

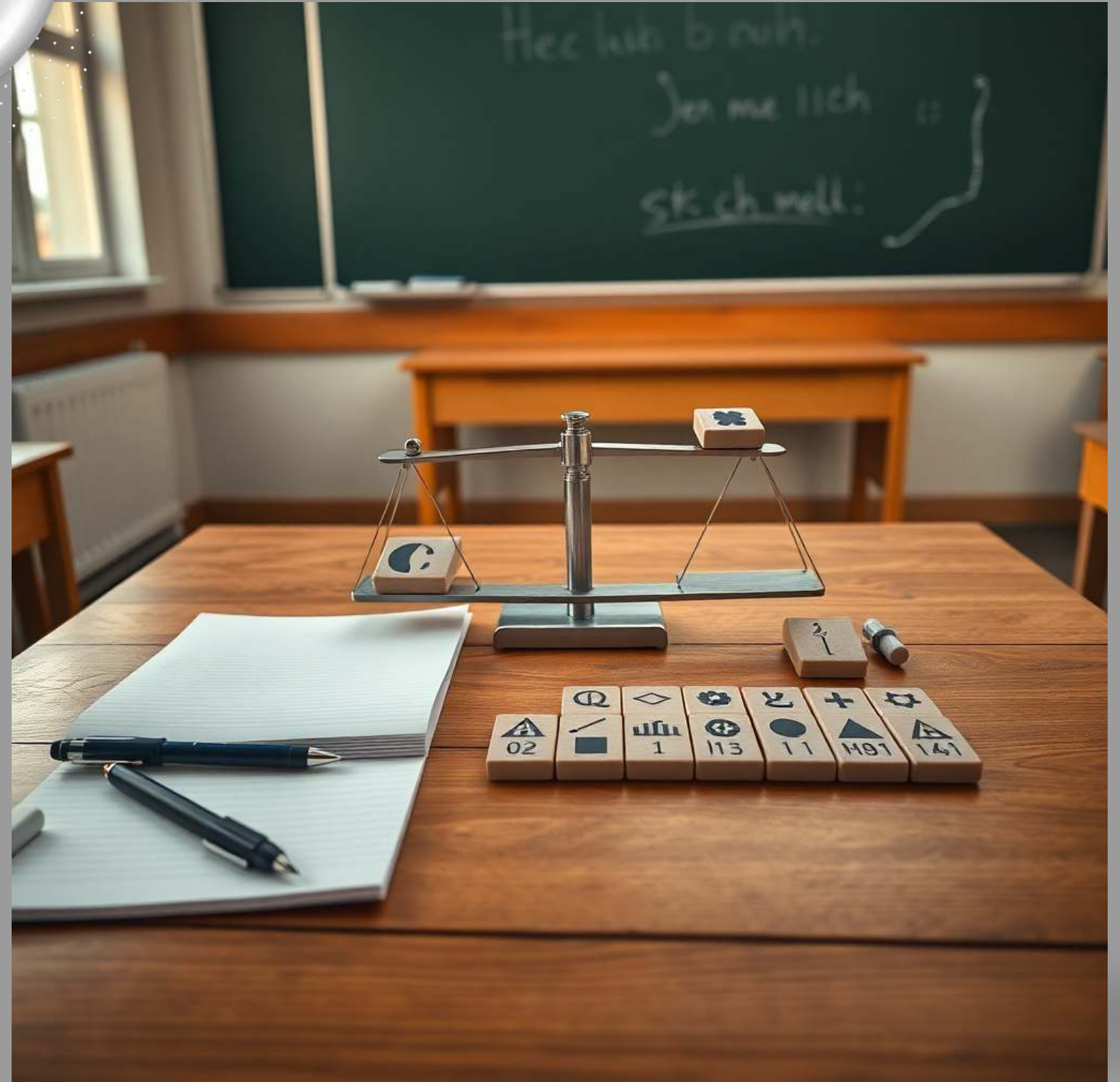
Тождества и тождественные преобразования выражений

Изменяем вид выражения, не меняя его значения.



Зачем изучать тождества в 7 классе

Эта тема опирается на буквенные выражения, свойства действий и коэффициенты. Она помогает быстрее считать, преобразовывать формулы и решать задачи, где неизвестное связано с практическими величинами: площадью, стоимостью, длиной и скоростью.



Что такое тождество

Равенство для всех

Тождество — это равенство, которое остается верным при любых допустимых значениях переменных. Оно не зависит от выбора числа, если это число не нарушает условия выражения.

Примеры тождеств

К тождествам относятся записи вида $a+a=2a$, $2(x+3)=2x+6$, $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. Они показывают, что разные формы могут означать одно и то же выражение.

Чем отличается от уравнения

Уравнение может иметь одно решение, несколько решений или не иметь их вовсе. Тождество же верно всегда в своей области допустимых значений, поэтому его не решают, а преобразуют.

Зачем это нужно

Понимание тождеств помогает упрощать вычисления, проверять правильность равенств и переходить к более удобному виду выражения перед дальнейшей работой.

Основа для алгебры

Тождественные преобразования нужны почти в каждом разделе алгебры. Без них трудно раскрывать скобки, сокращать дроби, раскладывать многочлены и решать уравнения.

Область допустимых значений выражения

**1**

Сначала — ограничения

Прежде чем преобразовывать выражение, нужно понять, при каких значениях переменной оно имеет смысл. Эти значения и составляют область допустимых значений.

2

Дроби

Если в выражении есть дробь, знаменатель не должен обращаться в ноль. Поэтому все значения, при которых знаменатель равен нулю, сразу исключают.

3

Корни

В выражениях с квадратным корнем подкоренное выражение не может быть отрицательным. Иначе значение выражения в школьном курсе не определено.

4

Проверка тождества

Верность тождества проверяют только среди допустимых значений переменных. Если ограничение не учесть, можно получить неверный вывод даже при правильном преобразовании.

Основные формулы, которые используют в 7 классе

Формула	Что дает
$(a+b)^2$	квадрат суммы
a^2-b^2	разность квадратов
a^3+b^3	сумма кубов
a^3-b^3	разность кубов

- Формулы сокращенного умножения помогают быстро раскрывать скобки и разлагать выражения на множители.
- Все формулы сводят сложное выражение к более удобному виду и экономят шаги вычисления.

Раскрытие скобок и распределительное свойство

Главное правило

Если перед скобками стоит число или выражение, оно умножается на каждый член внутри скобок. Это и есть распределительное свойство умножения.

Пример со знаком плюс

Запись $a(b+c)=ab+ac$ показывает, что каждый слагаемый внутри скобок получает общий множитель. Так проще перейти от произведения к сумме.

Пример со знаком минус

При раскрытии скобок со знаком минус нужно изменить знаки всех членов: $-(a-5)=-a+5$. Ошибка обычно возникает, когда меняют только первый знак.

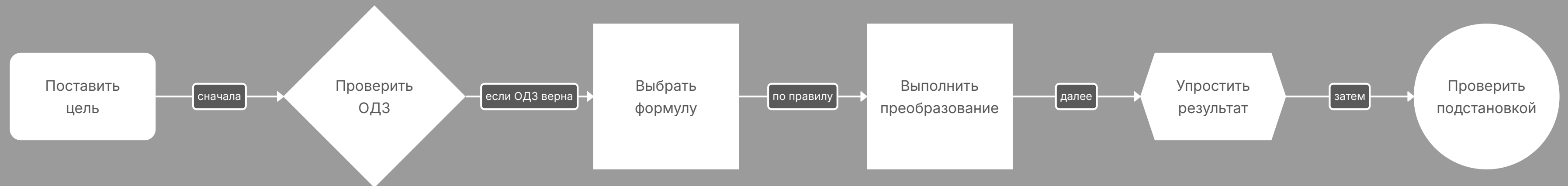
Почему это удобно

Этот прием помогает преобразовывать выражения перед вычислением, сокращением дробей и приведением подобных слагаемых. Он часто используется как первый шаг решения.



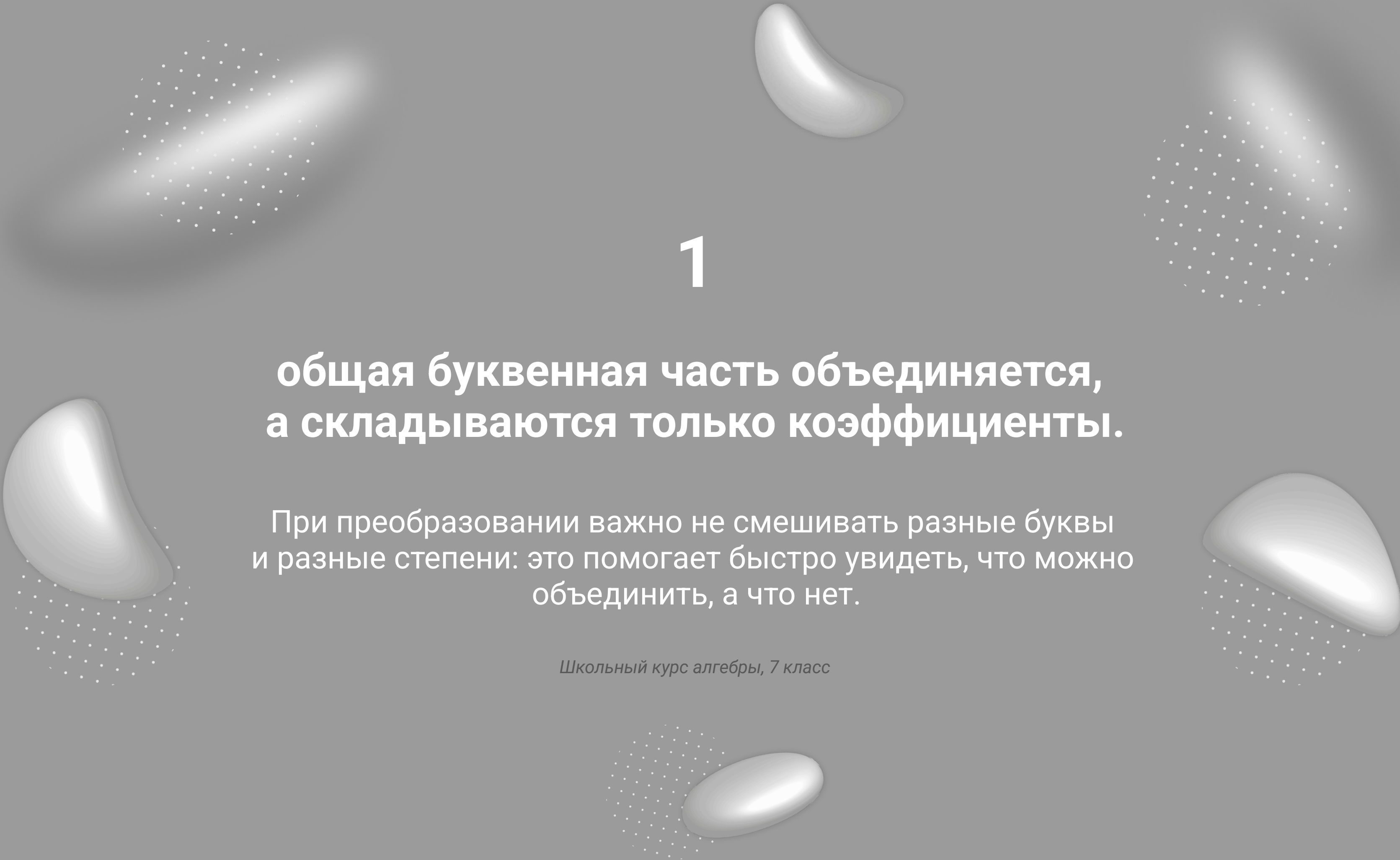
Алгоритм тождественного преобразования выражения

Последовательность действий при упрощении, разложении или сокращении выражений



Какие ошибки встречаются чаще всего

- Чаще всего трудности возникают на первых шагах преобразования, когда важно аккуратно работать со знаками и не пропускать отдельные члены выражения.
- Наибольшего внимания требуют раскрытие скобок и применение формул: именно там семиклассники чаще всего теряют точность.



1

**общая буквенная часть объединяется,
а складываются только коэффициенты.**

При преобразовании важно не смешивать разные буквы
и разные степени: это помогает быстро увидеть, что можно
объединить, а что нет.

Школьный курс алгебры, 7 класс



Разложение на множители

Смысл приема

Разложение на множители — это запись выражения в виде произведения. Такой вид часто удобнее для сокращения дробей, упрощения вычислений и дальнейших преобразований.

Общий множитель

Если во всех слагаемых есть одинаковый множитель, его выносят за скобки. Например, $ax+ay=a(x+y)$, а $6x+12=6(x+2)$.

Формулы и группировка

Иногда выражение раскладывают с помощью формулы разности квадратов или группировки слагаемых. Так получают вид, который легче использовать в следующем шаге решения.

Связь с раскрытием скобок

Разложение на множители — это обратное действие к раскрытию скобок. Поэтому обе операции часто рассматривают вместе: одна помогает получить произведение, другая — сумму.

Сокращение дробей с алгебраическими выражениями

11

1

Найти общий множитель

Сокращение возможно только тогда, когда числитель и знаменатель содержат одинаковый множитель. Сначала выражение разлагают на множители, а уже потом выполняют сокращение.

2

Не путать со слагаемыми

Сокращать можно множители, но не слагаемые. Поэтому запись вроде $\left(\frac{x+3}{x}\right)$ нельзя упростить по отдельным частям: сокращение действует только на произведение.

3

Проверить допустимые значения

Перед сокращением обязательно учитывают область допустимых значений. Если знаменатель обращается в ноль, соответствующее значение переменной исключают, даже если после преобразования оно исчезает из записи.

4

Сохранить значение дроби

При соблюдении всех условий сокращение не меняет значение выражения, а только делает его более удобным. Пример с $\left(\frac{x^2-9}{x-3}\right)$ показывает, как алгебраическая дробь превращается в более простую форму.

Тождество и уравнение: в чем различие

- Сравнение помогает не смешивать преобразование выражений и поиск неизвестного числа.
- Тождество описывает равенство для всех допустимых значений, а уравнение — только для некоторых. Это разные задачи: одно преобразуют, другое решают.

Признак	Тождество	Уравнение
Верность	всегда	при решениях
Цель	упростить	найти x
Пример	$2(x+3)=2x+6$	$x+3=10$

Проверка тождества подстановкой значений

13

2. Подставить и сравнить

Значения подставляют в левую и правую части тождества и вычисляют обе стороны отдельно, не пропуская скобки и знаки.

1. Выбрать значения

Подбирают несколько удобных чисел, например 0, 1 или 2, если они входят в область допустимых значений выражения.

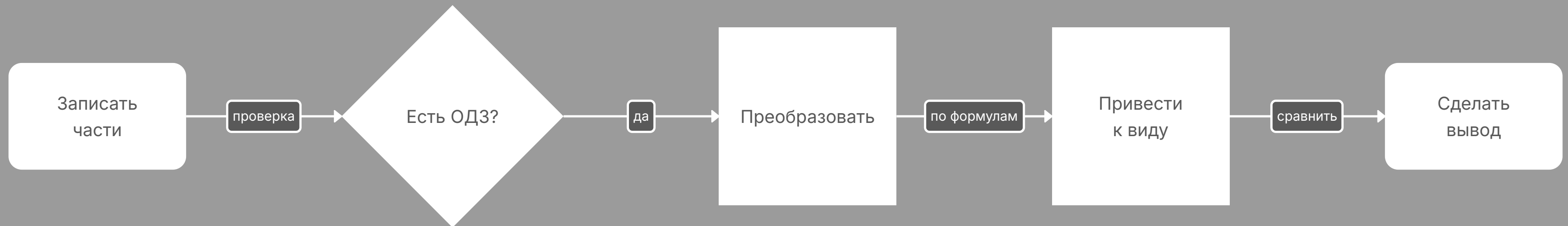
3. Сделать вывод

Если равенство нарушается хотя бы при одном допустимом значении, это не тождество. Если совпадает, выражение проверяют дальше уже строгим преобразованием.

Как доказывают тождественное равенство

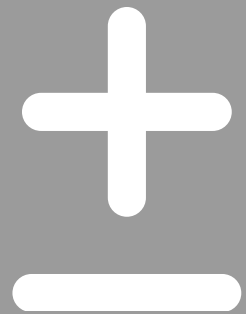
14

Последовательность шагов при преобразовании левой и правой частей равенства



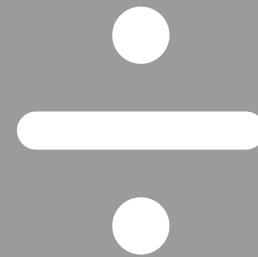
Типичные ошибки при тождественных преобразованиях

15



Сбившийся знак

При раскрытии скобок часто меняют знак только у первого члена. Нужно внимательно умножать внешний множитель на каждый член внутри скобок, не пропуская ни один.



Неверное сокращение

Иногда сокращают слагаемые вместо множителей. Это ошибка: сокращение допустимо только для общих множителей числителя и знаменателя после разложения выражения на множители.



Ошибка в формуле

Формулы квадрата суммы и квадрата разности легко перепутать. Чтобы не ошибиться, полезно запомнить знак среднего члена и проверять результат раскрытием скобок.



Забытая ОДЗ

Если в знаменателе может появиться ноль, такие значения сразу исключают. Иначе можно получить запись, которая выглядит верной, но на самом деле не имеет смысла.



Нет проверки шага

Когда ученик не сверяет каждый переход, ошибки накапливаются незаметно. Краткая проверка после каждого преобразования помогает вовремя заметить неточность и исправить её.

Какие преобразования применяются чаще всего

- Диаграмма показывает не точную статистику, а типичную учебную частоту: на уроках чаще всего встречаются первые два приёма.
- Основная нагрузка приходится на раскрытие скобок и приведение подобных слагаемых; остальные действия чаще используются как следующий шаг после них.

Тождественные преобразования в задачах



Периметр без лишних действий

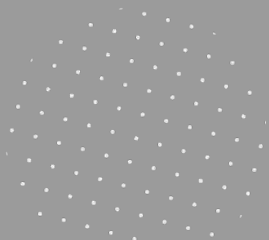
Если в задаче даны стороны в виде суммы, выражение лучше упростить сразу. Например, периметр прямоугольника с сторонами $\sqrt{a+b}$ и $\sqrt{a+b}$ удобно записать как $\sqrt{2(a+b)=2a+2b}$. Так ответ получается быстрее и нагляднее.



Площадь через преобразование

Иногда площадь выражают через разность или сумму нескольких частей. Тогда полезно раскрыть скобки или разложить выражение на множители, чтобы увидеть удобную формулу. На чертеже можно обозначить части фигуры буквами и показать, как одна запись превращается в другую.

Связь темы с устным счетом и проверкой вычислений

**1**

Быстрый счёт

Тождества позволяют заменять неудобное вычисление более простым. Например, (99^2) удобно считать через $(100^2 - 2 \cdot 100 + 1)$, поэтому ответ находится без длинного столбика.

2

Удобное разложение

Когда число близко к круглому, его можно представить как сумму или разность. Тогда формулы помогают перемножать быстрее и меньше ошибаться в устном счёте.

3

Проверка ответа

Если результат кажется сомнительным, выражение можно оценить другим способом и сравнить значения. Такой приём помогает заметить ошибку ещё до записи окончательного ответа.

4

Практическая польза

В повседневных задачах тождества экономят время: при покупке, измерениях и подсчётах они позволяют не вычислять всё заново, а использовать удобную форму записи.



Мини-памятка по теме

Шаг	Что сделать	Зачем
ОДЗ	проверить	избежать ошибки
Формула	выбрать	упростить запись
Проверка	подставить	сверить результат

- Краткая последовательность помогает не потеряться при преобразованиях выражений.
- Если выполнять шаги по порядку, тождественное преобразование остаётся верным и становится понятным. Особенно важно сначала проверить допустимые значения, а потом уже сокращать или упрощать выражение.

Тождества помогают видеть выражения по- новому

Эта тема учит не просто считать, а преобразовывать выражения без изменения их значения. Чем увереннее вы владеете формулами и правилами, тем легче решать алгебраические задачи.