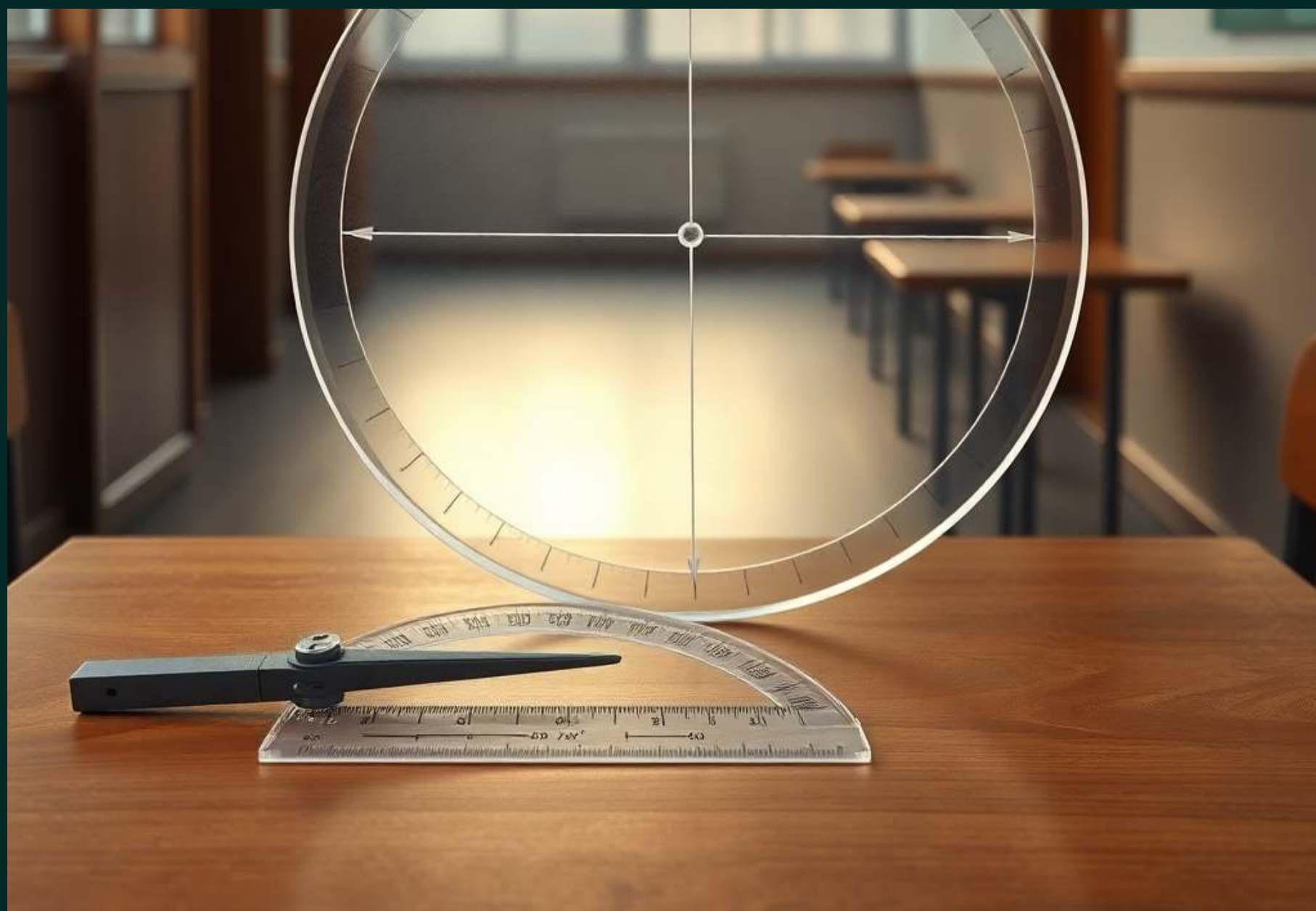


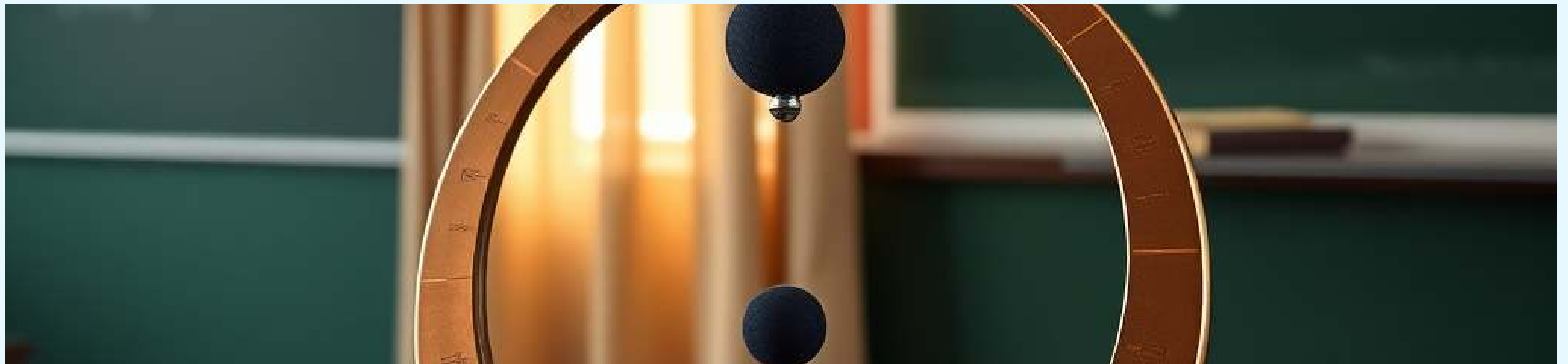
Уравнение $\cos x = a$: смысл, область значений и способы решения



Разберём, когда уравнение имеет корни и как их записать.

Как уравнение $\cos x = a$ связано с тригонометрией

Это типичное тригонометрическое уравнение из 10 класса: оно опирается на свойства косинуса, помогает находить углы и описывает периодические процессы в задачах и моделях.



2

точки обычно дают одно и то же
значение косинуса в одном
периоде

В одном периоде
уравнение чаще всего
имеет две симметричные
точки пересечения.

Геометрический смысл косинуса на единичной
окружности

Значение a и число решений уравнения

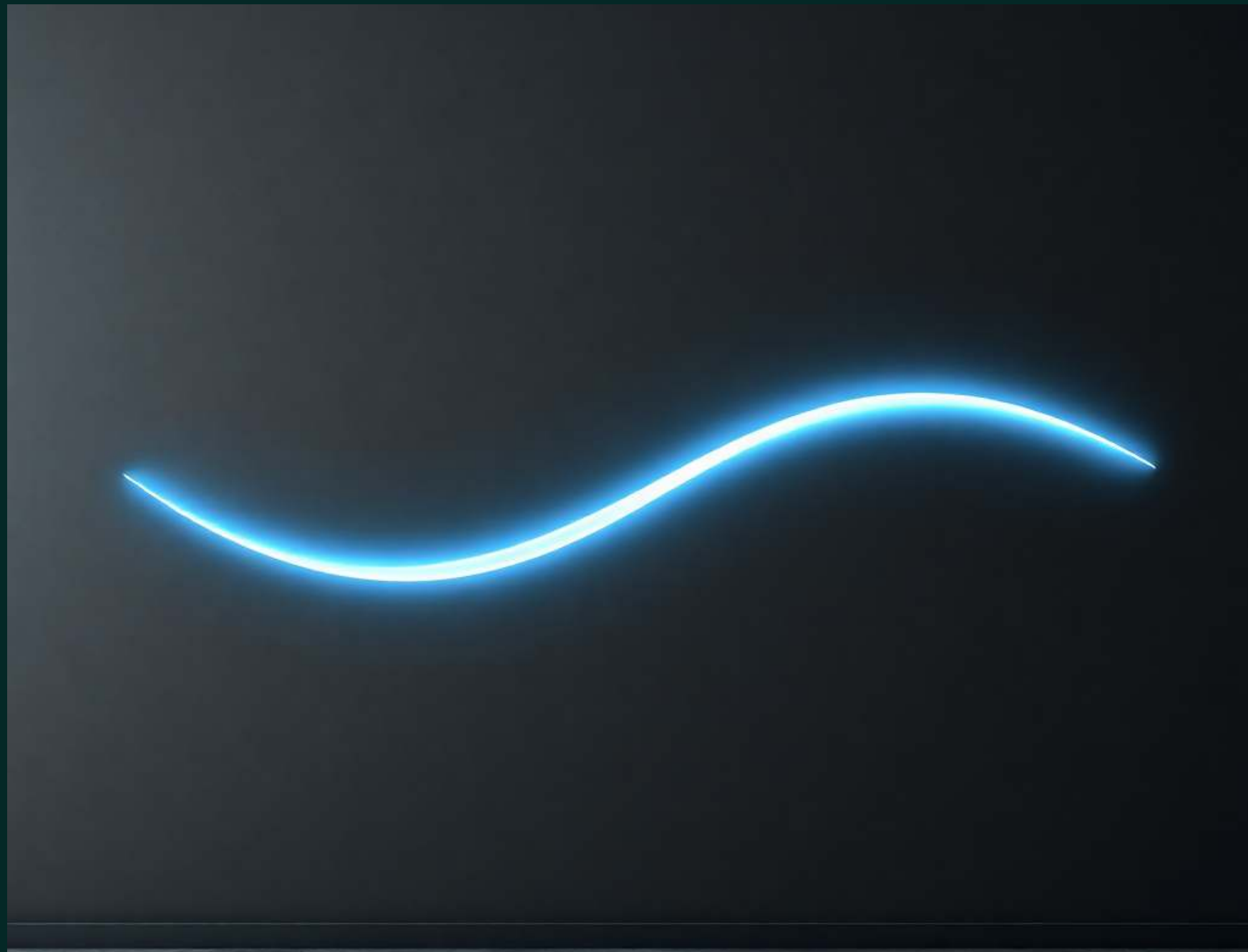
Сопоставим значение параметра a с наличием корней и видом общего ответа.

Решения существуют только при $-1 \leq a \leq 1$; именно этот отрезок является областью значений косинуса.

Значение a	Решения
$a < -1$	нет
$a = -1$	$\pi + 2\pi n$
$-1 < a < 1$	2 семейства
$a = 1$	$2\pi n$
$a > 1$	нет

Свойства функции $y = \cos x$

Графическая интерпретация: пересечение $y = \cos x$ и $y = a$



Горизонтальный уровень

Прямая $y = a$ показывает все точки, где значение косинуса совпадает с заданным числом. Так график сразу превращает уравнение в задачу на пересечение двух линий.

Два пересечения внутри периода

Если $-1 < a < 1$, горизонтальная линия пересекает косинусоиду дважды на каждом промежутке длины 2π . Именно поэтому в общем ответе появляются два семейства корней.

Касание на границах

При $a = 1$ и $a = -1$ прямая касается графика в его вершинах. Это означает единственное семейство решений в каждом случае, без второй симметричной точки.

Нет пересечений вне диапазона

Когда $|a| > 1$, линия $y = a$ лежит выше или ниже всей косинусоиды. Поскольку значения функции не выходят за пределы $[-1; 1]$, корней нет.

Число решений в зависимости от параметра a

●
Диаграмма показывает, как быстро
меняется число корней при переходе
через границы отрезка $[-1; 1]$.

●
Максимум и минимум функции определяют
все случаи: вне отрезка решений нет, внутри
него их два, на границах — по одному
семейству.

Свойства функции $y = \cos x$

Частный случай $a = 1$

01

Единственное значение

Если $\cos x = 1$, то косинус достигает своего максимума. Это происходит только в точках, соответствующих углу 0 и его полным оборотам, поэтому решение записывается через $2\pi n$.

02

Геометрический смысл

На единичной окружности это точка (1, 0). Она лежит на положительной полуоси Ox, а значит, каждый новый корень получается добавлением целого числа полных оборотов.

03

Общий вид корней

Итоговая формула имеет вид $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Хотя корней бесконечно много, в каждом промежутке длины 2π содержится ровно одно значение.

Частный случай $a = -1$

Минимум функции

При $\cos x = -1$ функция достигает наименьшего значения. Это происходит в точке, противоположной точке с косинусом 1, поэтому решение сдвигается на π .

Ответ в общем виде

Все корни записываются формулой $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Здесь вновь работает периодичность: каждый следующий корень отличается на полный оборот.

Связь с окружностью

На единичной окружности это точка $(-1, 0)$. Она лежит на отрицательной полуоси Ox и показывает, что косинус принимает значение -1 только в особых положениях угла.



Случай $-1 < a < 1$: два семейства решений

01 | Вводим угол α

Для любого значения из этого интервала существует угол $\alpha = \arccos a$, причём α лежит в промежутке $[0; \pi]$. Это позволяет перейти от числа a к конкретному углу.

02 | Первое решение

Одним из корней является $x = \alpha + 2\pi n$. Оно соответствует точке на окружности, где косинус принимает заданное значение в выбранном направлении отсчёта.

03 | Второе решение

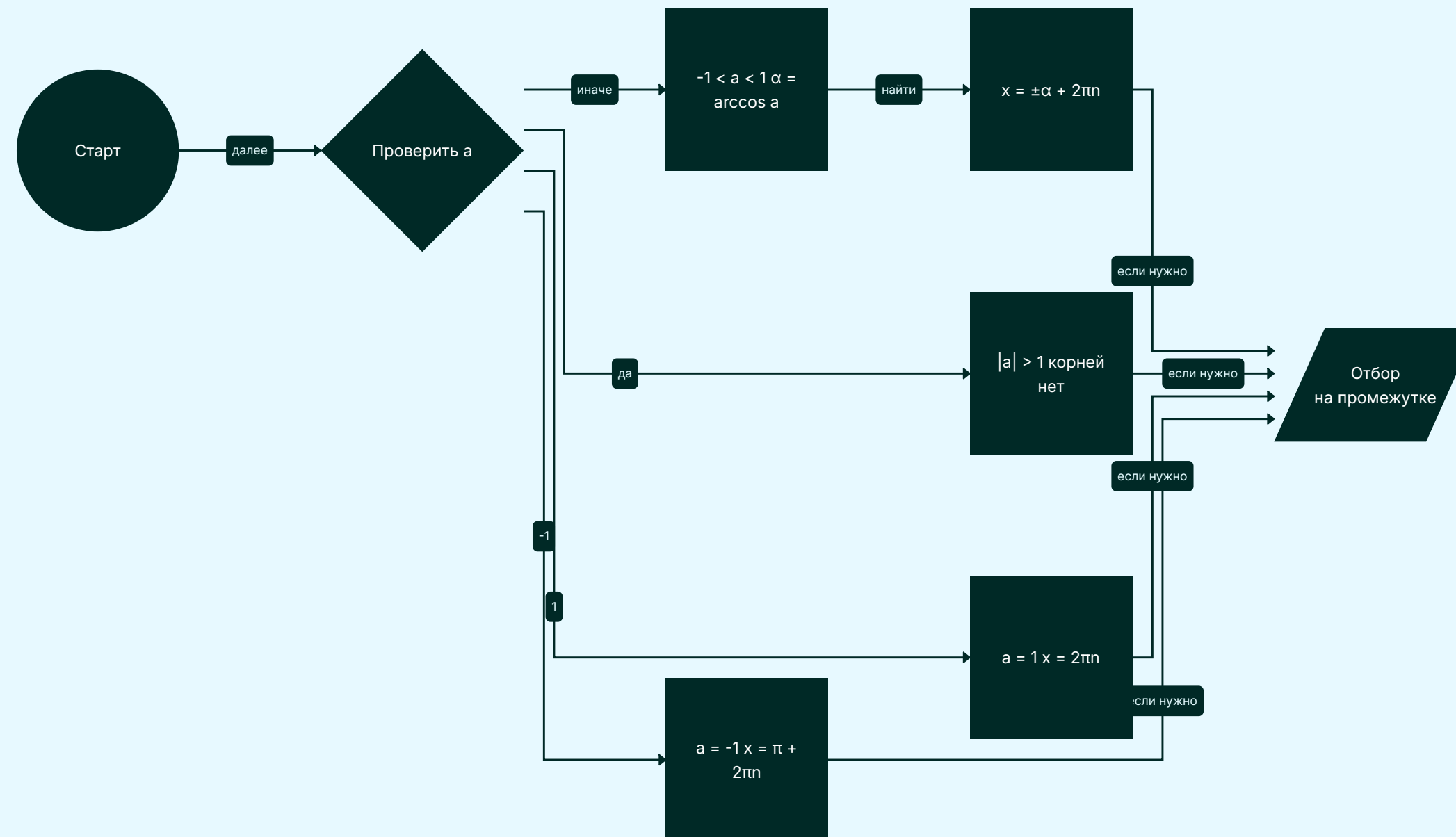
Второй корень имеет вид $x = -\alpha + 2\pi n$, что эквивалентно записи $x = 2\pi - \alpha + 2\pi n$. Он возникает из симметрии относительно оси Oy .

04 | Общий результат

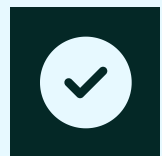
Итак, при $-1 < a < 1$ получаем $x = \pm\alpha + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. В одном периоде обычно существуют две точки, дающие одинаковый косинус.

Алгоритм решения уравнения $\cos x = a$

Последовательность проверки параметра и записи общего ответа



Формула через $\arccos$ и ее смысл



Условие существования

Обозначение $\alpha = \arccos a$ вводят только при $-1 \leq a \leq 1$. Оно сразу фиксирует угол из промежутка $[0; \pi]$, для которого косинус равен заданному числу.



Компактная запись ответа

После нахождения α общий ответ записывают через $\alpha + 2\pi n$. Такая форма сохраняет все корни, не перегружая запись и сразу учитывая периодичность функции.



Связь с симметрией

Формула через $\arccos$ удобна, потому что отражает симметрию графика $y = \cos x$ относительно оси Oy . Два знака перед α соответствуют двум точкам с одинаковым значением косинуса.

Проверка корней и типичные источники ошибок

01

Подстановка в уравнение

Найдите предложенные корни и подставьте их в исходное равенство. Если косинус действительно даёт число a , решение корректно; если нет, ошибка обнаруживается сразу.

02

Учет периода

Помните, что $\cos x$ повторяется через 2π , поэтому одинаковые значения могут возникать бесконечно много раз. В записи ответа обязательно должен быть параметр $n \in \mathbb{Z}$.

03

Два семейства корней

При $-1 < a < 1$ нельзя оставлять только одно решение. Для косинуса всегда нужны оба семейства $\arccos a + 2\pi n$, иначе ответ оказывается неполным.

04

Не путать формулы

Следите за областью допустимых значений и не смешивайте уравнения $\cos x = a$ и $\sin x = a$. Также нельзя подменять число a углом без перевода в радианную меру.

Примеры точных решений для типичных значений a

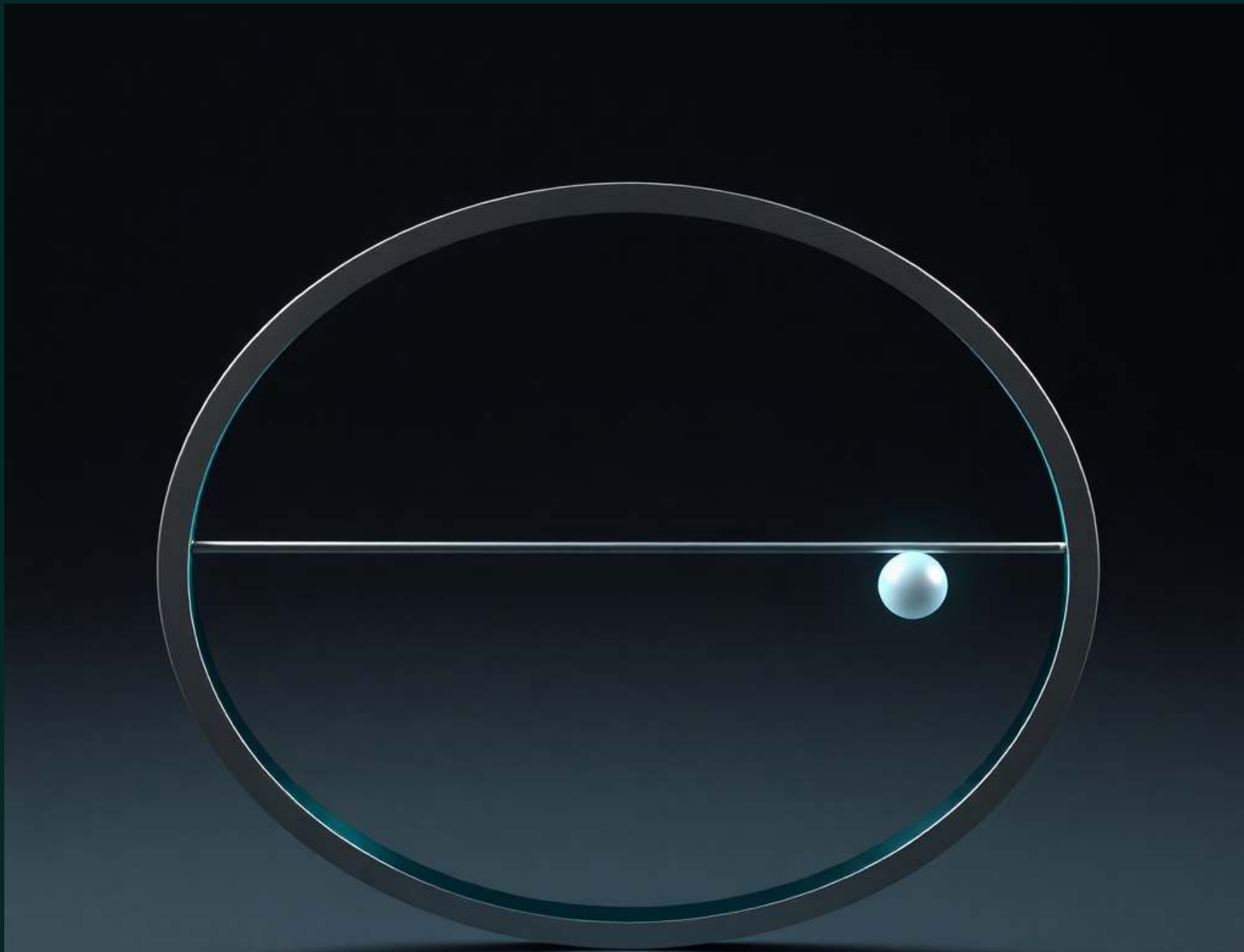
a	Общий вид решений	Примечание
0	$\pi/2 + \pi n$	Один период
$\frac{1}{2}$	$\pi/3 + 2\pi n$	Основной угол
$-\frac{1}{2}$	$2\pi/3 + 2\pi n$	Симметрия
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\pi/4 + 2\pi n$	Табличное значение

Табличные значения косинуса и определение $\arccos$

Для знакомых значений a удобно использовать основные углы, а для остальных – запись через $\arccos a$.

Для точных значений удобно опираться на таблицу основных углов; если число не табличное, ответ естественно записывается через $\arccos a$.

Симметрия точек на единичной окружности



Одинаковая абсцисса

На единичной окружности две разные точки могут иметь один и тот же косинус, потому что косинус равен их абсциссе. Поэтому одно значение a обычно соответствует двум углам.



Отражение относительно оси Ox

Эти точки располагаются симметрично относительно оси Ox . Их ординаты противоположны по знаку, а абсцисса совпадает, поэтому график не различает такие положения.



Связь с общим ответом

Именно эта симметрия объясняет запись $x = \cos \alpha + 2\pi n$. Один угол берут из верхней полуокружности, второй получается зеркальным отражением и даёт тот же косинус.

Сравнение углов α и $2\pi - \alpha$

Оба угла лежат в одном периоде, но дают одинаковое значение косинуса. Это наглядно показывает, почему одного числа a недостаточно для выбора единственного угла.

При одинаковом косинусе на отрезке $[0; 2\pi)$ возникают две симметричные точки, кроме граничных случаев $a = \pm 1$.

Свойство четности косинуса и геометрия единичной окружности

Свойства функции $y = \cos x$, важные для уравнения



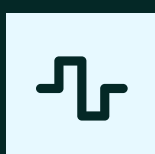
Четность

Функция $\cos x$ четная, поэтому $\cos x = \cos(-x)$. Это объясняет появление симметричных корней и помогает быстро находить второе решение без дополнительных вычислений.



Периодичность

Период функции равен 2π , значит все решения повторяются через одинаковый промежуток. Любой найденный корень сразу порождает бесконечное семейство значений $x + 2\pi n$.



Ограниченность

Значения косинуса лежат только между -1 и 1 . Поэтому уравнение $\cos x = a$ имеет смысл лишь при $-1 \leq a \leq 1$, иначе корней нет.

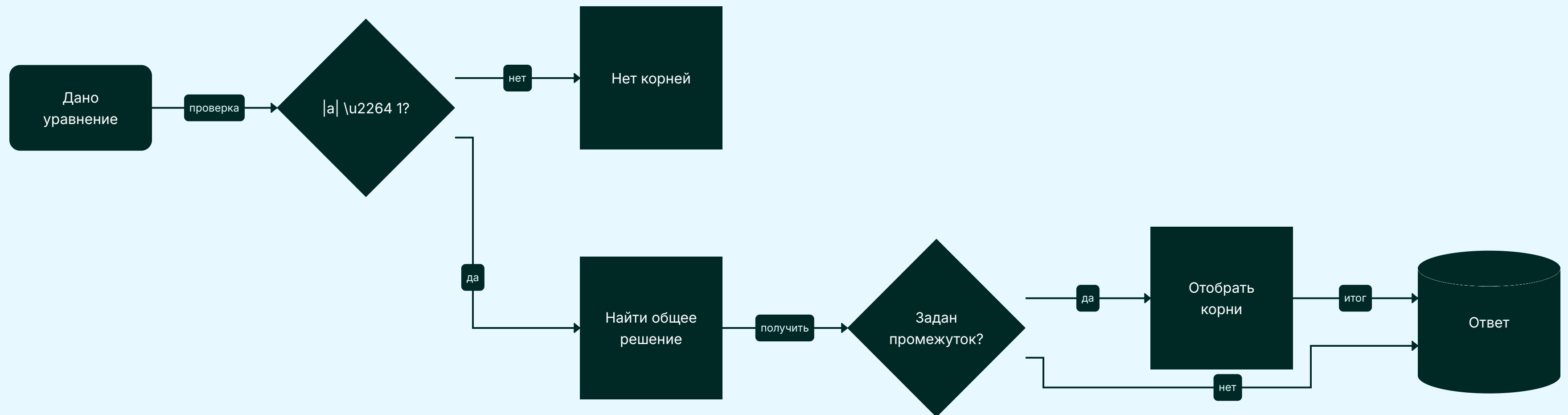


Максимум и минимум

Наибольшее значение функции равно 1 , а наименьшее равно -1 . Именно эти границы определяют особые случаи $a = 1$ и $a = -1$, когда появляется по одному семейству решений.

Решение задач на промежутке

Алгоритм отбора корней после нахождения общего решения уравнения $\cos x = a$



Типичные ошибки при решении тригонометрических уравнений

Неверная область a

Иногда сразу записывают ответ, не проверив, принадлежит ли a отрезку $[-1; 1]$. Если это условие нарушено, у уравнения $\cos x = a$ корней не существует.

Потеря второго решения

При $-1 < a < 1$ часто оставляют только одно семейство корней. Для косинуса это ошибка, потому что в одном периоде всегда появляются две симметричные точки.

Неверный вид ответа

Некоторые забывают параметр n или пишут ответ без периода 2π . Тогда теряется бесконечное множество решений, которые должны повторяться для всех целых n .

Путаница с синусом

Формулы для $\cos x = a$ и $\sin x = a$ похожи, но не совпадают. Нельзя подставлять одну схему вместо другой: у косинуса другая симметрия и другое расположение корней.

Практическое применение уравнения $\cos x = a$



Когда система достигает нужного уровня

В задачах о колебаниях часто нужно определить момент, когда процесс достигает заданного значения. На графике это видно как пересечение косинусоиды с горизонтальной линией уровня a . Такое представление помогает связать формулу с реальной динамикой и выбрать нужный момент времени.



Где встречается периодичность

Подобные уравнения возникают в моделях температуры, вращения, сигналов и движения по окружности. Во всех этих ситуациях важен не один ответ, а целое семейство моментов, потому что процесс повторяется через равные интервалы.

Главное о решении уравнения $\cos x = a$

Уравнение $\cos x = a$ решается по одной схеме: сначала проверяют, лежит ли a в отрезке $[-1; 1]$, затем используют $\arccos a$ и период 2π . Геометрия и график делают ответ наглядным и надежным.