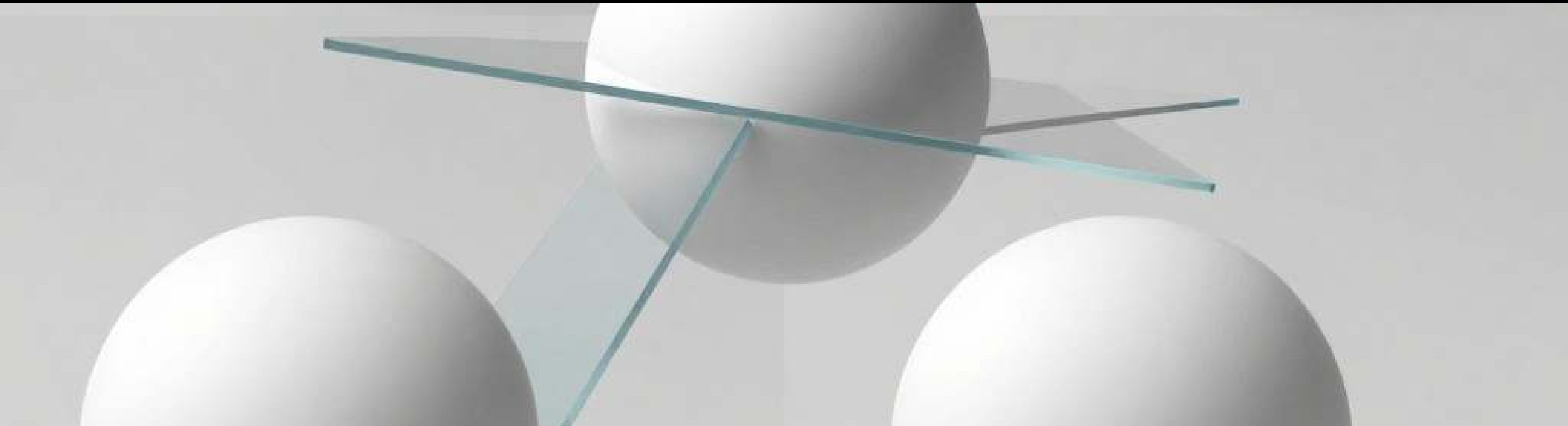


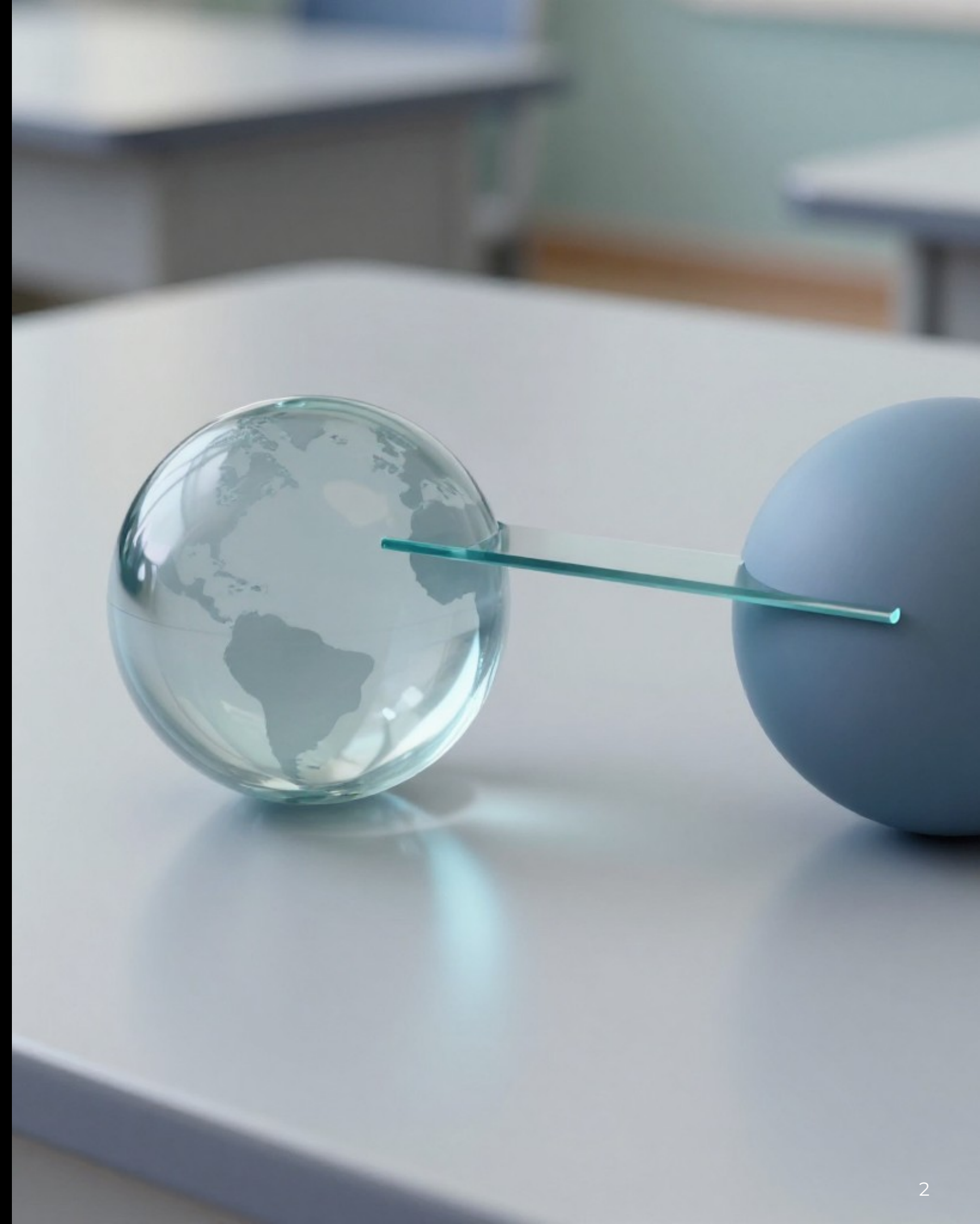
Пересечение шара и сферы с плоскостью

Как плоскость «режет» шар и сферу: круг, касание одной точкой или отсутствие общих точек.



Что называют сферой и шаром

Сфера — множество точек на расстоянии R от центра, шар — все точки на расстоянии не больше R . Плоскость задаёт сечение, а ключ к задаче дают перпендикуляр к плоскости и теорема Пифагора.



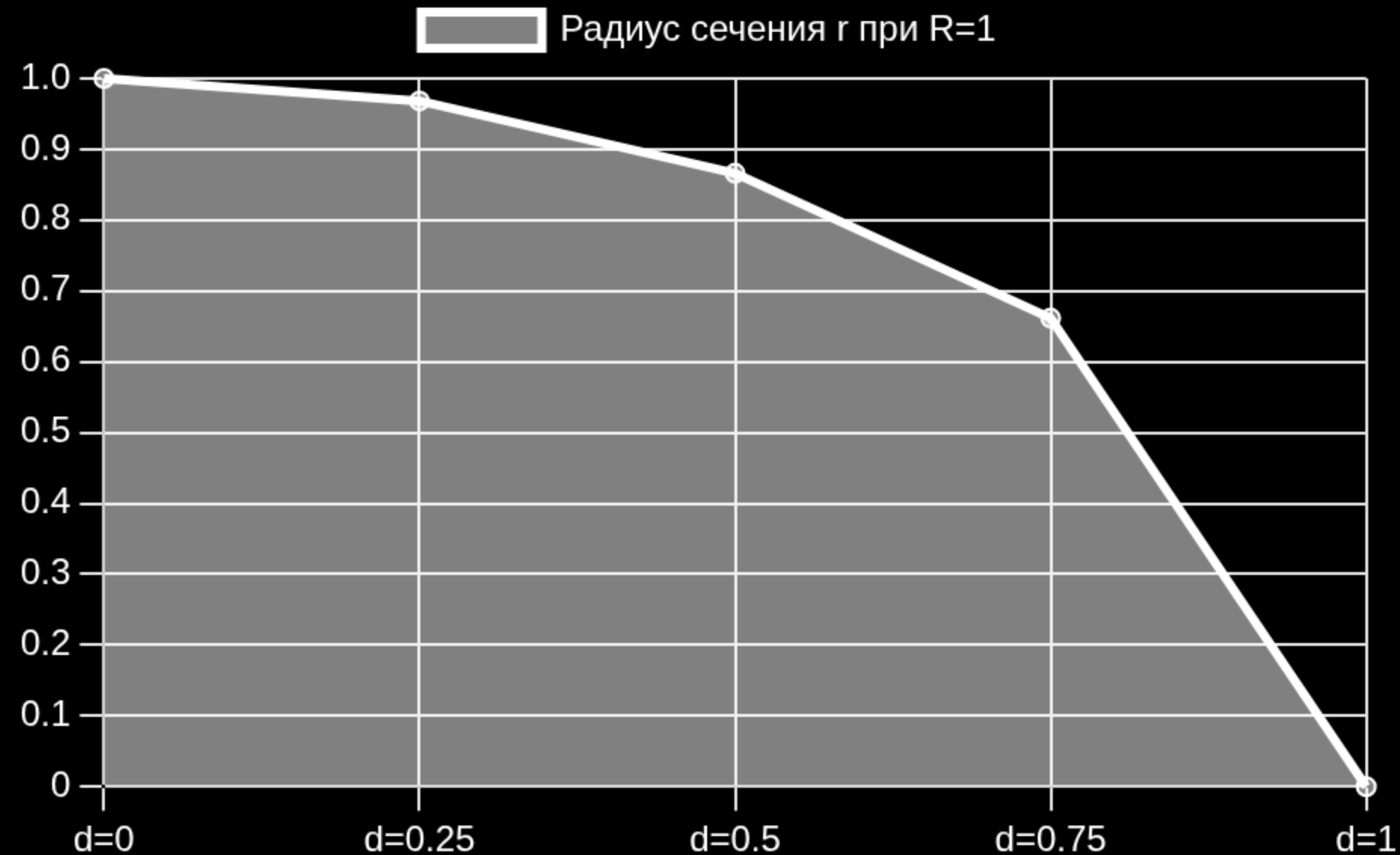
Три возможных результата пересечения

Сравните расстояние d от центра с радиусом R : если $d < R$, плоскость пересекает и шар, и сферу. Граница пересечения образует окружность (для сферы) и круг (для шара).

При $d = R$ плоскость касается сферы в одной точке: радиус сечения равен нулю, и вместо окружности получается одна точка. Это «порог» между пересечением и отсутствием общих точек.

Если $d > R$, плоскость находится слишком далеко от центра: общих точек не возникает ни у сферы, ни у шара. Поэтому достаточно одного сравнения d и R , чтобы определить тип сечения.

Как меняется радиус сечения при удалении плоскости от центра



По формуле $r=\sqrt{(R^2-d^2)}$ радиус убывает всё медленнее по мере приближения к касанию, но при $d \rightarrow R$ стремится к нулю.

Кривая показывает: при равных приращениях d уменьшение радиуса становится особенно заметным около положения касания $d=R$.

Рассчитано по зависимости $r=\sqrt{(R^2-d^2)}$; $R=1$ для нормировки (школьная геометрия), без внешних данных.

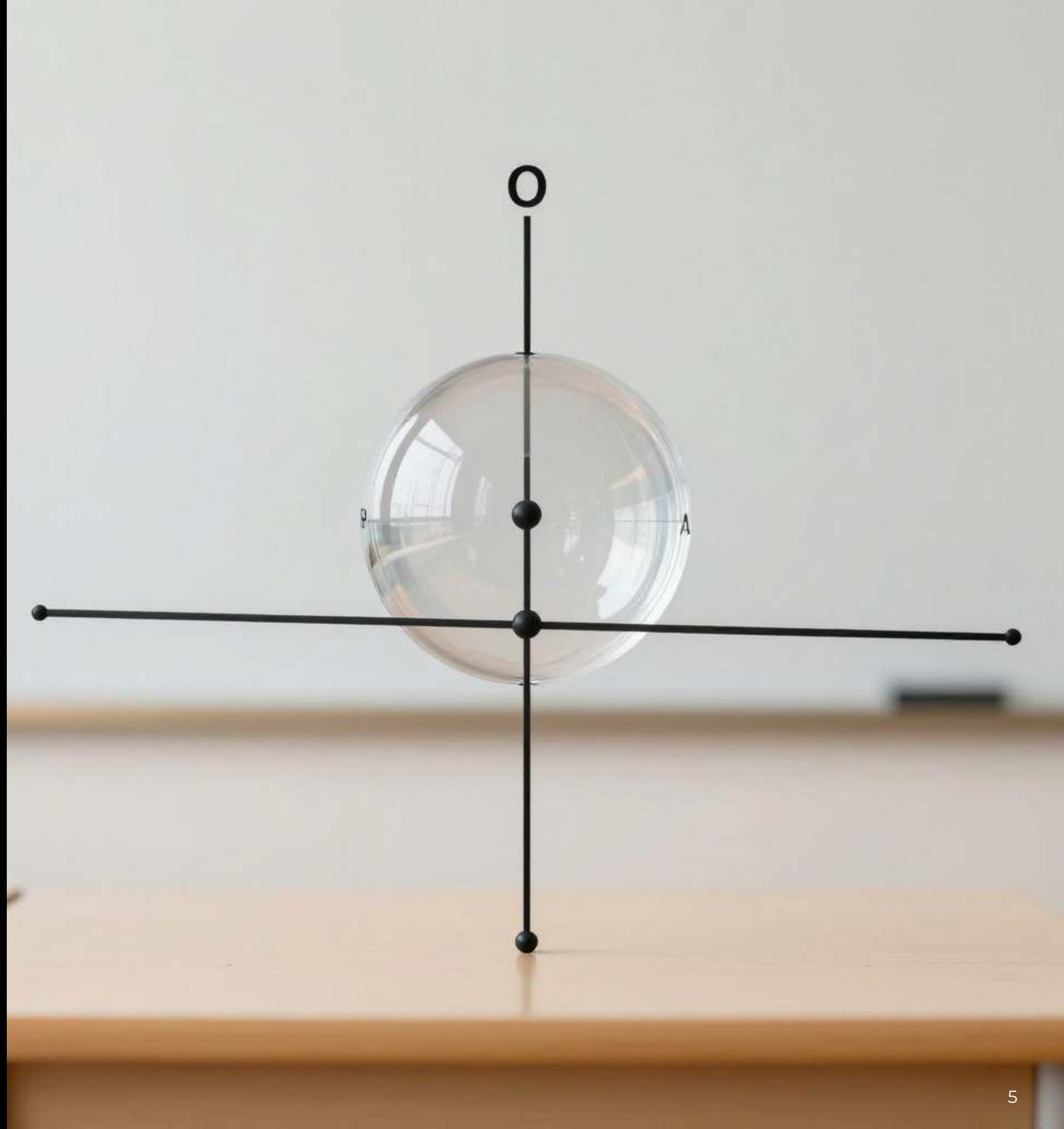
Геометрическая схема сечения

Расположение в пространстве

На рисунке показаны шар, плоскость, центр O и точка H — основание перпендикуляра из O на плоскость. Отрезок OH равен d и перпендикулярен плоскости, поэтому d — «настоящее» расстояние до плоскости.

Почему появляется прямоугольный треугольник

Любая точка A на окружности сечения вместе с O и H образует прямоугольный треугольник OHA : угол при H — прямой. Тогда $OA=R$, а $HA=r$, и именно эта геометрия позволяет применять теорему Пифагора.



Случаи пересечения шара и сферы с плоскостью

Взаимное расположение определяется сравнением d с радиусом R : вид результата для сферы и шара различается из-за того, что сфера — поверхность, а шар — объём.

Одной операции сравнения d и R достаточно, чтобы предсказать геометрический тип сечения без лишних вычислений.

Условие	Сфера	Шар
$d < R$	окружность	круг $r = \sqrt{R^2 - d^2}$
$d = R$	касание 1 точка	вырожденное сечение
$d > R$	общих точек нет	общих точек нет

Школьная геометрия: свойства перпендикуляра и теорема Пифагора.

0

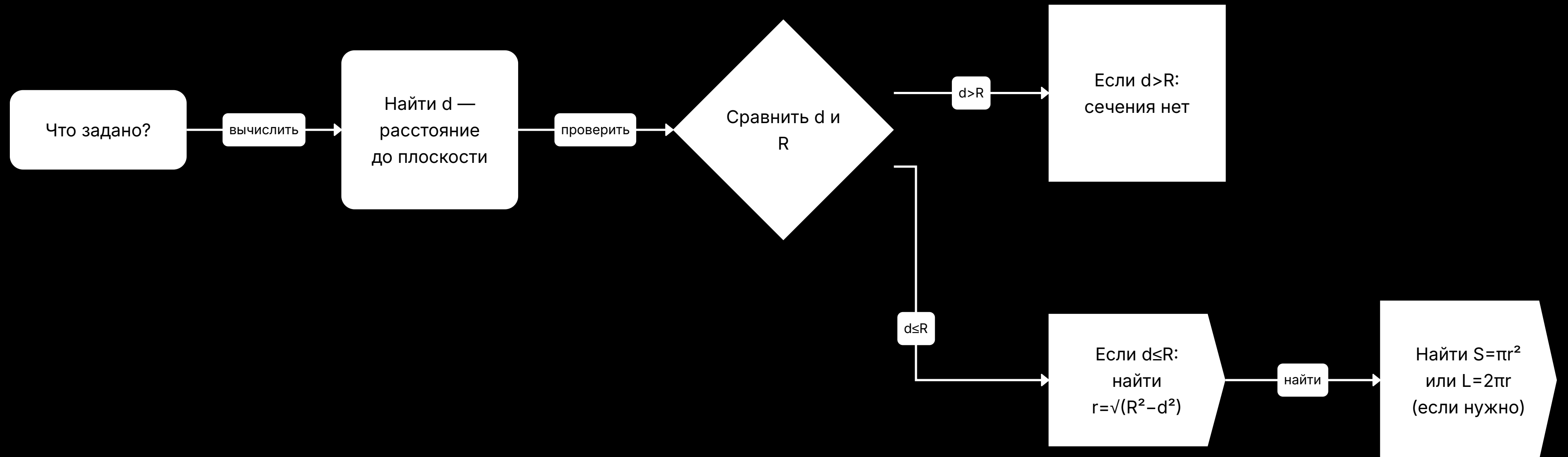
При $d=R$ радиус круга сечения становится равным нулю.

В прямоугольном треугольнике $ОНА$ имеем $OA^2=OH^2+HA^2$. Подстановка $OA=R$, $OH=d$ даёт $r=\sqrt{(R^2-d^2)}$; значит, при $d=R$ получаем $r=0$.

Вывод в школьной геометрии по теореме Пифагора, формула $r=\sqrt{(R^2-d^2)}$.

Алгоритм решения задач на сечение

Порядок действий для нахождения радиуса и (при необходимости) площади/длины окружности сечения.



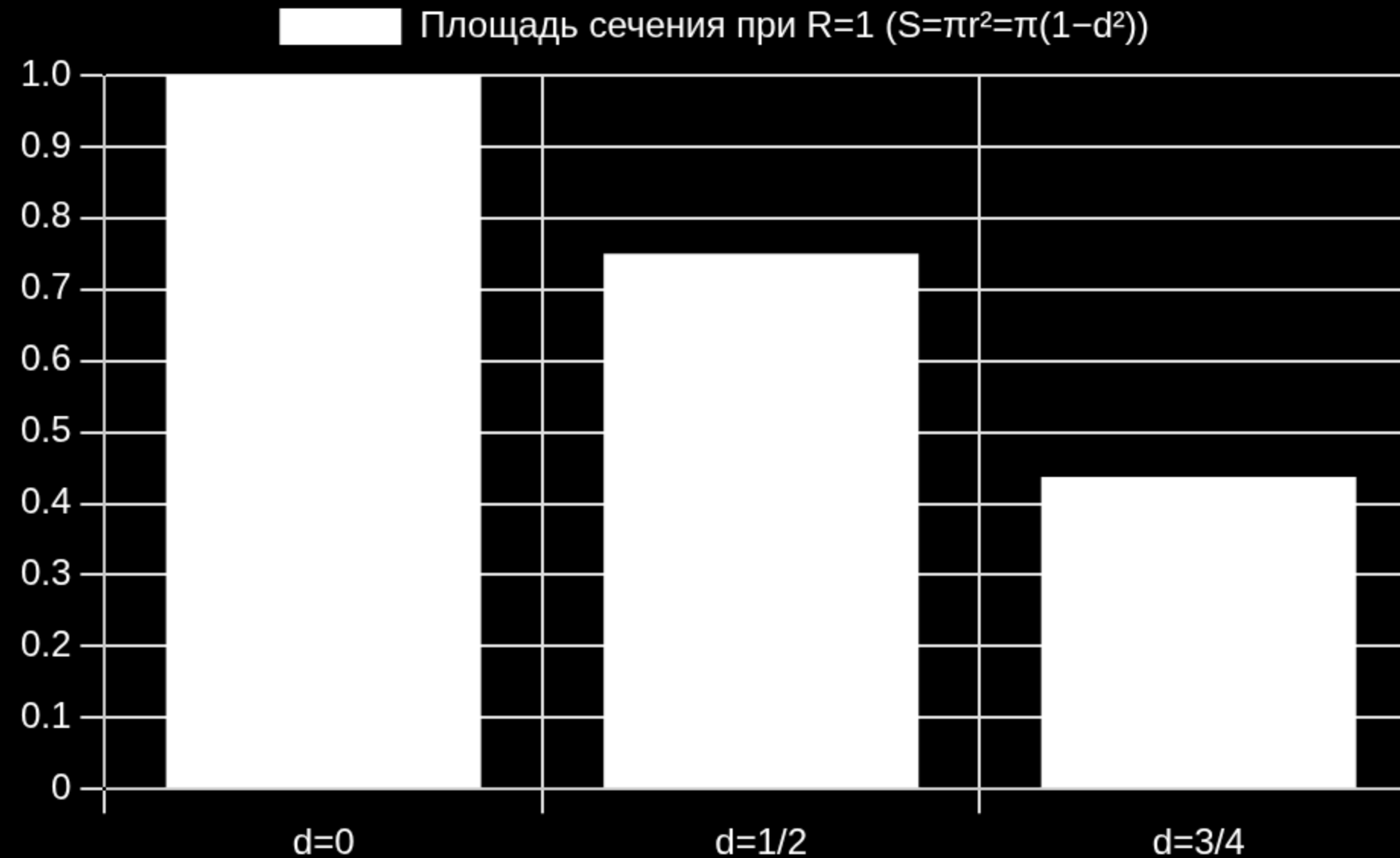
1

**При $d=R$ плоскость
касается сферы ровно в
одной точке.**

Это предельный случай пересечения: радиус круга сечения равен нулю, и ситуация является границей между существованием общих точек и их отсутствием.

Критерий касания: $d=R$ для сферы; радиус сечения $r=\sqrt{R^2-d^2}$.

Площадь круга сечения при разных расстояниях

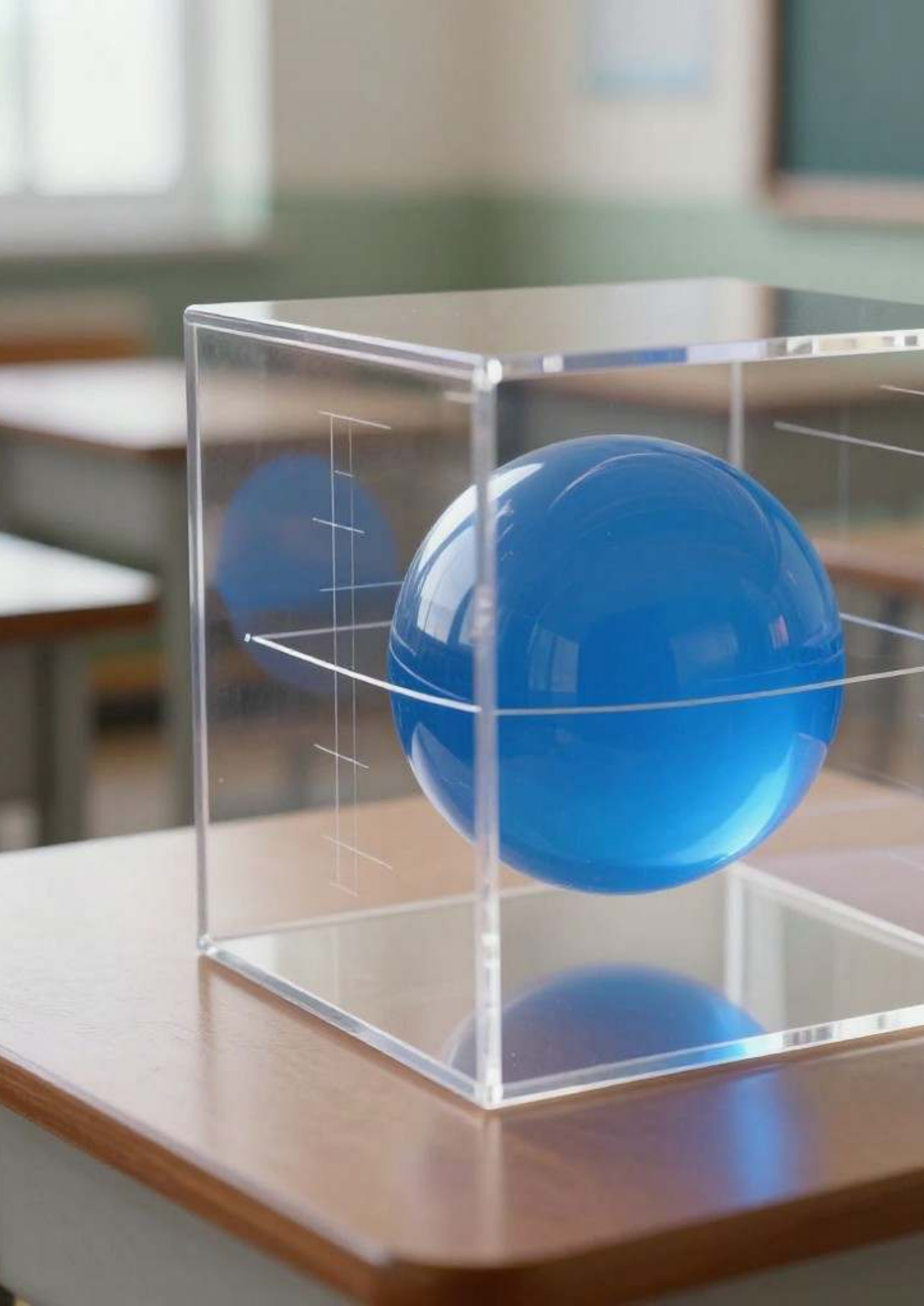


Хотя формула линейной зависимости не даёт, площадь задаётся $S=\pi(R^2-d^2)$ и быстро уменьшается при приближении к касанию $d \rightarrow R$.

Чем ближе плоскость к касанию, тем заметнее сокращается площадь: она убывает нелинейно и достигает нуля при $d=R$.

Расчёт по $S=\pi(R^2-d^2)$; для наглядности взято $R=1$ и значения $d=0, R/2, 3R/4$.

Сфера в координатах



Уравнение сферы и центр

В декартовой системе координат сфера задаётся уравнением $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$, где $O(a,b,c)$ — её центр, а R — радиус. Чтобы описать сечение, далее задают геометрическую плоскость пересечения.

Плоскость и центр окружности сечения

Плоскость задаётся линейным уравнением $Ax+By+Cz+D=0$. Центр окружности сечения получается как проекция точки O на эту плоскость по перпендикуляру. Координатный подход связывает геометрию и вычисления.

Частные случаи, которые часто встречаются в задачах

Если плоскость проходит через центр сферы, расстояние d равно нулю. Тогда радиус сечения совпадает с R , а линия пересечения имеет максимальный масштаб: получается большой круг, полностью симметричный относительно центра.

Если плоскость параллельна касательной к сфере, но не совпадает с ней, расстояние d становится положительным и меньше R . В результате радиус сечения уменьшается относительно R , а круг становится «сдвинутым» по размеру.

Когда d близко к R , формула $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ показывает, что r становится малым. Это означает небольшую площадь и длину окружности сечения, а также высокую чувствительность результата к ошибкам в вычислении d .

Во многих заданиях требуется не только найти радиус r , но и площадь $S = \pi r^2$, длину окружности $2\pi r$ или координаты центра сечения. Эти величины удобно получать после определения d и сравнения его с R .

Числовые примеры вычисления радиуса сечения

R	d	r
10	6	8
13	5	12
25	24	7

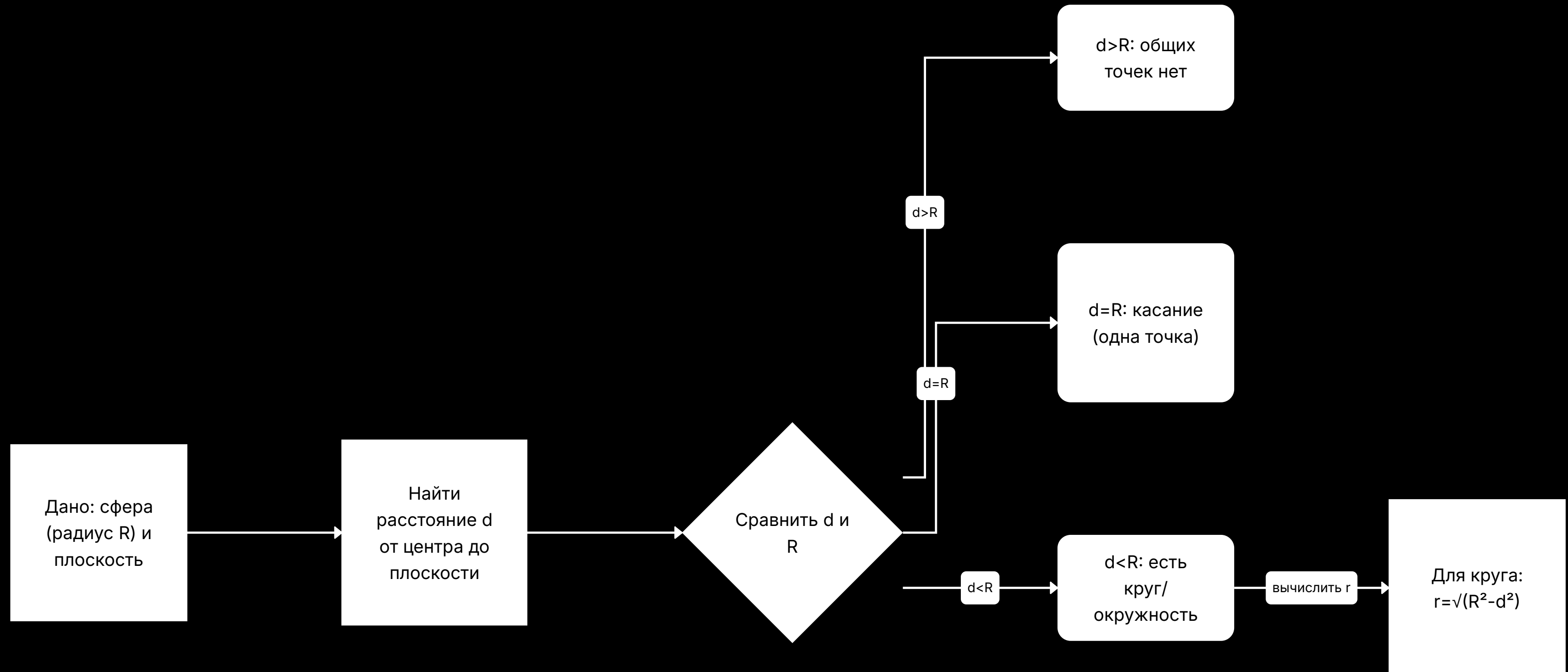
Составлено по формуле $r=\sqrt{R^2-d^2}$

Таблица показывает, как по формуле $r=\sqrt{R^2-d^2}$ находятся радиусы сечений при разных значениях R и d.

Во всех примерах r уменьшается при росте d; особенно заметно это проявляется, когда d близко к R: разность R^2-d^2 становится небольшой.

Шар и сфера: что именно пересекает плоскость

Перевод условия d относительно R в вид линии пересечения.



Окружность сечения и её центр

Если плоскость пересекает сферу, линия пересечения представляет собой окружность. Её центр лежит в основании перпендикуляра, опущенного из центра сферы на плоскость, и именно он упрощает дальнейшие расчёты.

Радиус этой окружности равен $r = \sqrt{R^2 - d^2}$, где d — расстояние от центра сферы до плоскости. Формула появляется из рассмотрения прямоугольного треугольника с катетами d и r .

Для шара сечение является кругом с тем же радиусом границы. Поэтому при построении чертежей и в аналитических задачах сначала находят d , затем r , и лишь после этого переходят к площади или длине.

Сравнение типов сечения по расстоянию d



Чем меньше d относительно R, тем больше радиус r и площадь πr^2 . На диаграмме уровень 2 соответствует полноценному пересечению, уровень 1 — предельному касанию.

Сравнение d и R позволяет сразу классифицировать ситуацию: круг/окружность есть только при $d \leq R$, а при $d > R$ пересечения не возникает. Точность в d критична из-за нелинейности r.

Условная шкала по признаку взаимного расположения: d vs R (геометрия 10 класс)

Где используются сечения сфер и шаров

КТ и МРТ: «нарезка» объёмов

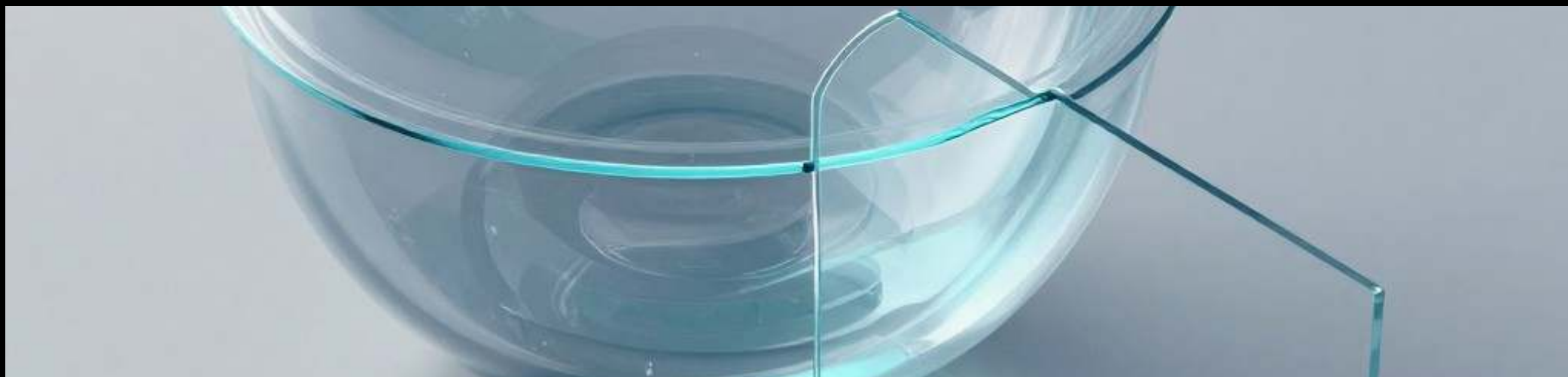
На практике врачи видят не всю трёхмерную модель сразу, а её послойные проекции. В терминах геометрии каждый «срез» соответствует пересечению объёмного тела плоскостью, а результаты удобно интерпретировать как сечения окружностью или кругом. Это помогает находить характерные границы тканей.

Геодезия и навигация: ориентация по поверхностям

При измерениях на местности часто строят модели рельефа и используют сферические приближения. Сечения помогают переходить от объёмных форм к двумерным контурам на карте, чтобы вычислять расстояния, строить траектории и сравнивать разные уровни. Рассуждения про d и радиус сечения становятся наглядными при проектировании

Инженерия и 3D-моделирование: проверка совместимости форм

В инженерных задачах пересечение сферических поверхностей с плоскостями используется для построения куполов, резервуаров и оптических элементов. В компьютерной графике «срезы» помогают тестировать, проходит ли деталь в нужном пространстве, и визуализировать внутренние полости. Геометрия переводится в понятные вычисления радиусов и площадей.



Типичные ошибки в задачах на пересечение

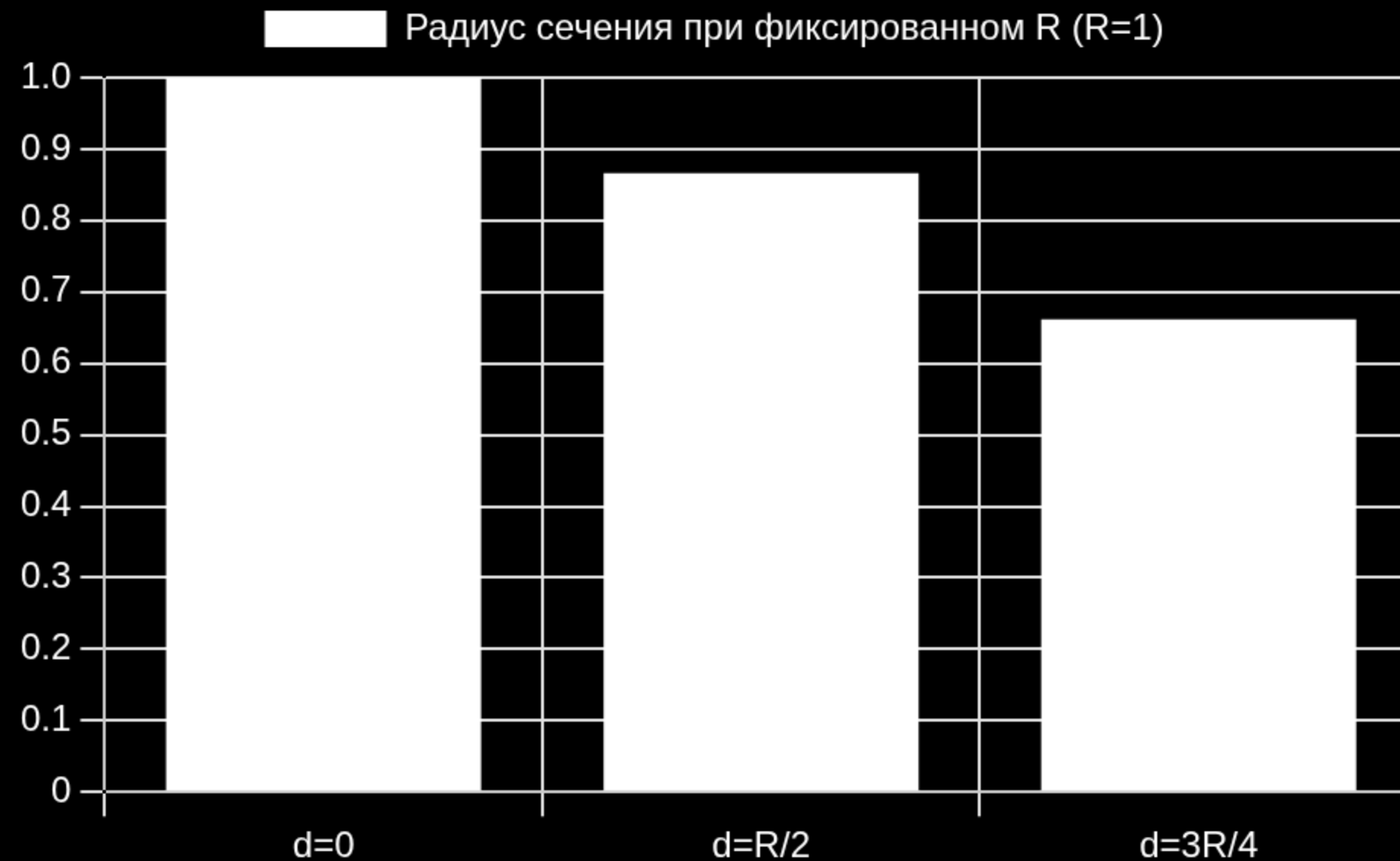
Частая ошибка — перепутать радиус шара R и радиус сечения r . Из-за этого неверно подставляют значения в формулу $r = \sqrt{R^2 - d^2}$, а затем получают неправильные площадь $S = \pi r^2$ и длину окружности $2\pi r$.

Другая типичная проблема — неправильная проверка условия $d \leq R$. Если забыть сравнить расстояние d и радиус R , можно «получить» несуществующее сечение при $d > R$, когда пересечения нет или остаётся только смысл касания.

Нередко неверно находят само расстояние d от центра до плоскости. Особенно в координатных заданиях вместо перпендикулярного расстояния берут величины из другой формулы, что переносит ошибку в конечный радиус r и делает весь ответ недостоверным.

В координатных задачах ошибки в знаках коэффициентов уравнения плоскости приводят к неправильному d . Поскольку радиус зависит от разности $R^2 - d^2$, даже маленькое смещение d меняет ответ заметно, особенно когда d близко к R .

Сравнение сечений при разных положениях плоскости



При $d=R/2$ получаем $r=\sqrt{3}/2 \cdot R \approx 0.866R$, а при $d=3R/4$ — $r=\sqrt{7}/4 \cdot R \approx 0.661R$. Отношение видно прямо по столбцам, где R принят за 1.

Столбцы подтверждают нелинейность: при удалении от центра радиус уменьшается всё быстрее. Это объясняет, почему рядом с касанием площадь становится особенно малой.

Вычисления по $r=\sqrt{R^2-d^2}$ при $R=1$

Итоги темы

Пересечение шара и сферы с плоскостью определяется сравнением расстояния d до центра с радиусом R . При $d < R$ получается круг или окружность радиуса $r = \sqrt{R^2 - d^2}$, при $d = R$ — касание, при $d > R$ — пересечения нет.