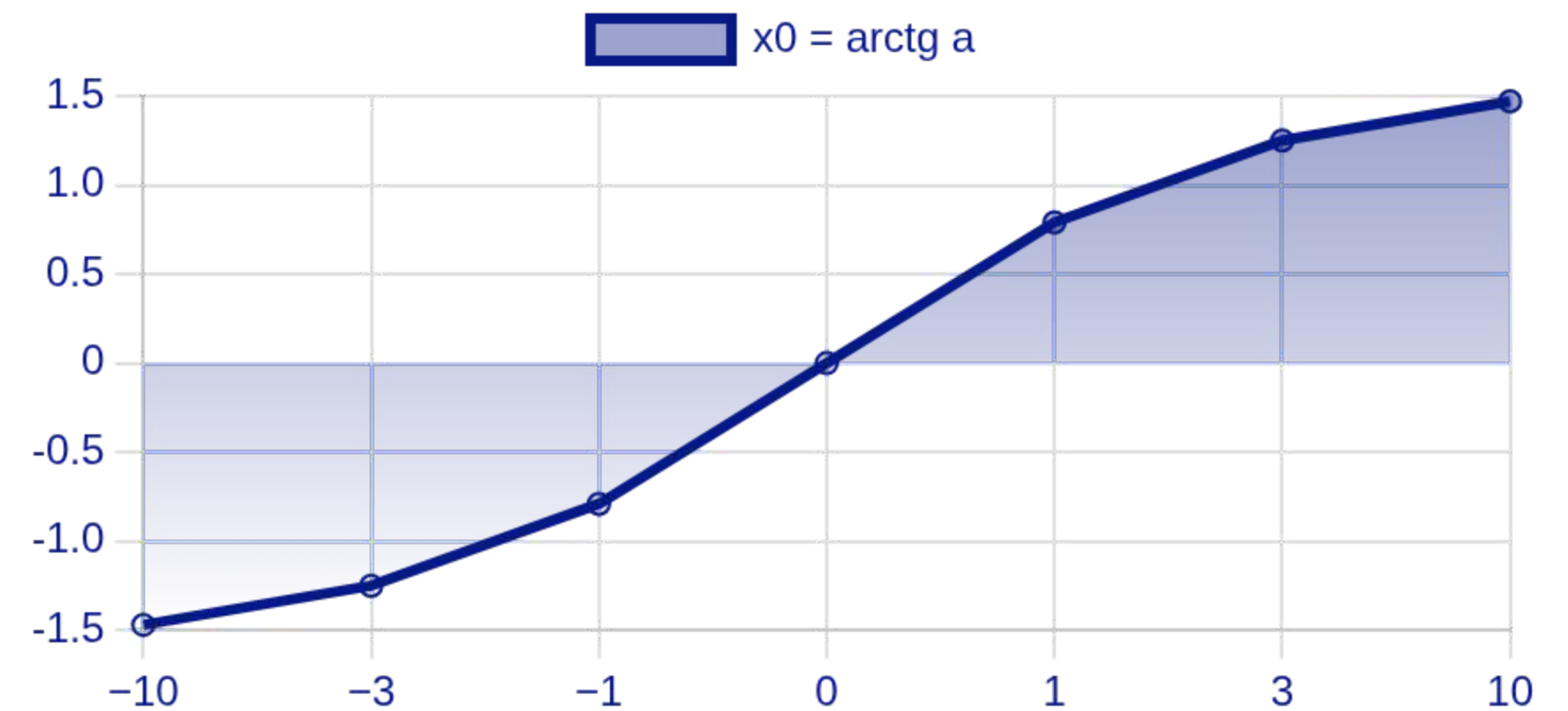
В школьных задачах тригонометрические выражения часто приводят к стандартному виду через формулы преобразования.



Как меняется $\arctg a$ при изменении a

Чем больше по модулю число a , тем ближе соответствующий угол к границам интервала главных значений.

Функция $\arctg a$ возрастает и остаётся ограниченной, поэтому корни тангенса приближаются к асимптотам, но не достигают их.



Теоретическая зависимость $x_0 = \arctg a$; значения приведены для иллюстрации монотонности

Практическая значимость темы в 10 классе

	Решение стандартных задач Навык нужен для уравнений, где после преобразований остаётся тангенс в чистом виде, а затем требуется быстро записать общий ответ без потери периодичности.
	Работа с графиками Тема развивает умение читать графики, сравнивать ветви функции и связывать аналитическую запись с геометрическим изображением на координатной плоскости.
	Отбор корней При решении прикладных и составных задач важно уметь проверять, подходит ли найденный угол по условию, области определения и допустимому промежутку.
	Переход между формами Ученик осваивает переход от числа a к углу $\arctg a$ и обратно, а также учится использовать проверку по опорным значениям тригонометрических функций.

Итоги темы: формула, период и смысл решения

Уравнение $\operatorname{tg} x = a$ объединяет алгебраическую запись, графическую интерпретацию и периодичность функции. Главный результат — $x = \operatorname{arctg} a + \pi n$, где учитываются область определения и знак числа a .